Anàlisi complexa

Joaquim Ortega-Cerdà

5 de Març de 1997

Prefaci

Aquestes són unes notes d'Anàlisi Complexa que van servir com a base de un curs quadrimestral a la Facultat de Matemátiques i Estadística de la UPC l'any 1996. Són una transcripció més o menys fidel del que van ser les lliçons al llarg del curs. No poden substituir, per tant, a cap dels llibres recomanats en la bibliografia, on es podran ampliar degudament els continguts. No hi ha en aquestes notes cap demostració original ni presentació novedosa.

En la presentació triada de la asignatura es fa un èmfasi en la representació integral de les funcions holomorfes com una eina fonamental en l'estudi de les seves propietats. Aquest matís reflecteix les noves tendències en l'estudi de la teoria de funcions de variable complexa, pero sobretot els interessos i gustos de l'autor.

Finalment només em resta agraïr a l'Albert Compta i als estudiants del curs la detecció d'errades que em van assenyalar. Totes les que resten són, obviament, imputables a mi.

Barcelona, Març de 1997.

Índex

Capítol 1

Funcions holomorfes

En aquest capítol veurem la definció de funció holomorfa i algunes de les possibles interpretacions geométriques de la definició. També veirm la relació que hi ha amb les equacions de Cauchy-Riemann i amb les séries de potencies.

1.1 Definicions. Equacions de Cauchy-Riemann

Sigui Ω un obert de $\mathbb{C}$. Volem estudiar les propietats de les funcions definides de forma natural en Ω. Una primera classe de funcions que podem considerar és la de les funcions diferenciables en Ω. Això té la pega de que no utilitzem l'estructura de cos de $\mathbb{C}$, ens limitem a considerar Ω com a obert de $\mathbb{R}^2$. Una altra possibilitat és intentar redefinir la condició de diferenciabilitat d'una funció tenint en compte que estem a $\mathbb{C}$. Això és el que fem a continuació.

Definició. Diem que una funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és $\mathbb{C}$-*diferenciable* en un punt a de Ω si el límit següent existeix

$$\lim_{\zeta \to a} \frac{f(\zeta) - f(a)}{\zeta - a}.$$

En aquest cas, al límit el denotem per $f'(a)$.

Amb aquesta noció ja estem en condicions de definir les funcions holomorfes, també anomenades analítiques.

Definició. Diem que una funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és *holomorfa* en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ si f és $\mathbb{C}$-diferenciable en tot punt $a \in \Omega$. En aquest cas diem que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Nota. Si $K \subset \mathbb{C}$ és compacte i $f : K \to \mathbb{C}$ diem que f és holomorfa en K ($f \in \mathcal{H}(K)$) si existeix un obert Ω que conté K tal que f exten a una funció holomorfa en Ω.

Notem que si f és $\mathbb{C}$-diferenciable en un punt a, llavors la funció és continua en a i existeixen derivades parcials. De fet aquesta condició és molt més estricta que l'existència de derivades parcials; el límit es pren quan ζ s'atansa cap a a en totes les direccions possibles i a més en la definició hi ha implícita una certa relació entre les derivades parcials de la part real i la part imaginaria que estudiarem amb més detall. De fet, com veurem més endavant, la $\mathbb{C}$-diferenciabilitat en un obert implicarà en particular que f és $\mathcal{C}^\infty$! A partir de la definició és immediat comprovar que la suma i el producte de funcions holomorfes és holomorf.

Exemple. Les funcions holomorfes 'per excel·lència' són els polinomis, $p(z) = \sum_{k=1,n} a_k z^k$.

Veiem com la condició de $\mathbb{C}$-diferenciabilitat lliga les derivades direccionals.

Proposició 1.1. *Sigui* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa i sigui* $u = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$, *amb* $x+iy \in \Omega$. *Aleshores se satisfan les* equacions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad i \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Demostració. Avaluem el límit

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

de dues formes diferents. Primer, fent que $h \to 0$ per valors reals de h. En aquest cas tenim

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{f(x+h+iy)-f(x+iy)}{h} = \\ &= \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}.\end{aligned}$$

Si ara fem $h \to 0$, ens dona

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \tag{1.1}$$

Ara, fem el mateix, però prenent el límit al llarg de l'eix imaginari pur. Es a dir per h real,

$$\begin{aligned}\frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} &= \frac{f(x+ih+iy)-f(x+iy)}{ih} = \\ &= -i\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h} + \frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{h}.\end{aligned}$$

De forma que

$$f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y). \tag{1.2}$$

Si igualem la part real i la part imaginària de (1.1) i (1.2), tenim les equacions de C-R. ♣

Nota. Si fem el canvi de coordenades $z = x+iy$ i $\bar{z} = x-iy$, aleshores

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Per tant, les equacions de Cauchy-Riemann es tradueixen en

$$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0.$$

De fet, les següents equacions són dos a dos equivalents:

Exercici 1. Sigui $f : \Omega \to \mathbb{C}$, i escrivim $f = u + iv$, on $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$. Veieu que les equacions següents són equivalents (a qualsevol d'aquestes se les anomena equacions de Cauchy-Riemann).

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$
- $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial z}.$

Suposem ara que f és holomorfa en Ω i a més $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ (aquesta darrera hipòtesi és supèrflua doncs veurem que tota funció holomorfa és $\mathcal{C}^\infty$).

Corol·lari 1.2. *Si diem com sempre $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ i $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, aleshores u i v són funcions harmòniques, es a dir, $\Delta u = \Delta v = 0$.*

Demostració. En efecte, si calculem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}.$$

Anàlogament es fa amb v. ♣

Les equacions de Cauchy-Riemann són importants, perquè de fet caracteritzen les funcions holomorfes, com indica la següent proposició:

Proposició 1.3. *Sigui $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ una funció a valors complexos. Suposem que es satisfan les equacions de Cauchy-Riemann en Ω, i.e.:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$$

aleshores f és holomorfa en Ω.

Demostració. Sigui $\zeta - a = \xi + i\eta$, amb $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, llavors pel teorema de Taylor, com que u és $\mathcal{C}^1$:

$$u(\zeta) - u(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) \cdot \xi + \frac{\partial u}{\partial y}(a) \cdot \eta + o(|\zeta - a|).$$

Per una altra part, podem fer el mateix càlcul amb v i obtenim

$$v(\zeta) - v(a) = \frac{\partial v}{\partial x}(a) \cdot \xi + \frac{\partial v}{\partial y}(a) \cdot \eta + o(|\zeta - a|).$$

Multipliquem la segona per i i sumem les dues i resulta

$$f(\zeta) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot \xi + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot \eta + o(|\zeta - a|).$$

Apliquem ara la hipòtesi i resulta

$$f(\zeta) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (\xi + i\eta) + o(|\zeta - a|).$$

Per tant,

$$\lim_{\zeta \to a} \frac{f(\zeta) - f(a)}{\zeta - a} = \frac{\partial f}{\partial x}(a).$$

♣

Veiem ara una interpretació geomètrica de la condició d'holomorfia. Si f és una aplicació holomorfa de Ω a $\mathbb{C}$, anem a veure com distorsiona les figures que tinguem a Ω. Si prenem un arc γ amb equació $z = z(t)$, amb $t \in [0, 1]$ contingut en Ω. L'equació $w = w(t) = f(z(t))$ defineix un arc γ' contingut en $f(\Omega)$ que és la imatge de γ per f.

Si $z'(t)$ existeix aleshores $w'(t)$ també existeix i està donat per $w'(t) = f'(w(t))z'(t)$. Fixemnos en que vol dir això en un punt t_0 en que $z'(t_0) \neq 0$ i $f'(z(t_0)) \neq 0$. Diem $z_0 = z(t_0)$ i $w_0 = f(z_0)$. En el punt w_0, l'arc γ' té tangent, doncs $w'(t_0) \neq 0$ i a més la direcció està determinada per

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0).$$

Es a dir l'angle de la tangent s'incrementa en $\arg f'(z_0)$, independentment de la corba γ original. Per tant si tenim dues corbes que es tallen en z_0 amb un angle donat, les seves imatges es tallen amb en el punt w_0 amb el mateix angle (i preservant l'orientació). A les aplicacions així, se les anomena *aplicacions conformes*. Anem a veure que a l'inrevés també és veritat.

Proposició 1.4. *Sigui $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ una aplicació conforme, aleshores f és holomorfa.*

Demostració. La derivada de $w(t) = f(z(t))$ es pot escriure com

$$w'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)y'(t_0).$$

En termes de $z'(t_0)$, tenim

$$\begin{aligned} w'(t_0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) z'(t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \overline{z'(t_0)} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)z'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\overline{z'(t_0)}. \end{aligned}$$

Per una altra part, si els angles es preserven, llavors $\arg(w'(t_0)/z'(t_0))$ ha de ser independent de $\arg z'(t_0)$, es a dir

$$\arg\left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\frac{\overline{z'(t_0)}}{z't_0)}\right)$$

ha de ser independent de $\arg z'(t_0)$. Això nomes passa quan $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (les equacions de Cauchy-Riemann) que com hem vist a la proposició 1.3, són equivalents a l'holomorfia. ♣

Veiem a continuació una altre interpretació geomètrica que té l'avantatge de permetre generalitzacions a varietats diferenciables complexes. Identifiquem $\mathbb{C}$ amb $\mathbb{R}^2$ de la següent forma $\mu(z) = \mu(x+iy) = (x,y)$. Si $f = u + iv$ definim l'aplicació $\mathbb{R}$-lineal $d(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ següent:

$$d(u,v)(\zeta,\eta) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a)\cdot\zeta + \frac{\partial u}{\partial y}(a)\cdot\eta, \frac{\partial v}{\partial x}(a)\cdot\zeta + \frac{\partial v}{\partial y}(a)\cdot\eta\right).$$

Aquesta aplicació és l'aplicació diferencial tangent en el punt a de l'aplicació (u,v). Podem definir l'aplicació df, $\mathbb{R}$-lineal de $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ de la forma següent: $df = \mu^{-1}\circ d(u,v)\circ\mu$. És a dir, la definim de forma que el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "df"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "d(u,v)"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Llavors tenim la següent proposició,

Proposició 1.5. *L'aplicació $df : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ és $\mathbb{C}$-lineal (es a dir, $df(\lambda\zeta) = \lambda df(\zeta)$ per a tota λ i ζ complexes) si i només si $(\partial f/\partial\bar{z})(a) = 0$. En aquest cas, tenim*

$$df(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\cdot\zeta, \qquad \forall\zeta\in\mathbb{C}.$$

Demostració. L'aplicació diferencial $d(u,v)(a)$ ve donada per una matriu 2×2:

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Veiem que cal perquè aquesta aplicació L sigui $\mathbb{C}$-complexa. De fet nomes cal comprovar que $L(iz) = iL(z)$. Es a dir per a tota (ζ,η), cal

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C\zeta - D\eta \\ A\zeta + B\eta \end{pmatrix}.$$

Per tant la condició és equivalent a

$$A = D \qquad B = -C$$

que en el cas de l'aplicació lineal $L = d(u, v)$ són exactament les equacions de Cauchy-Riemann. A més en aquest cas l'aplicació és de la forma

$$L(\zeta + i\eta) = (A + iB)(\zeta + i\eta).$$

Si les equacions de C-R es satisfan $(A + iB)$ correspon exactament a $f'(a)$. ♣

Aquesta caracterització a més permet veure que la composició de funcions holomorfes és holomorfa, doncs l'aplicació diferencial de la composició és la composició de les aplicacions diferencials i la composició d'aplicacions $\mathbb{C}$-lineals és trivialment $\mathbb{C}$-lineal. A més se satisfà la regla de la cadena $(f(g(z)))' = f'(g(z))g'(z)$.

1.2 Sèries de potències

Anem a estudiar la relació que hi ha entre sèries de potències i funcions holomorfes. Les funcions holomorfes més elementals són els polinomis. Veiem a continuació que les sèries de potències (que podem pensar com el cas límit dels polinomis quan augmentem el grau) també.

Teorema 1.6 (1 d'Abel). *Sigui $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ amb radi de convergència $R > 0$. Aleshores,*

- *Per a cada $k \geq 1$ la sèrie*

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k} \tag{1.3}$$

  convergeix a la bola $B(a, R)$.

- *La funció f és infinites vegades $\mathbb{C}$-diferenciable en $B(a, R)$ i a més $f^{(k)}(z)$ és la sèrie* (1.3) *per a tota $k \geq 1$.*

- *Per $n \geq 0$, $a_n = f^{(n)}(a)/n!$.*

Demostració. En primer lloc fem notar que el teorema només cal provar-ho en el cas $k = 1$. Els casos $k = 2, 3, \ldots$ es poden obtenir aplicant el teorema per $k = 1$ repetides vegades. També podem suposar sense perdre generalitat que el punt $a = 0$.

Per demostrar el primer apartat, si tenim que $R^{-1} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ és el radi de convergència de la sèrie cal demostrar que $R^{-1} = \limsup_n \sqrt[n-1]{n|a_n|}$. Com que $1 = \lim_n \sqrt[n-1]{n}$, aleshores només hem de veure que $R = R'$ on $R'^{-1} = \limsup_n \sqrt[n-1]{|a_n|}$. Considerem la sèrie auxiliar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n.$$

Aquesta sèrie té radi de convergència R'. Al mateix temps resulta que

$$a_0 + z\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{1.4}$$

Aquesta última té radi de convergència R. Però de la igualtat (1.4) es veu que els radis de convergència són iguals, es a dir $R = R'$.

Demostrem a continuació el següent apartat. Com hem comentat només cal demostrar que si $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$, aleshores $f'(z)$ existeix i val $g(z)$. Diem $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ i $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$. Fixem un punt $w \in B(0,R)$ i fixem un r amb $|w| < r < R$. Sigui δ molt petita (ja precisarem quant més endavant) però de forma que $B(w,\delta) \subset B(0,r)$. Agafem $z \in B(w,\delta)$. Volem veure que $f'(w) = g(w)$,

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = &\left[\frac{s_n(z)-s_n(w)}{z-w} - s_n'(w)\right] + [s_n'(w) - g(w)]\\ &+ \left[\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right].\end{aligned}$$

En primer lloc,

$$\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w} = \frac{1}{z-w}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z^k - w^k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\left(\frac{z^k-w^k}{z-w}\right).$$

A més,

$$\left|\frac{z^k-w^k}{z-w}\right| = |z^{k-1} + z^{k-2}w + \cdots zw^{k-2} + w^{k-1}| \le kr^{k-1}.$$

Per tant,

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|kr^{k-1}.$$

Com que $r < R$, la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|kr^{k-1}$ convergeix i per tant per n prou gran

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

A més, com que $s_n'(w) \to g(w)$, prenem un n encara més gran de forma que $|s_n'(w) - g(w)| < \varepsilon/3$. Finalment un cop fixat n, llavors com que s_n és un polinomi, és holomorf i per tant si agafem un δ prou petit

$$\left|\frac{s_n(z)-s_n(w)}{z-w} - s_n'(w)\right| < \varepsilon/3.$$

Sumant els tres termes ja tenim el segon apartat. Finalment, $f(0) = a_0$, senzillament avaluant la sèrie al 0. A més com que ja tenim que $f^{(k)}$ be donada per (1.3), llavors $f^{(k)}(0) = k!a_k$. ♣

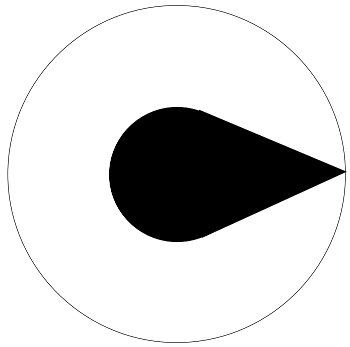

Figura 1.1: La regió d'Stolz

Hem vist com es comporten les sèries de potències a l'interior del disc de convergència. A l'exterior la sèrie no convergeix. Veiem com es comporta en els punts de la frontera. Suposem que en un punt de la frontera del disc de convergència $re^{i\theta}$ la sèrie convergeix. La pregunta és aleshores que passa amb la funció f a l'interior. Convergeix la funció cap al valor frontera quan z s'atansa cap a $re^{i\theta}$? El següent resultat d'Abel respon a aquesta pregunta. Suposarem sense que això resulti en cap cas pèrdua de generalitat, que el radi de convergència és 1 i el punt on la sèrie convergeix és el 1. El cas general és anàleg.

Teorema 1.7 (2 d'Abel). *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeix, aleshores*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

tendeix cap a $f(1)$ si z s'atansa cap a 1 dins d'una regió de Stolz (es a dir de forma que $|1-z| < M(1-|z|)$ (veieu la figura 1.1).

Demostració. Podem suposar que $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$, en cas contrari considerem $g(z) = f(z) - f(1)$. Si diem $s_n = a_0 + \cdots + a_n$ llavors

$$\begin{aligned} t_n(z) &= a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = s_0 + (s_1 - s_0)z + \cdots + (s_n - s_{n-1})z^n = \\ &= s_0(1-z) + s_1(z - z^2) + \cdots + s_{n-1}(z^{n-1} - z^n) + s_n z^n = \\ &= (1-z)(s_0 + s_1 z + \cdots + s_{n-1} z^{n-1}) + s_n z^n. \end{aligned}$$

Com que $s_n \to 0$ quan $n \to \infty$, aleshores

$$f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n.$$

Volem veure que $f(z) \to 0$ quan $z \to 1$ dins de la regió $|1-z| \leq M(1-|z|)$. Podem escollir un m molt gran de forma que $|s_n| < \varepsilon$ si $n \geq m$. Les cues de la sèrie $\sum s_n z^n$ per $n \geq m$ estan dominades per la de la sèrie geomètrica següent:

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} s_n z^n\right| \leq \varepsilon \sum_{n=m}^{\infty} |z|^n = \varepsilon \frac{|z|^m}{1-|z|} < \frac{\varepsilon}{1-|z|}.$$

Per tant podem acotar $f(z)$ en la regió $|1-z| \leq M(1-|z|)$, així

$$|f(z)| \leq |1-z| \left|\sum_{n=0}^{m-1} s_n z^n\right| + M\varepsilon.$$

Si ε és molt petit el terme de la dreta és petit. A més si $z \to 1$ el terme de l'esquerra també va cap a 0. Per tant, $f(z) \to 0$ si $z \to 1$ dins la regió d'Stolz. ♣

Aquest resultat és òptim en el sentit de que hi ha sèries de potències que no convergeixen de forma tangencial als seus valors frontera. Aquest resultat es pot intuir si observem la funció $f(z) = e^{1/(z-1)}$. Es veu fàcilment que $f(x) \to 0$ si $x \to 1^-$ i $x \in \mathbb{R}$. Però si ens atansem per la recta $\operatorname{Re} z = 1$, ja no és tan clar. De fet la seva sèrie de potències no convergeix tangencialment cap a 0 quan $z \to 1$ lliurement.

1.3 Exemples

Amb l'ajut de les sèries de potències, anem a introduir les funcions transcendents elementals, es a dir, l'exponencial i les funcions trigonomètriques.

Considerem la funció solució de la següent equació diferencial en $\mathbb{C}$:

$$f'(z) = f(z) \qquad \text{i} \qquad f(0) = 1.$$

Si resolem aquesta equació mitjançant sèries de potències, diem a la solució $e^z = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$ i de l'equació resulta que $na_{n-1} = a_n$ i $a_0 = 1$. De tot això es conclou que

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots.$$

Aquesta sèrie té radi de convergència tot $\mathbb{C}$, doncs $\sqrt[n]{n!} \to \infty$. Les funcions holomorfes a tot $\mathbb{C}$ se les anomena *funcions enteres* Anem a veure alguna de les propietats elementals que satisfà la funció exponencial. Per a tota $a, b \in \mathbb{C}$ es compleix $e^{a+b} = e^a e^b$ doncs $(e^z \cdot e^{c-z})' = e^z e^{c-z} + e^z(-e^{c-z}) = 0$. Per tant $e^z e^{c-z} = ct$. Si avaluem a $z = 0$, veiem que $e^z e^{c-z} = e^c$, per a tota $z, c \in \mathbb{C}$. En particular si prenem $z = a$ i $c = a+b$, llavors tenim la propietat que desitjàvem. En el decurs de la prova hem utilitzat que si una funció holomorfa té derivada 0, aleshores la funció és constant. Això és degut a que $f'(z) = \partial f/\partial x$ i per tant $\partial u/\partial x = \partial v/\partial x = 0$. A més per les equacions de C-R, $\partial u/\partial y = \partial v/\partial y = 0$, i en conseqüència tant u com v són constants.

Per una altra part, com que $e^z e^{-z} = 1$, resulta que e^z mai no és 0. A més, com que la sèrie de potències té coeficients reals, llavors $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ i per tant $|e^{iy}|^2 = e^{iy}e^{-iy} = 1$ per $y \in \mathbb{R}$. De resultes d'això $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. A partir de la funció exponencial podem definir el sinus i el cosinus com

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Amb aquesta definició les funcions $\sin$ i $\cos$ tenen el desenvolupament en sèrie de potències esperat. A més per a tota $z \in \mathbb{C}$, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ i a més $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. En particular si diem $r = |z|$ i θ a l'argument de z, llavors $z = re^{i\theta}$.

Una funció f es diu *periòdica* de *període* c si $f(z + c) = f(z)$ per a tota $z \in \mathbb{C}$. Si c és un període de e^z, llavors $e^z = e^{z+c} = e^z e^c$. Per tant $e^c = 1$. Com que $1 = |e^c| = e^{\operatorname{Re} c}$, aleshores $c = ix$ per algun $x \in \mathbb{R}$. A més $1 = \cos x + i \sin x$, per tant c és un múltiple enter de $2\pi i$. Es a dir la funció exponencial és periòdica de període $2\pi i$.

Volem considerar la funció inversa de l'aplicació exponencial, però com hem vist e^z és una funció periòdica i per tant no és injectiva. Això és una font de problemes i fa que la definició del logaritme sigui delicada.

En qualsevol cas volem definir $\log w$ de forma que $w = e^z$ si $z = \log w$. Com que $e^z \neq 0$ per a tota z, llavors no es pot definir $\log 0$. Si suposem doncs que $w \neq 0$, mirem el conjunt de les solucions de $e^z = w$. Si diem $z = x + iy$, aleshores totes les solucions de $e^z = w$ són:

$$\log |w| + i(\arg w + 2\pi k), \; k \text{ qualsevol enter},$$

on $\log |w|$ és el logaritme real de $|w|$. Ara ja podem introduir una definició

Definició. Si Ω és un domini (un obert connex de $\mathbb{C}$) i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és una funció contínua de forma que $z = \exp f(z)$ per a tota $z \in \Omega$ aleshores f és una *branca del logaritme*.

Observem que, degut a la periodicitat de l'aplicació exponencial, si f és una branca del logaritme $g = f + 2\pi ki$ amb k enter és una altra branca del logaritme. De forma recíproca si tenim dues branques del logaritme f i g, aleshores en cada punt z, $g(z) = f(z) + 2\pi ki$. En principi l'enter k podria canviar en cada punt z de Ω, però la següent proposició ens assegura que això no passa.

Proposició 1.8. *Si f i g són dos branques del logaritme en un domini Ω, aleshores existeix un enter k de forma que*

$$f(z) = g(z) + 2\pi ki \textit{ per a tota } z \in \Omega$$

Demostració. La demostració és elemental. Diem

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}(f(z) - g(z)),$$

aleshores, h és una funció contínua que pren valors en els enters. Això força a que h sigui constant en cada component connexa del domini de definició. Com que Ω era connex, h és constant. ♣

Fins ara només hem vist que en un domini Ω si hi ha una branca del logaritme, totes les altre s'obtenen afegint constants del tipus $k2\pi i$. Però encara no hem vist cap branca del logaritme. Construïm una. Sigui $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$, es a dir, el pla complex menys la semirecta dels reals negatius. Clarament Ω és connex i a més tot punt $z \in \Omega$ es pot escriure de la forma $z = |z|e^{i\theta}$ amb $\theta \in (-\pi, \pi)$. Definim la branca del logaritme en aquest obert Ω com $\log z = \log|z| + i\theta$ (on $\log|z|$ és el logaritme real). Aquesta branca del logaritme en aquest obert es coneix habitualment com a *branca principal del logaritme*.

A més pel fet de ser l'inversa de la funció exponencial qualsevol branca del logaritme és holomorfa, com evidencia la següent proposició.

Proposició 1.9. *Sigui G i Ω oberts de $\mathbb{C}$. Suposem que $f : G \to \mathbb{C}$ i $g : \Omega \to \mathbb{C}$ són contínues i $f(G) \subset \Omega$ amb $g(f(z)) = z$ per tot $z \in G$. Si g és holomorfa i $g'(f(z)) \neq 0$, aleshores f és holomorfa i $f'(z) = 1/g'(f(z))$.*

Demostració. Fixat $a \in G$, prenem $h \in \mathbb{C}$ amb $h \neq 0$ prou petit de forma que $a + h \in G$. Per hipòtesi $a = g(f(a))$ i $a+h = g(f(a+h))$. En particular, això diu que $f(a) \neq f(a+h)$. A més

$$1 = \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{1.5}$$

Com que f és contínua, $f(a+h) - f(a) \to 0$ quan $h \to 0$ i per tant prenent límits quan $h \to 0$ en la igualtat (1.5) tenim el resultat desitjat. ♣

Com a corol·lari d'aquest resultat tenim que una branca del logaritme en un domini és holomorfa i té derivada $1/z$.

Un cop vist com es pot definir un logaritme holomorf, es pot definir de forma natural la funció potència. Es a dir, si $a \in \mathbb{C}$, i tenim un domini Ω amb una branca del logaritme definit en Ω es defineix z^a en Ω com $\exp a \log z$. Aquesta funció és holomorfa doncs és composició d'holomorfes.

Capítol 2

Teoria local de Cauchy

En aquest capítol estudiarem les propietats locals de les funcions holomorfes, en particular la seva regularitat. Per a fer-ho, necessitem introduir una eina que ens serà molt útil, la integral de línia. Amb l'ajut d'aquest concepte veurem la equivaléncia de totes les possibles definicions de holomorfia. Veurem la fórmula de representació de Cauchy i l'utilitzarem per demostrar el principi de continuació analítica, el principi les desigualtats de Cauchy, el principi del màxim i el teorema de l'aplicació oberta.

2.1 Integrals de línia

Començarem per la definició de integral de línia. Cal fer atenció perquè aquesta definició no correspon a la integral d'una funció al llarg d'un arc parametritzat amb el paràmetre arc.

Definició. Si tenim una funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua i un arc γ en Ω amb una parametrització $z(t)$ amb $z : [a, b] \to \Omega$ que sigui $\mathcal{C}^1$ a trossos, definim la *integral de línia*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt,$$

on u i v són la part real i imaginària de $f(z(t))\dot{z}(t)$.

Aquesta definició és invariant per canvis de paràmetre de l'arc. En efecte, si canviem la parametrització, es a dir, donem un nou interval $\alpha \leq \tau \leq \beta$ i una funció canvi de paràmetre $t(\tau)$ de forma que $t(\tau)$ sigui una funció $\mathcal{C}^1$ a trossos i creixent de forma que $t(\alpha) = a$ i $t(\beta) = b$, llavors

$$\int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(z(t(\tau))z'(t(\tau))t'(\tau)\,d\tau,$$

senzillament fent el canvi $t = t(\tau)$ en la primera integral. Ara be,

$$z'(t(\tau))t'(\tau) = \frac{d}{d\tau}z(t(\tau))$$

i de resultes d'això, la segona integral és justament la integral sobre γ aquesta vegada parametritzat amb paràmetre τ.

Si ens donen un arc γ amb una parametrització $z(t)$ amb $z : [a, b] \to \mathbb{C}$, es defineix l'arc $-\gamma$ com l'arc parametritzat per $w(t) = z(-t)$ amb $w : [-b, -a] \to \mathbb{C}$. Aquest té la mateixa imatge que l'arc γ però recorregut en sentit invers. Es verifica que per tota funció contínua f sobre la imatge de l'arc,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = -\int_{-\gamma} f(z)\, dz.$$

En efecte,

$$\int_{-\gamma} f(z)\, dz = \int_{-b}^{-a} f(w(t))\dot{w}(t)\, dt = -\int_{-b}^{-a} f(z(-t))\dot{z}(-t)\, dt =$$
$$= \int_b^a f(z(t))\dot{z}(t)\, dt = -\int_\gamma f(z)dz.$$

La integral de línia té bones propietats respecte les funcions holomorfes. Anem a estudiar la seva relació. Comencem amb la següent proposició.

Proposició 2.1. *Si F és una funció holomorfa en un entorn de la imatge d'un arc γ parametritzat per $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ i diem $f(z) = F'(z)$, aleshores*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

En particular $\int_\gamma f\, dz = 0$ si γ és un arc tancat.

Demostració. Com que $f(z) = F'(z)$, llavors

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b F'(z(t))z'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))\, dt = F(z(b)) - F(z(a)).$$

♣

Nota. Cal anar amb compte doncs no tota funció contínua té primitiva. Per exemple sigui $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$. Si F fos una primitiva de f, llavors F seria holomorfa. Per tant si $F = U + iV$ aleshores $x^2 + y^2 = F'(x + iy)$. Ara, degut a les equacions de C-R,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = x^2 + y^2 \quad \text{i} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Però $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$ implica que $U(x, y) = u(x)$ i per tant, $x^2+y^2 = \frac{\partial U}{\partial x} = u'(x)$. Això és contradictori. De fet, el que passa és que només les funcions holomorfes tenen localment primitiva, com veurem més endavant (teorema de Morera).

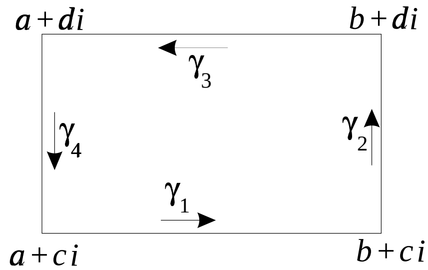

Figura 2.1: El rectangle R

La relació més important que satisfan les funcions holomorfes i les integrals de línia és, potser, que la integral de línia al llarg d'un camí tancat és zero si dins el camí la funció és holomorfa. El cas més senzill és quan el camí és la frontera de un rectangle i la funció és holomorfa en un entorn del rectangle. D'aquest teorema donarem dues proves. Una de molt simple per la que necessitarem una hipòtesi extra: que la funció sigui $\mathcal{C}^1$. Aquesta hipòtesi no és satisfactòria doncs en la definició de funció holomorfa no ho hem suposat, però la donem per que les idees són les que expliquen el fenomen que hi ha darrera.

Proposició 2.2. *Sigui Ω un obert en $\mathbb{C}$ i $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Sigui R un rectangle $R \subset \Omega$. Aleshores,*

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dxdy = \frac{1}{2i} \int_{\partial R} f(z)dz.$$

Demostració. Essencialment, aquesta demostració és el teorema d'Stokes, però anem a fer-ho d'una altre forma. Considerem un rectangle com a la figura 2.1

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{\partial f}{\partial y} dxdy &= \int_a^b dx \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = \\ &= \int_a^b (f(x,d) - f(x,c))\, dx = -\int_{\gamma_3} f\, dz - \int_{\gamma_1} f dz.\end{aligned}$$

De la mateixa forma

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = -i \int_{\gamma_2} f\, dz - i \int_{\gamma_4} f dz.$$

Per tant,

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dxdy = \frac{1}{2} \iint_R \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = -\frac{i}{2} \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} f dz = \frac{1}{2i} \int_{\partial R} f dz.$$

♣

Corol·lari 2.3. *Si $f \in C^1(\Omega)$ i f és holomorfa en un rectangle $R \subset \Omega$, llavors*

$$\int_{\partial R} f = 0.$$

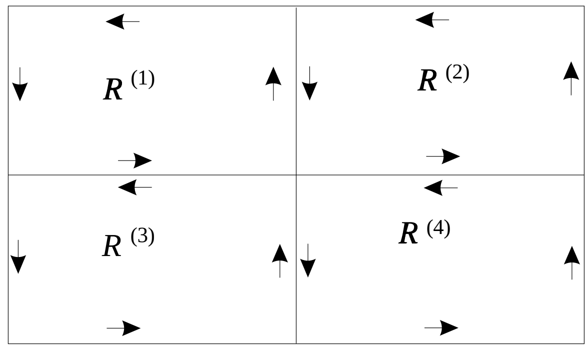

Figura 2.2: Bisecció del rectangle

A continuació veiem el mateix corol·lari però sense la hipòtesi de regularitat

Teorema 2.4 (Cauchy-Goursat). *Sigui Ω un conjunt obert de $\mathbb{C}$ i sigui f una funció holomorfa en Ω. Llavors, per a tot rectangle $R \subset \Omega$, tenim*

$$\int_{\partial R} f dz = 0.$$

Demostració. Per demostrar aquest resultat trencarem el rectangle R en rectangles més petits. Ens es convenient, doncs, introduir la següent notació per determinar en quin rectangle integrem.

$$\eta(R) = \int_{\partial R} f(z)\, dz.$$

Si bisequem cada costat del rectangle original R obtenim una descomposició en quatre rectangles com en la figura 2.2 Si diem als quatre rectangles resultants $R^{(1)},\ R^{(2)},\ R^{(3)},\ R^{(4)}$, obtenim

$$\eta(R) = \eta(R^{(1)}) + \eta(R^{(2)}) + \eta(R^{(3)}) + \eta(R^{(4)}), \tag{2.1}$$

doncs la integral al llarg dels costats comuns a dos d'ells es cancel·la perquè estan recorregudes en sentit oposat. Nosaltres volem demostrar que $\eta(R)$ és 0. Però la hipòtesi que tenim és de caire local (sabem que f és holomorfa). Hem de passar de la integral al llarg del rectangle gran a la d'un de petit. Per a fer-ho, considerem el rectangle petit $R^{(k)}$ que aporta la quantitat més gran de massa en la suma (2.1). Es a dir, hi haurà un dels rectangles petits $R^{(k)}$ tal que $|\eta(R^{(k)})| \geq \frac{1}{4}|\eta(R)|$. En aquest rectanglet més "pesat" li diem R_1. Si n'hi ha més d'un, escollim un qualsevol. Ara trenquem el rectangle R_1 en quatre i repetim el procés. D'aquesta forma obtenim una successió de rectangles encaixats $R \supset R_1 \supset \cdots \supset R_n \supset \cdots$ de forma que $|\eta(R_n)| \geq \frac{1}{4}|\eta(R_{n-1})|$; per tant $|\eta(R_n)| \geq 4^{-n}|\eta(R)|$.

Els rectangles R_n col·lapsen tots en un punt $z^* \in R$, doncs cada cop tenen la meitat de mida. Fixem ara un $\varepsilon > 0$ molt petit, volem veure que $|\eta(R)| < \varepsilon$. Com que f és holomorfa en Ω, podem escollir un $\delta > 0$ prou petit, de forma que f sigui holomorfa en el disc $D(z^*, \delta)$ i a més per a tota z amb $|z - z^*| < \delta$ se satisfà

$$\left| \frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*) \right| < \frac{\varepsilon}{dL},$$

on d és el diàmetre (o diagonal) de R i L el seu perímetre. Dit d'una altra forma

$$|f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| < \frac{\varepsilon}{dL}|z - z^*|.$$

Ara, un cop fixat δ escollim un n prou gran de forma que R_n estigui contingut dins de $D(z^*, \delta)$. Això es pot fer doncs $R_n \to z^*$. Hi ha dos casos on el teorema és cert trivialment:

$$\int_{\partial R_n} dz = 0, \qquad \int_{\partial R_n} z\, dz = 0.$$

Aquests casos són una conseqüència del corol·lari 2.3. Gràcies a això podem restar aquestes integrals a $\eta(R_n)$ i no res s'altera, es a dir,

$$\eta(R_n) = \int_{\partial R_n} f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)\, dz.$$

Per tant

$$|\eta(R_n)| \leq \frac{\varepsilon}{dL} \int_{\partial R_n} |z - z^*|\, |dz|,$$

on $|dz|$ és el paràmetre arc. Com $z, z^* \in R_n$, aleshores $|z - z^*|$ és més petit que el diàmetre de R_n que val $2^{-n}d$. La integral del paràmetre arc al llarg de ∂R^n dona el perímetre del rectanglet R_n que val $2^{-n}L$. Finalment tenim doncs $|\eta(R_n)| \leq 4^{-n}\varepsilon$ i per tant $|\eta(R)| \leq \varepsilon$ com volíem demostrar. ♣

Per les aplicacions necessitem una versió lleugerament més general d'aquest resultat.

Teorema 2.5. *Sigui Ω un obert de $\mathbb{C}$ i R un rectangle contingut dins Ω. Aleshores si $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ i $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, amb $a \in \Omega$ llavors*

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0.$$

Demostració. Si $a \notin R$ és el cas que ja hem vist. Suposem ara que $a \in \partial R$. En aquest cas prenem una successió de rectangles R_n continguts a l'interior de R de forma que $R_n \to R$ quan $n \to \infty$. Per a cadascun dels rectangles R_n tenim

$$\int_{\partial R_n} f(z)\, dz = 0.$$

Com que f és una funció contínua en el rectangle tancat R, llavors pel teorema de la convergéncia dominada.

$$\int_{\partial R_n} f(z)\, dz \to \int_{\partial R} f(z)\, dz.$$

Per tant el teorema també és cert quan $a \in \partial R$.

Només queda per tractar, doncs, el cas en que a pertany a l'interior de R. Si ens trobem en aquesta situació sempre podem trencar el rectangle en dos com en la figura 2.3. Llavors

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = \int_{\partial R_1} f(z)\, dz + \int_{\partial R_2} f(z)\, dz.$$

Cadascuna de les dos integrals resultants es troba en la situació en que $a \in \partial R_1$ ó $a \in \partial R_2$ i per tant totes dues valen 0. ♣

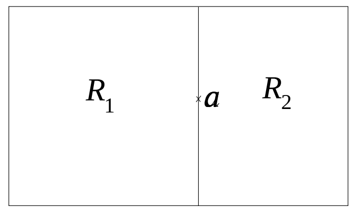

Figura 2.3: Cas que $a \in R$

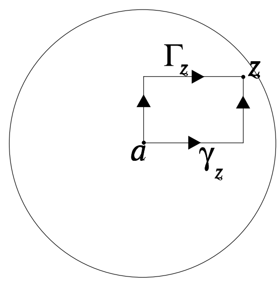

Figura 2.4: El camí γ_z i Γ_z

Ara, mitjançant aquest teorema, demostrarem que tota funció analítica en un disc admet funció primitiva. Sigui D un disc de centre a i radi r.

Teorema 2.6. *Si $f \in \mathcal{H}(D)$, aleshores com hem vist, $f \in \mathcal{C}(D)$ i per a tot rectangle $R \subset \Omega$,*

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0.$$

D'aquestes dues propietats se'n dedueix que f admet una funció primitiva F tal que $F'(z) = f(z)$ per a tota $z \in D$.

Demostració. Donada $f \in \mathcal{C}(D)$ definim F com

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\, dw.$$

on γ_z és el camí que va del centre del disc a fins a z segons indica la figura 2.4. Com que

$$\int_{\partial R} f(w)\, dw = 0,$$

aleshores

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\, dw = \int_{\Gamma_z} f(w)\, dw.$$

Calculem ara $\frac{\partial F}{\partial x}(z)$. Sigui $z = x + iy$, prenem h real i molt petit de forma que $z + h \in D$, llavors

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{\int_{\Gamma_{z+h}} f(w)\, dw - \int_{\Gamma_z} f(w)\, dw}{h} = \frac{1}{h} \int_L f(w)\, dw.$$

on L és el segment $\overrightarrow{z(z+h)}$. Si parametritzem L per $z(t)=x+t+iy$, amb $t\in[0,h]$, llavors dient $f=u+iv$:

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{1}{h}\int_0^h f(x+t+iy)\,dt=u(\xi_1)+iv(\xi_2),$$

on $\xi_1,\xi_2\in L$. Si fem tendir $h\to 0$, resulta doncs $\frac{\partial F}{\partial x}=f(z)$. Ara fem el mateix càlcul però per $\frac{\partial F}{\partial y}$. En aquest cas si prenem de nou h real i molt petit de forma que $z+ih\in D$, llavors

$$\frac{F(z+ih)-F(z)}{h}=\frac{\int_{\gamma_{z+ih}}f(w)\,dw-\int_{\gamma_z}f(w)\,dw}{h}=\frac{1}{h}\int_{L'}f(w)\,dw.$$

on L' és el segment $\overrightarrow{z(z+ih)}$. Si parametritzem L' per $z(t)=x+i(t+y)$, amb $t\in[0,h]$, aleshores

$$\frac{F(z+ih)-F(z)}{h}=\frac{1}{h}\int_0^h f(x+i(t+y))i\,dt=i(u(\xi_1)+iv(\xi_2)),$$

on $\xi_1,\xi_2\in L'$. Si fem tendir $h\to 0$, resulta doncs $\frac{\partial F}{\partial y}=if(z)$. En particular, com que $f\in\mathcal{C}(D)$, hem vist que tant la derivada parcial respecte de les x com de les y són contínues. Per tant, la funció F és de classe $\mathcal{C}^1(D)$. A més les derivades satisfan les equacions de Cauchy-Riemman, doncs $iF_x(z)=F_y(z)$. Aleshores F és holomorfa segons la proposició 1.3 i a més com que F és holomorfa $F'(z)=F_x(z)=f(z)$. ♣

Un corol·lari immediat d'aquest teorema és el següent:

Corol·lari 2.7. *Sigui $f\in\mathcal{H}(D)$, aleshores per a tot arc γ tancat i contingut en D, es satisfà*

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0.$$

Demostració. En efecte, si tenim qualsevol camí γ tancat en D de forma que està parametritzat per $z(t),\ t\in[a,b]$, aleshores si la primitiva de f és F, tenim

$$\int_\gamma f(z)\,dz=F(z(b))-F(z(a))=0.$$

♣

2.2 Fórmula de Cauchy en un disc

Anem a provar una fórmula de representació de les funcions holomorfes en un disc que ens permetrà recuperar els valors de la funció en l'interior del disc a partir dels valors en la frontera del disc. Per a fer això necessitem prèviament el següent lema:

Lema 2.8. *Sigui D un disc de centre b i radi r i sigui a un punt de l'interior del disc. Aleshores*

$$\int_{\partial D}\frac{dz}{z-a}=2\pi i.$$

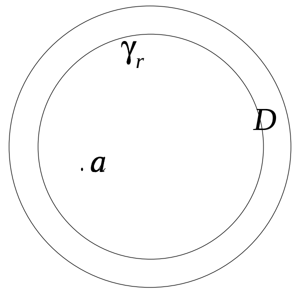

Figura 2.5: El disc D i el camí γ_r

Demostració. Parametritzem el camí de la forma següent $z(t) = a + \rho(t)e^{it}$ amb $t \in [0, 2\pi]$, on $\rho(t) \in (0, 2r)$ de forma que $z(t) \in \partial D$. Està clar que $\rho(t) \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi])$. En aquest cas la integral resulta

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho(t)e^{it}} \frac{d}{dt}(\rho(t)e^{it})\, dt = \\ = \int_0^{2\pi} \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\, dt + \int_0^{2\pi} i\, dt = \log\left(\frac{\rho(2\pi)}{\rho(0)}\right) + 2\pi i,$$

on el logaritme és el logaritme real d'un nombre positiu. Donat que $\rho(0) = \rho(2\pi)$, el logaritme val 0 i el lema està provat. ♣

Amb l'ajut d'aquest lema ja estem disposats per demostrar el següent teorema que és un dels fonamentals en la teoria de variable complexa. Diem D a un disc obert en $\mathbb{C}$.

Teorema 2.9 (Fórmula de Cauchy en un disc). *Sigui $f \in \mathcal{C}(\overline{D})$, $f \in \mathcal{H}(D)$, llavors per a tota $a \in D$ la següent fórmula de representació és certa.*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\, dz. \tag{2.2}$$

Demostració. Considerem la següent funció auxiliar

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z \in D \setminus \{a\} \\ f'(a) & \text{si } z = a. \end{cases}$$

Com que f és holomorfa en D i contínua en $\overline{D}$, se segueix que g és contínua en $\overline{D}$ i holomorfa en $D \setminus \{a\}$. Ja hem vist que en aquest cas la integral de línia de g al llarg de la frontera de qualsevol rectangle contingut en D és 0. Per tant com en el teorema 2.6, es veu que g té primitiva G en D. Pel corol·lari 2.7 la integral de g al llarg de qualsevol camí tancat serà zero. Prenem com a camí tancat un cercle de radi r lleugerament més petit al del disc i de forma que a pertanyi a l'interior del disc vorejat pel camí γ_r com a la figura 2.5. Tenim doncs que

$$0 = \int_{\gamma_r} g(z)\, dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\, dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - 2\pi i f(a).$$

En aquest cas si fem tendir $r \to R$ on R és el radi del disc D, llavors com que $f \in \mathcal{C}(\overline{D})$, tenim

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = \lim_{r\to R}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a).$$

♣

Nota. Aquest teorema l'aplicarem habitualment a funcions holomorfes en un obert Ω i en discos D tals que $\overline{D} \subset \Omega$. En aquest cas com que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ la continuitat en $\overline{D}$ està garantida automàticament.

Aquest teorema té moltes conseqüències. En primer lloc observem que una funció holomorfa està completament determinada pels seus valors frontera en un disc. També tenim una representació explícita de la funció en termes dels seus valors frontera. D'aquesta manera podem comprovar que f és regular en l'interior doncs es pot derivar sota signe integral, però de fet el següent teorema diu molt més, una funció holomorfa admet desenvolupament en sèrie de potències:

Teorema 2.10. *Sigui Ω un obert de $\mathbb{C}$ i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, aleshores en tot disc D contingut dins Ω la funció f admet una representació en sèrie de potències.*

Demostració. Sigui $D = D(a,r)$ un disc de centre a i radi r contingut dins de Ω. Llavors per a tota $w \in D$ tenim la fórmula de representació de Cauchy en el disc:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-w}\,dz.$$

Si $w \in D(a,r)$, aleshores

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-a}\left(1-\frac{w-a}{z-a}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}.$$

A més fixat w la convergència d'aquesta sèrie és uniforme en $\{z,\ |z-a| = r\}$, donat que $|w-a| < r$. Per tant la sèrie i la integral commuten i tenim

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w-a)^n,$$

on

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz. \tag{2.3}$$

♣

Aquest teorema és el que tanca el cercle doncs ja havíem vist que tota sèrie de potències és holomorfa en el seu domini de convergència. De fet el primer teorema d'Abel (teorema 1.6) i el que acabem de provar ens donen el següent corol·lari:

Corol·lari 2.11. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ aleshores $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ i de fet totes les derivades són també holomorfes. Per a tot disc $D(a,r) \subset \Omega$ la funció f admet la representació*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n.$$

Si ara fem un recull global de tot el que hem vist fins ara, ens adonem que hi ha moltes possibles definicions de les funcions holomorfes i que algunes de les propietats que tenen de fet les caracteritzen. En resum, fins ara hem demostrat les següents equivalències

Proposició 2.12. *Sigui Ω un obert de $\mathbb{C}$ i $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, aleshores són equivalents:*

- $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- *f admet una representació en sèrie de potències en tot disc $D \subset \Omega$*
- *f té primitiva F_D en tot disc $D \subset \Omega$.*
- *$f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ i f satisfà les equacions de Cauchy-Riemman.*
- *Per a tot rectangle tancat $R \subset \Omega$ se satisfà $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$.*
- *$f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ i $df(a)$ és $\mathbb{C}$-lineal en tot punt a de Ω.*
- *$f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ i f és una aplicació conforme.*
- *Per a tot disc D en Ω tenim la següent fórmula de representació*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w}\,dz \qquad \forall w \in D.$$

Ara ja estem proveïts de molts punts de vista per a abordar l'estudi de les funcions holomorfes. Triarem lliurement una o altre definició a l'hora de provar les seves propietats.

2.3 Propietats elementals

Començarem pel que habitualment es coneix com principi de continuació analítica. Aquest principi ve a dir que una funció holomorfa queda determinada pels valors que pren en un obert per petit que aquest sigui. És, en certa forma, un resultat de "rigidesa" de les funcions holomorfes. Un cop prefixats els seus valors en un conjunt petit ja no es pot triar lliurement els valors en d'altres punts, perquè ja es troben determinats. El primer teorema en aquest sentit és el següent:

Teorema 2.13. *Sigui Ω un domini de $\mathbb{C}$ (un obert connex) i sigui $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $U \subset \Omega$ és un obert $U \neq \emptyset$ tal que $f(z) = 0$, per a tota $z \in U$, aleshores $f \equiv 0$ en Ω.*

Demostració. Com que f és una funció $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, llavors els conjunts

$$E_n = \{z \in \Omega;\ f^{(n)}(z) = 0\},$$

són tancats en Ω i per tant $E = \cap_{n\geq 0} E_n$ també és un conjunt tancat. Per les hipòtesis sabem que $U \subset E$ i per tant $E \neq \emptyset$. Només cal veure que E és obert i aleshores per la connectivitat de Ω ja sabrem que $f \equiv 0$ en tot Ω. Però si $a \in \Omega$, aleshores existeix un petit disc $D = D(a, r)$ tal que $D \subset \Omega$. En aquest disc, com que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, f té representació en sèrie de potències:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} f^{(n)}(a)(z-a)^n, \qquad \forall z \in D.$$

Si $a \in E$, aleshores $f^{(n)}(a) = 0$ per a tota $n \geq 0$ i $f(z) = 0$ per a tota $z \in D$. Per tant $D \subset E$ i això vol dir que E és obert. ♣

Aquest teorema encara el podem millorar; si prenem una successió $\{a_n\} \subset \Omega$ amb un punt d'acumulació a l'interior de Ω de forma que $f(a_n) = 0$, aleshores $f \equiv 0$ en tot Ω, com prova el següent teorema.

Teorema 2.14. *Si Ω és un domini de $\mathbb{C}$ i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, amb $f \not\equiv 0$ en Ω, aleshores el conjunt*

$$E = \{z \in \Omega;\ f(z) = 0\},$$

és un conjunt discret en Ω (i.e. cada punt és aïllat en Ω).

Demostració. Com que f és una funció contínua, aleshores el conjunt de zeros de f, $Z(f) = E$ és un conjunt tancat dins Ω. Sigui $a \in Z(f)$. Aleshores, en un entorn U de a contingut dins Ω, f admet una expressió en sèrie de potències: $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$. Com que f no és idènticament 0 en U (si ho fos, llavors pel teorema anterior $f \equiv 0$ en Ω), existeix un $c_n \neq 0$. Sigui c_k el primer coeficient que no sigui 0. Aleshores

$$f(z) = (z-a)^k \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k} = (z-a)^k g(z),$$

amb $g(a) = c_k \neq 0$. Aleshores existeix un altre entorn $V \subset U$ de a de forma que $g(z) \neq 0$ per a tota $z \in V$. En aquest cas $Z_f \cap V = \{a\}$ i per tant a és un zero aïllat. ♣

Un corol·lari d'aquest resultat és el següent:

Corol·lari 2.15. *Si Ω és un domini de $\mathbb{C}$ i f, g són dues funcions holomorfes en Ω tals que el conjunt $\{z \in \Omega;\ f(z) = g(z)\}$ té un punt d'acumulació en Ω, aleshores $f \equiv g$ en Ω.*

Demostració. La prova d'aquest resultat es immediata. Només cal aplicar el teorema anterior a la funció $h = f - g$. Aquesta funció té conjunt de zeros $Z(h)$ no aïllat i per tant és idènticament 0 en Ω. ♣

2.4 Desigualtats de Cauchy

Estudiem ara la relació que tenen les funcions holomorfes i les seves derivades. En general són d'esperar resultats del tipus que una funció està controlada per les seves derivades. El que es més sorprenent és que en el cas de funcions holomorfes és cert un resultat en sentit oposat. Si una funció és acotada, les seves derivades estan acotades en termes de la cota de la funció. Més concretament tenim les següents desigualtats:

Teorema 2.16 (Desigualtats de Cauchy). *Sigui* $f \in H(D(a,r))$. *Sigui* $0 < \rho < r$. *Si diem* $M(\rho) = \sup_{|z-a|=\rho} |f(z)|$, *aleshores*

$$|f^{(n)}(a)| \leq n! M(\rho) \rho^{-n}, \quad \textit{si } n \in \mathbb{N}.$$

Demostració. Per demostrar aquest resultat, utilitzarem la fórmula de representació de Cauchy de les funcions holomorfes en un disc. Per a tot punt $w \in D(a,\rho)$ es satisfà

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{z-w}\, dz.$$

Com que w es troba en l'interior del disc i z en la frontera, el denominador no s'anul·la i aleshores podem derivar sota el signe integral i resulta

$$f^{(n)}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} n! \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, dz.$$

Avaluem en $w = a$ i acotem i resulta

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|z-a|=\rho} \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}} |dz| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho^{n+1}} \int_{|z-a|=\rho} |dz| = \frac{n! M(\rho)}{\rho^n}.$$

♣

D'aquest teorema obtenim com a conseqüència el teorema de Liouville que diu que les úniques funcions enteres acotades són les constants.

Teorema 2.17 (Liouville). *Sigui* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. *Si* f *és acotada, aleshores* f *és constant.*

Demostració. Com que f és holomorfa en 0, en un entorn de l'origen es pot representar com a sèrie de potències (de fet la sèrie serà convergent tot $\mathbb{C}$):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Com abans diem $M(\rho) = \sup_{|z|=\rho} |f(z)|$. Per hipòtesi $M(\rho) \leq M$. Si ara apliquem les desigualtats de Cauchy:

$$|c_n| = \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n} \leq \frac{M}{\rho^n}.$$

Com ρ el podem agafar arbitràriament gran, veiem que per a tota $n \geq 1$, $|c_n| < \varepsilon$, per a tota $\varepsilon > 0$. Es a dir en un entorn de l'origen $f(z) = c_0 = f(0)$. La funció constant c_0 i f coincideixen en un entorn de 0 i per tant pel principi de continuació analítica coincideixen en tot $\mathbb{C}$. ♣

Un coro·lari del teorema de Liouville és el teorema fonamental de l'àlgebra.

Corol·lari 2.18 (Teorema fonamental de l'Àlgebra). *Sigui*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

un polinomi de grau $n \geq 1$. Aleshores P té un zero.

Demostració. Raonarem per reducció a l'absurd. Suposem que P no té zeros. Podem definir la funció holomorfa $f(z) = 1/P(z)$. Com que suposem que P no té zeros, aleshores $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. A més com que $P(z) \to \infty$ si $z \to \infty$, aleshores $f(z) \to 0$ si $z \to \infty$. Això implica que f és acotada. Pel teorema de Liouville, f és constant. Això és contradictori, doncs P no és constant. En aquesta demostració l'únic punt delicat es veure que $P(z) \to \infty$ si $z \to \infty$, però això és clar doncs quan $z \to \infty$:

$$\frac{P(z)}{z^n} = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + a_n \to a_n.$$

Per tant $P(z)$ i z^n és comporten igual quan z és molt gran. ♣

Aquest corol·lari diu que tot polinomi P pren qualsevol valor a, doncs el podem aplicar al polinomi $Q = P - a$. El mateix resultat no és veritat per funcions enteres en lloc de polinomis. Per exemple la funció e^z és entera i no pren el valor 0 mai. És cert, però no ho demostrarem, que tota funció entera pren tots els valors excepte potser un (teorema de Picard).

2.5 Principi del màxim

A continuació estudiarem un fenomen que presenten les funcions holomorfes (de fet és encara més general, les funcions harmòniques també ho presenten i fins i tot les subharmòniques). Es tracta d'estimar el valor de la funció en l'interior d'un obert en termes del que val la funció en la frontera. Ja es veu que el teorema de representació de Cauchy pot ajudar a resoldre aquest problema doncs expressa la funció en l'interior en termes del que val a la frontera. En aquest moment ens interessem per un problema més "light". Només ens interessa comparar la mida de la funció a l'interior i a la frontera.

Teorema 2.19 (Principi del màxim). *Sigui Ω un domini de $\mathbb{C}$ i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sigui $a \in \Omega$ un punt on f pren el màxim, es a dir, $|f(a)| = \sup_\Omega |f|$. Aleshores f és constant.*

Demostració. En primer lloc, demostrarem una igualtat que té interès de per si. Es tracta de la propietat de la mitjana per a funcions holomorfes. Sigui $f \in H(\Omega)$ i $D(a, r) \supset \Omega$. Llavors

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

En efecte això és una conseqüència de la fórmula de Cauchy per discos, doncs si parametritzem la vora del disc $D(a,r)$ per $w(t) = a + re^{it}$, amb $t \in [0, 2\pi]$, aleshores:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(w)}{w-a}\, dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

Si ara en la igualtat de la mitjana prenem mòduls, resulta

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})|\, dt \leq \sup_\Omega |f| = |f(a)|.$$

Per tant totes les desigualtats són igualtats. La darrera desigualtat és una igualtat si, i només si, $|f(z)| = \sup_\Omega |f|$, per a tota $z \in \partial D(a,r)$. Per tant si $|f(a)| = \sup_\Omega |f|$ aleshores $|f| = |f(a)|$ en tot un entorn de a. Per tant el conjunt $A = \{x \in \Omega / \ |f| = \sup_\Omega |f|\}$ és tancat i obert en Ω. Com que $A \neq \emptyset$, llavors $A = \Omega$. Per tant $|f| = ct.$ i aleshores $f = ct.$ ♣

Corol·lari 2.20. *Si $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{H}(\Omega)$ i $\overline{\Omega}$ és compacte, llavors*

$$\sup_\Omega |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|.$$

Demostració. Com que $|f| \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ aleshores $|f|$ assoleix el seu màxim en $\overline{\Omega}$ i a més $\sup_\Omega |f| \geq \sup_{\partial\Omega} |f|$. Per una altra part, pel teorema 2.19, el suprem no es pot assolir en l'interior, es a dir, s'assoleix en la frontera. Aleshores,

$$\sup_\Omega |f| \leq \sup_{\overline{\Omega}} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|.$$

♣

De la mateixa manera que el màxim del mòdul d'una funció holomorfa s'assoleix en la frontera, el seu mínim també, a menys que la funció valgui 0 en algun punt de l'interior, com diu el següent teorema.

Teorema 2.21 (Principi del mínim). *Sigui Ω un domini de $\mathbb{C}$ i tenim $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) \neq 0$ per a tota $z \in \Omega$. Sigui $a \in \Omega$ un punt on f pren el mínim, es a dir, $|f(a)| = \inf_\Omega |f|$. Aleshores f és constant.*

Demostració. La demostració és immediata. Només cal considerar $g(z) = 1/f(z)$. Com que f no és mai 0, llavors $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si a és un mínim de f, llavors a és un màxim de g i per tant podem aplicar el principi del màxim i concloure que g és constant. En aquest cas f és constant ♣

Aquest principi del mínim té també el seu corresponent corol·lari que es demostra com l'anterior.

Corol·lari 2.22. *Si $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{H}(\Omega)$ amb $f(z) \neq 0$ per a tota $z \in \Omega$ i $\overline{\Omega}$ és compacte, llavors*

$$\inf_\Omega |f| = \inf_{\partial\Omega} |f|.$$

2.6 Teorema de l'aplicació oberta

L'objectiu que tenim ara és provar el següent fet: una aplicació holomorfa no constant és una aplicació oberta, és a dir, envia oberts a oberts. Observem que aquest fet implica en particular el principi del màxim doncs no permet que el suprem del mòdul d'una funció holomorfa s'assoleixi en un punt de l'interior. Si en un punt $a \in \Omega$ es pren el màxim de $|f|$ aleshores un petit disc $D(a, r)$ està contingut dins Ω. Si és així, pel teorema de l'aplicació oberta, que encara no hem demostrat, $f(D(a, r))$ és un obert que conté $f(a)$ i per tant hi ha tot un petit disc $D(f(a), r_0)$ entorn de $f(a)$ que està contingut dins de la imatge $f(\Omega)$. Es a dir, $|f(a)|$ no és el suprem de $|f(\Omega)|$.

Per demostrar aquest resultat, necessitem un parell de lemes que tenen un interès independent.

Lema 2.23 (Existència local del logaritme). *Sigui $D \subset \mathbb{C}$ un disc i $f \in \mathcal{H}(D)$ amb $f(z) \neq 0$ per a tot $z \in D$. Aleshores existeix una funció $h \in \mathcal{H}(D)$ (no única) tal que $\exp h = f$ i $h' = f'/f$. És natural dir-li $h = \log f$.*

Demostració. La no unicitat és clara doncs si tenim una funció h amb aquestes propietats, aleshores per qualsevol $k \in \mathbb{Z}$, $h + 2k\pi i$ és una altre solució. Per demostrar l'existència, prenem la funció $f'(z)/f(z)$. Aquesta funció és holomorfa en el disc, perquè f no té zeros. Per tant existeix una primitiva $g \in \mathcal{H}(D)$ amb $g' = f'/f$. Per tant si calculem

$$\frac{d}{dz} f \exp(-g) = f' \exp(-g) + f \exp(-g) \frac{-f'}{f} = 0.$$

Llavors, $f = C \exp g$. Prenem $h(z) = g(z) + a$, on a l'escollim de forma que $e^a = C$. En aquest cas h satisfà les propietats desitjades. ♣

Sota les mateixes hipòtesis, per a tot $\alpha \in \mathbb{C}$ existeix una funció g tal que $g^\alpha = f$. Senzillament, prenem $g = \exp(h/\alpha)$.

La següent proposició és la variant holomorfa del teorema de la funció inversa.

Proposició 2.24. *Suposem que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $f'(a) \neq 0$ per a alguna $a \in \Omega$. Aleshores existeixen entorns oberts V i W de a i $f(a)$ respectivament, i una $g \in \mathcal{H}(W)$, de forma que $f(V) = W$, f és injectiva en V i $g(f(z)) = z$ per a tota $z \in V$.*

Demostració. Sigui $f = u + iv$. Ara, com que

$$0 \neq |f'(a)|^2 = u_x^2(a) + v_x^2(a) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix},$$

pel teorema de la funció inversa real, existeixen conjunts oberts V, W i $g \in \mathcal{C}^1(W)$ tal que $g(f(z)) = z$ per a tota $z \in V$. Per la proposició 1.9 sabem que g és holomorfa i a més $g'(f(z)) = 1/f'(z)$. ♣

Ja estem pràcticament en condicions de demostrar el teorema de l'aplicació oberta. Cal, abans, definir quin és l'ordre d'un zero d'una funció holomorfa.

Definició. Sigui $f \in H(\Omega)$, amb $f \not\equiv 0$. Si $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$, llavors f admet un desenvolupament en sèrie de potències entorn de a de la forma

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{amb } c_k \neq 0.$$

En aquest cas es diu que f té en a un *zero d'ordre* k.

Fixem-nos que en aquest cas f es pot escriure en un entorn de a de la forma $f(z) = (z-a)^k g(z)$, amb $g(a) \neq 0$, senzillament prenent com a $g = \sum_{n \geq k} c_n (z-a)^{n-k}$.

Considerem inicialment el cas particular en que l'aplicació és $\pi_m(z) = z^m$, amb $m > 0$. Volem veure que per a tot obert Ω, $\pi_m(\Omega)$ és obert. Si $0 \in \pi_m(\Omega)$, aleshores 0 és un punt interior de $\pi_m(\Omega)$. En efecte, en aquest cas, $0 \in \Omega$ i tenim $\{|w| < r^m\} \subset \pi_m(\{|z| < r\}) \subset \pi_m(\Omega)$ per algun $r > 0$. Per qualsevol altre $w \in \pi_m(\Omega)$ tal que $w \neq 0$, w és interior pel teorema holomorf de la funció inversa. Per una f qualsevol, el teorema de l'aplicació oberta es segueix del següent:

Teorema 2.25. *Suposem que $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un domini i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no és constant. Sigui m l'ordre del zero de $(f(z) - f(z_0))$ en $z = z_0 \in \Omega$. Aleshores existeix un entorn V de z_0, una $\phi \in \mathcal{H}(V)$ i un $r > 0$ tal que*

- $f(z) = f(z_0) + (\phi(z))^m$, *per a tota $z \in V$.*
- $\phi'(z) \neq 0$ *en tot punt $z \in V$ i $\phi : V \to \{|z| < r\}$ és una bijecció.*

Demostració. Prenem un disc $D \subset \Omega$ de centre z_0 i de radi prou petit de forma que $f(z) \neq f(z_0)$ si $z \in D \setminus \{z_0\}$ (aquest disc sempre existeix, doncs els zeros de funcions holomorfes són aïllats). Podem escriure $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z)$ per a tota $z \in D$ i amb $g(z) \neq 0$ en cap punt del disc. Gràcies a l'existència local del logaritme (lema 2.23), sabem que hi ha una funció $h \in \mathcal{H}(D)$ amb $h^m = g$.

Prenem $\phi(z) = (z - z_0)h(z)$ i ja hem demostrat la primera asserció del teorema. La segona és també certa, doncs $\phi'(z_0) \neq 0$ i $\phi(z_0) = 0$ i podem aplicar el teorema de la funció inversa. ♣

Veiem finalment el teorema que volíem demostrar

Teorema 2.26. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una funció no constant, aleshores $f(\Omega)$ és obert.*

Demostració. Segons el teorema que acabem de provar per a tota $z_0 \in \Omega$, podem escriure $f - f(z_0) = \pi_m(\phi)$ en $z \in V$. Per tant f és una aplicació m a 1 de $V \setminus \{z_0\}$ a $\{0 < |w - f(z_0)| < r^m\}$. En particular, $f(z_0)$ és un punt interior de $f(\Omega)$. ♣

Capítol 3

Propietats Globals

En aquest capítol veurem propietats globals de les funcions holomorfes. Estudiarem el vincle entre les funcions holomorfes i la topologia del domini on estan definides. La variant global del teorema de Cauchy és el que fa de lligam entre aquests dos elements. Veiem que per estendre el teorema de Cauchy al màxim hem de estudiar els camins homologes que és un concepte topológic. Veurem també diverses aplicacions del teorema de Cauchy, com el teorema dels residus que permet calcular amb facilitat moltes integrals o el principi de l'argument i el teorema de Rouche que controlen els zeros de les funcions holomorfes. També veurem com són les singularitats aillades de les funcions holomorfes i estudiarem els desenvolupaments en série entorn d'una singularitat. Per acabar el capítol tornem a lligar la teoria de funcions i la topologia mitjançant diverses caracteritzacions dels dominis simplement connexos.

3.1 Índex i homologia

Hem vist que per a tota funció holomorfa en un disc D, la integral al llarg de tot camí tancat val 0. Volem estendre aquest resultat al màxim i donat un obert Ω identificar els camins al llarg dels quals la integral de tota funció holomorfa en Ω val 0. Per a fer això necessitem introduir el concepte d'índex d'una corba tancada respecte d'un punt. Comencem per un cas molt simple. Ja hem vist que si $\Gamma = \partial D$ orientat positivament,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in D, \text{ (fórmula de Cauchy)} \\ 0 & \text{si } z \notin D, \text{ (teorema de Cauchy).} \end{cases}$$

D'aquesta forma si integrem la funció $\frac{1}{2\pi i(\zeta - z)}$ al llarg de la frontera del disc el resultat és el numero de voltes que dona la corba entorn del punt z. Podem intentar estendre aquest concepte a corbes tancades arbitraries i fins i tot a una "suma de corbes" que introduïm a continuació.

Definició. Si $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ són corbes $\mathcal{C}^1$ a trossos orientades en $\mathbb{C}$, definim la suma formal $\Gamma = m_1\gamma_1 + \ldots + m_n\gamma_n$, on $m_i \in \mathbb{Z}$, i li diem una *cadena*

Dues cadenes Γ_1 i Γ_2 es poden sumar i el resultat és un altre cadena que té com a suma formal de corbes la suma de les anteriors. De la mateixa forma que es pot definir la integral de línia d'una funció al llarg d'una corba, podem definir la integral d'una funció al llarg d'una cadena $\Gamma = m_1\gamma_1 + \cdots + m_n\gamma_n$ de la següent manera

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^n m_i \int_{\gamma_i} f(z)\,dz$$

En el cas particular que una cadena sigui una suma formal de corbes tancades, aleshores es diu un *cicle*.

Considerem un cicle Γ i un punt $z \notin \Gamma$.

Definició. Es diu *índex* del cicle Γ respecte del punt z (o numero de rotació de Γ respecte z) a la quantitat:

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Ja hem vist que en el cas que $\Gamma = \partial D$, aleshores $n(\Gamma, z)$ valia 1 o 0 segons si Γ envoltava z o no. Anem a veure mitjançant uns lemes que aquesta idea intuïtiva del comportament de l'índex s'estén a cicles més complicats.

Lema 3.1. *Sigui $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una corba tancada, amb γ $\mathcal{C}^1$ i $a \in \mathbb{C}$ un punt que no pertany a la imatge de γ. Aleshores*

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \quad \textit{és enter}.$$

Demostració. Considerem la següent funció auxiliar,

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a}\,ds.$$

Aquesta funció satisfà $g(0) = 0$ i $g(1) = n(\gamma, a)2\pi i$. Si calculem la derivada, resulta

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}, \quad \text{per a tota } 0 < t < 1.$$

Amb aquest càlcul veiem doncs que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{-g(t)}(\gamma(t) - a) &= e^{-g(t)}\gamma'(t) - g'(t)e^{-g(t)}(\gamma(t) - a) = \\ &= e^{-g}\Big(\gamma' - \frac{\gamma'}{\gamma - a}(\gamma - a)\Big) = 0. \end{aligned}$$

Per tant $e^{-g(t)}(\gamma(t) - a) = c$. Si avaluem en $t = 0$ i en $t = 1$, resulta $e^{-g(0)}(\gamma(0) - a) = e^{-g(1)}(\gamma(1) - a)$. Com que γ és tancada, llavors $\gamma(0) = \gamma(1)$ i per tant $e^{-g(1)} = 1$, es a dir $g(1) = 2\pi k i$ per algun enter k com volíem veure. ♣

Nota. És un petit exercici comprovar que la demostració es pot estendre al cas de corbes $\mathcal{C}^1$ a trossos. Encara més interessant és observar que enlloc de corbes tancades podem prendre cicles i el resultat es manté cert, doncs si $\Gamma = m_1\gamma_1 + \cdots + m_n\gamma_n$, llavors

$$n(\Gamma, a) = m_1 n(\gamma_1, a) + \cdots + m_n n(\gamma_n, a).$$

Si tots els índexs sobre corbes són enters, com que m_i també són enteres, llavors l'índex d'un cicle també és enter.

Un altre lema que explica com és l'índex d'un cicle respecte d'un punt és el següent:

Lema 3.2. *Si Γ és un cicle, aleshores $n(\Gamma, z)$ és constant en les components de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ i a més $n(\Gamma, z) = 0$ en la component no acotada.*

Demostració. Sigui Ω una de les components de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, prenem $z \in \Omega$. Com que $z \notin \Gamma$, aleshores $n(\Gamma, z) \in H(\Omega)$. Comprovarem que $n'(\Gamma, z) = 0$. Si escrivim el que val,

$$n'(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Ara be, la funció $f(\zeta) = 1/(\zeta - z)^2$ és una funció holomorfa en la variable ζ en un entorn obert $U(\Gamma)$ del cicle Γ i té primitiva holomorfa $-1/(\zeta - z)$. Per tant la integral al llarg de tot camí tancat dins $U(\Gamma)$ de f val zero. En particular $n'(\Gamma, z) = 0$.

També es pot demostrar fàcilment veient que $n(\Gamma, z)$ és una funció contínua quan $z \in \Omega$ i que pren valors enters pel lema previ, per tant és constant.

Veiem finalment que $n(\Gamma, z) = 0$ en la component no acotada. Com que Γ és acotada, $\Gamma \subset B(0, R)$. Per tant si prenem $z \to \infty$,

$$|n(\gamma_i, z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \leq \frac{\text{llarg}(\gamma_i)}{2\pi} \frac{1}{|z| - R} \to 0,$$

on γ_i és qualsevol de les corbes que forma Γ. Com que l'índex $n(\gamma_i, z)$ tendeix cap a 0 i és constant, vol dir que és 0 en tota la component. ♣

A continuació donem una interpretació intuïtiva del que és l'índex. Cal recalcar que en aquest punt no serem rigorosos. Sigui γ una corba $\mathcal{C}^1$ tancada parametritzada per $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$. En aquest cas si $z \notin \gamma$, calculem l'índex $n(\gamma, z)$.

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt.$$

Aquesta última integral estem temptats de calcular-la mitjançant el còmput d'una primitiva i resultaria

$$\begin{aligned} n(\gamma, z) &= \frac{1}{2\pi i}\Big(\log(\gamma(1) - z) - \log(\gamma(0) - z)\Big) = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\Big(\log|\gamma(1) - z| - \log|\gamma(0) - z|\Big) + \\ &+ \frac{1}{2\pi}\Big(\arg(\gamma(1) - z) - \arg(\gamma(0) - z)\Big). \end{aligned}$$

Com que $\gamma(1) = \gamma(0)$, aleshores $\log|\gamma(1) - z| = \log|\gamma(0) - z|$ però l'argument en un extrem i en l'altre no és el mateix doncs si el camí fa una volta entorn del punt, l'argument s'incrementa en 2π, es a dir, que l'índex de fet compta el nombre de voltes que el camí dona entorn del punt z tenint en compte el sentit de gir.

El nostre objectiu es estendre al màxim possible el teorema de Cauchy. Ho farem en la següent direcció. Considerem un obert Ω del pla. Ens preguntem per quins cicles Γ continguts dins Ω es satisfà que la integral al llarg de Γ de qualsevol funció holomorfa en Ω és 0. La noció correcta que respon a aquesta qüestió és la següent.

Definició. Diem que un cicle $\Gamma \subset \Omega$ és *homòleg* a 0 dins Ω, si per a tot punt $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ es satisfà $n(\Gamma, z) = 0$. En aquest cas direm $\Gamma \sim 0$. De la mateixa forma es diu que dos cicles Γ_1 i Γ_2 són *homòlegs* ($\Gamma_1 \sim \Gamma_2$) en Ω si $\Gamma_1 - \Gamma_2$ és homòleg a 0.

Aquesta definició s'ha de comparar amb la definició de camins homòtops. Recordem que dos camins γ_1 i γ_2 en Ω són homòtops ($\gamma_1 \approx \gamma_2$) si existeix una funció contínua $F(t,x) : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ de forma que $F(0,x) = \gamma_1(x)$ i $F(1,x) = \gamma_2(x)$. Nosaltres per conveniència demanarem que per a tot t els camins $F(t,x)$ siguin derivables en la variable $x \in [0,1]$ i $F_x(t,x)$ sigui contínua en $[0,1] \times [0,1]$. Podem enunciar el següent:

Proposició 3.3. *Sigui Ω un obert de $\mathbb{C}$. Si γ_0 i γ_1 són dos camins tancats en Ω i $\gamma_0 \approx \gamma_1$ en Ω, aleshores $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω.*

Demostració. Hem de veure que $\gamma_0 - \gamma_1 \sim 0$ si $\gamma_0 \approx \gamma_1$. Només cal veure que $n(\gamma_0, z) = n(\gamma_1, z)$ per a tota $z \notin \Omega$. Però com que $\gamma_0 \approx \gamma_1$, aleshores existeix una funció F contínua en $[0,1] \times [0,1]$ de forma que $\gamma_0(x) = F(0,x)$ i $\gamma_1(x) = F(1,x)$. Definim la família de camins γ_t com $\gamma_t(x) = F(t,x)$. Tots els camins γ_t estan dins de Ω, de forma que si fixem un $z \notin \Omega$, podem definir l'índex

$$n(\gamma_t, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{F_x(t,x)}{F(t,x) - z}\, dx$$

Com que aquesta funció és una funció contínua en $t \in [0,1]$ i al mateix temps pren valors enters, aleshores és constant. En particular $n(\gamma_0, z) = n(\gamma_1, z)$. ♣

Nota. Observem que a l'inrevés això no és cert. Existeixen camins γ homòlegs a 0 que no són homòtops a 0. Considerem el domini $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{A \cup B\}$ i γ com en la figura 3.1. El camí γ és trivialment homòleg a 0 i intuïtivament és clar que no es pot deformar dins Ω fins al camí constant.

3.2 Teorema de Cauchy

Amb aquesta definició ja podem establir el teorema de Cauchy global.

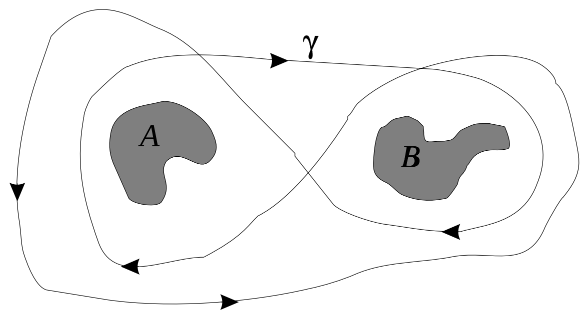

Figura 3.1: Camí γ homòleg a 0

Teorema 3.4 (Cauchy). *Sigui Ω un obert de $\mathbb{C}$ i $f \in H(\Omega)$. Sigui Γ un cicle en Ω homòleg a 0. Aleshores*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Abans de passar a la demostració d'aquest teorema enunciem un lema que té interès per si mateix i que utilitzarem en diverses ocasions.

Lema 3.5 (Cauchy-Pompeiu). *Si $f \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ i $z \in D$ aleshores si diem dm a la mesura de Lebesgue en el disc D,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\frac{dm(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Demostració. Fixem un $z \in D$ i prenem un $\varepsilon > 0$ prou petit de forma que $D(z,\varepsilon) \subset D$. Si apliquem el teorema de Stokes a la forma $g(\zeta)d\zeta = f(\zeta)/(\zeta - z)d\zeta$ en el domini $\Omega_\varepsilon = D\backslash D(z,\varepsilon)$ (un domini on g és de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{C})$) resulta

$$\int_{\Omega_\varepsilon}\frac{\partial g}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\,d\bar\zeta\wedge d\zeta = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(\zeta)\,d\zeta.$$

Com que $d\bar\zeta \wedge d\zeta = 2idxdy$ i $\frac{\partial g(\zeta)}{\partial\bar\zeta} = \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\frac{1}{\zeta - z}$, llavors tenim

$$\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \int_{|\zeta - z| = \varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 2i\int_{\Omega_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\frac{dm(\zeta)}{\zeta - z}.$$

En aquesta darrera igualtat fem tendir $\varepsilon \to 0$. Veiem quin és el límit de cada terme.

$$\int_{|\zeta - z| = \varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_0^{2\pi}\frac{f(z + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\varepsilon i e^{it}\,dt \to 2\pi i f(z).$$

Per una altra part, com que $1/(\zeta - z)$ és integrable respecte a la mesura de Lebesgue en el disc $\zeta \in D(z,\varepsilon)$, llavors:

$$2i\int_{\Omega_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\frac{dm(\zeta)}{\zeta - z} \to 2i\int_D \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\frac{dm(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Per tant en el límit la igualtat es converteix en

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) = 2i \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{dm(\zeta)}{\zeta - z},$$

com volíem veure. ♣

Nota. Observem que si la funció f és holomorfa, aleshores la fórmula de Cauchy-Pompeiu es redueix a la fórmula de Cauchy en el disc, doncs $\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = 0$.

Aquest lema té un corol·lari que és el que utilitzarem en la demostració del teorema de Cauchy global.

Corol·lari 3.6. *Si f és una funció de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{C})$ a suport compacte, aleshores*

$$f(z) = \frac{-1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{dm(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Demostració. En efecte, només cal aplicar la fórmula de Cauchy-Pompeiu en un disc $D(0, R)$ que contingui el suport de f. El primer terme de la fórmula no apareix doncs si $\zeta \in \partial D$, aleshores $f(\zeta) = 0$. ♣

Passem ara a la demostració del teorema de Cauchy global.

Demostració. Sigui H la unió de Γ i del suport de la funció $n(\Gamma, z)$. Com que $n(\Gamma, z) = 0$ en la component no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ es desprèn que H és un compacte. A més en cada component de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ que interseca el complement de Ω l'índex val 0 perquè suposem que $\Gamma \sim 0$ en Ω. Això vol dir que H és un compacte dins de Ω. Sigui ϕ una funció $\mathcal{C}^\infty$ a suport compacte dins de Ω i que a més valgui 1 en un entorn obert del compacte H. Aleshores per a tota $z \in H$ podem aplicar el corol·lari anterior a la funció $\phi(z) f(z)$. Tenim

$$\forall z \in H, \qquad f(z) = \phi(z) f(z) = \frac{-1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dm(\zeta).$$

En particular, com que tot punt $z \in \Gamma$ pertany a H, tenim

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, dz =& \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\frac{-1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dm(\zeta) \right) dz = \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{-1}{\pi} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) f(\zeta) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{\zeta - z} \right) dm(\zeta) = \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) f(\zeta) n(\Gamma, \zeta)\, dm(\zeta). \end{aligned}$$

En aquesta darrera integral si $\zeta \in H$, aleshores $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = 0$ doncs ϕ és constant 1 en un entorn obert de H i si $\zeta \notin H$, aleshores $n(\Gamma, \zeta) = 0$ doncs el suport de $n(\Gamma, \zeta)$ està en H. Per tant la integral és 0 com volíem demostrar. ♣

Aquest teorema té un parell de corol·laris que veiem a continuació

Corol·lari 3.7. *Si Ω és un obert de $\mathbb{C}$ i Γ_1 i Γ_2 són dos cicles homòlegs en Ω, aleshores per a tota funció holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se satisfà*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Demostració. La demostració es fa prenent el cicle $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$ i aplicant en ell el teorema de Cauchy que acabem de demostrar. ♣

Corol·lari 3.8. *Si Ω és un obert de $\mathbb{C}$ i Γ és un cicle en Ω, amb $\Gamma \sim 0$, aleshores per a tota $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i per a tota $z \in \Omega$ se satisfà la fórmula de Cauchy*

$$n(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Demostració. La demostració d'aquest corol·lari és la mateixa que la de la fórmula de Cauchy local. Donada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $z \in \Omega$ definim la funció auxiliar

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } w \neq z \\ f'(z) & \text{si } w = z \end{cases}$$

Aquesta funció g és contínua en tot Ω i holomorfa en $\Omega \setminus \{z\}$. En aquest cas la funció és de fet holomorfa en tot el domini Ω com en la demostració del teorema 2.9 i per tant podem aplicar el teorema de Cauchy, és a dir,

$$\int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\,dw = \int_\Gamma g(w)\,dw = 0$$

Per tant

$$\int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw = f(z)\int_\Gamma \frac{dz}{w - z} = f(z)n(\Gamma, z).$$

♣

3.3 Singularitats aïllades d'una funció holomorfa

A continuació estudiarem com es pot comportar una funció f que sigui holomorfa en un domini $\Omega \setminus \{a_1, a_2, \dots\}$ on a_n és una successió de punts que no té punts d'acumulació en Ω. Farem un estudi local i suposem que les singularitats són aïllades. Podem prendre per a cada singularitat a un disc $D = D(a, \varepsilon)$ de radi prou petit de forma que $D \subset \Omega$ i D no contingui cap més singularitat. Per tant restringim f a aquest disc i estudiem com són les funcions holomorfes en un disc menys el centre. El comportament que pot presentar f és el següent:

- El límit $\lim_{z\to a} f(z)$ existeix i val $L \in \mathbb{C}$. En aquest cas es diu que la singularitat és *evitable*.
- El límit $\lim_{z\to a} f(z)$ és ∞. En aquest cas es diu que f té un *pol* en a.
- El límit $\lim_{z\to a} f(z)$ no existeix. En aquest últim cas diem que f té una singularitat *essencial* en a.

En el primer cas, ja hem vist en el teorema 2.9 que la funció f es pot estendre a una funció holomorfa a tot el disc D, senzillament donant el valor L a $f(a)$. Per tant és aquesta una singularitat fictícia i que no ens farà nosa.

En el segon cas, la funció f no s'anul·la en un entorn de a doncs el límit és ∞. Per tant existeix un $\delta > 0$ encara més petit que ε de forma que en $D(a,\delta)$, f no té zeros. Reduirem l'estudi del comportament de f a aquest disc encara més petit que, abusant de la notació, tornarem a dir D. Considerem la funció g definida en $D\setminus\{a\}$ com $g(z) = 1/f(z)$. Aquesta funció és holomorfa en tot el disc menys potser en l'origen. Però $\lim_{z\to a} g(z) = 0$. Per tant g presenta una singularitat evitable en a. Si estenem la definició de g a tot el disc prenent $g(a) = 0$, aleshores g és holomorfa en el disc i s'anul·la en el centre únicament. Com varem veure en la demostració de la proposició 2.24, podem escriure g com $g(z) = (z-a)^n h(z)$ per a tota $z \in D$ amb $h(z) \neq 0$ en tot punt de D. A n se li deia l'ordre del zero de g en a. Per tant si diem $H(z) = 1/h(z)$, aleshores per a tota $z \in D \setminus \{a\}$ tenim $f(z) = H(z)/(z-a)^n$, on $H \in \mathcal{H}(D)$ i $H(a) \neq 0$. A n se li diu ***l'ordre del pol*** de f en a. Fixem-nos que una funció holomorfa que té límit ∞ quan $z \to a$ només pot anar cap a ∞ com l'invers d'una potència entera de la distància a a. No pot créixer com $|z-a|^{-1/2}$ per exemple.

En l'últim cas, el comportament d'una funció holomorfa entorn del punt a és molt salvatge com posa en evidència la següent proposició:

Proposició 3.9 (Weierstrass). *Una funció holomorfa esdevé arbitràriament pròxima a qualsevol valor complex en tot entorn d'una singularitat essencial*

L'enunciat diu que la imatge per f de tot entorn de a per petit que aquest sigui és dens en $\mathbb{C}$.

Demostració. En cas que no fos cert, existiria un numero complex B i un $\delta > 0$ de forma que $|f(z) - B| > \delta$ per a tota z en un entorn de a. En particular

$$\lim_{z\to a} \frac{z-a}{f(z)-B} = 0.$$

Es a dir, que la funció $g(z) = \frac{z-a}{f(z)-B}$ té una singularitat evitable en a. En un disc D entorn del punt a podem doncs escriure

$$\frac{z-a}{f(z)-B} = H(z)(z-a)^n, \qquad n \geq 1.$$

on H és holomorfa en D i $H(a) \neq 0$. Per tant,

$$f(z) = B + \frac{(z-a)^{(1-n)}}{H(z)}.$$

Per tant, si $n > 1$ f té un pol en a i si $n = 1$ llavors la singularitat es evitable. En qualsevol cas no pot ser essencial. ♣

Nota. Fixem-nos en que si una funció és holomorfa en l'entorn d'un punt a i és acotada en un entorn d'aquest punt, aleshores la singularitat no pot ser un pol, però tampoc pot ser essencial perquè si la funció és acotada, aleshores la imatge no pot ser densa en tot $\mathbb{C}$. Això ens indica que en la definició de singularitat evitable podíem rebaixar la condició. Si la funció és acotada en un entorn de a automàticament té límit en a i es pot estendre a una funció holomorfa.

Amb la noció de singularitat aïllada més entesa, podem formular la següent definició:

Definició. Una funció f definida en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ a valors complexos (eventualment ∞) es diu que és *meromorfa* en Ω si és holomorfa en tot Ω tret d'una successió de singularitats aïllades $\{a_n\}$ i totes les singularitats són de tipus pol.

Un exemple típic de funció meromorfa és el següent: prenem dues funcions holomorfes $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ de forma que $g \not\equiv 0$. En aquest cas la funció f/g té pols en els zeros de g que no es cancel·lin amb els de f. En particular són aïllats com es demana en la definició de funció meromorfa doncs com ja hem vist els zeros de les funcions holomorfes no s'acumulen en l'interior de Ω.

3.4 Teorema dels residus

Passem a estudiar ara la integral de funcions holomorfes al llarg de camins que envolten alguna singularitat de f. Sigui f una funció holomorfa en un obert Ω tret de singularitats aïllades. Sigui a una d'aquestes singularitats (no evitable) de f, amb $D = D(a, \delta) \subset \Omega$ i tal que D no contingui cap altra singularitat. Si prenem C una circumferència qualsevol centrada en a orientada positivament i continguda en D, podem definir el període P de f en a com

$$P = \int_C f(z)\,dz.$$

Fixem-nos en que gràcies al teorema de Cauchy el període està ben definit, es a dir, no depèn de quina circumferència C dins D triem. En efecte si prenem dos circumferències C_1 i C_2 centrades en a dins D, aleshores $C_1 \approx C_2$ en $\Omega \setminus \{a\}$ i per tant són homòlegs i la integral de f al llarg de qualsevol d'elles és la mateixa. En particular la funció $1/(z-a)$ té període $2\pi i$ en el punt a. Per tant si prenem $R = P/(2\pi i)$ aleshores la funció $f - R/(z-a)$ té període 0. A la constant R que fa que la funció $f - R/(z-a)$ tingui període 0 se li diu el *residu* de f en a. Una altre forma d'expressar el mateix és la següent:

Definició. El residu de f en una singularitat aïllada a és l'únic nombre complex R que fa que

$$f(z) - \frac{R}{z-a}$$

tingui una funció primitiva en l'obert $0 < |z-a| < \delta$. Al residu de f en a el denotem per $\operatorname{Res}_{z=a} f$.

Nota. Fixem-nos que si $g(z) = f(z) - R/(z-a)$ té període 0, aleshores la integral al llarg de tot camí tancat en la corona valdrà 0, i per tant podrem definir sense problemes la funció primitiva en la corona.

El càlcul del residu, quan la funció té un pol és senzill. Per exemple si f té un pol d'ordre m en 0, aleshores $f(z) = h(z)/z^m$, on h és holomorfa a l'origen i $h(0) \neq 0$. En aquest cas, si desenvolupem h en sèrie de Taylor entorn de l'origen resulta

$$f(z) = \frac{1}{z^m} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n.$$

Podem comprovar fàcilment que $f(z) - b_{-1}/z$ és una funció amb primitiva i per tant el residu de f en 0 és b_{-1}. El cas de singularitats essencials és més difícil. Ara ja podem enunciar el teorema dels residus.

Teorema 3.10. *Sigui f una funció holomorfa en un obert Ω tret de singularitats aïllades a_j. Sigui Γ un cicle tal que $\Gamma \sim 0$ en Ω i que no passa per cap de les singularitats a_j. Aleshores*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_j n(\Gamma, a_j) \operatorname{Res}_{z=a_j} f(z).$$

Demostració. Sabem que $n(\Gamma, z) = 0$ en la component no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, per tant el suport de $n(\Gamma, z)$ unió Γ és un compacte contingut en Ω. Només hi ha una quantitat finita de singularitats $a_1, \ldots, a_n$ de la funció f que pertanyin al compacte. Sigui $\Omega' = \Omega \setminus \{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. La funció f és holomorfa en Ω' menys en les singularitats $a_1, \ldots, a_n$ i a més $\Gamma \sim 0$ en Ω' doncs $n(\Gamma, a_i) = 0$ si $i > n$. Per tant podem suposar d'entrada que el numero de singularitats inicial és finit (canviant eventualment Ω per Ω'). En aquest cas considerem per a cada singularitat a_i un petit disc D_i centrat en a_i contingut dins Ω' i tal que no contingui cap altra singularitat. Ara ens fixem en el camí $\Gamma' = n(\Gamma, a_1)\partial D_1 + \cdots + n(\Gamma, a_n)\partial D_n$, on les fronteres dels discos ∂D_i estan orientades positivament. Es fàcil veure que $\Gamma \sim \Gamma'$ en $\Omega' \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, doncs per a tot punt $z \notin \Omega'$ es compleix que $n(\Gamma, z) = n(\Gamma', z) = 0$ i per a tot punt $a_1, \ldots, a_n$ es compleix que $n(\Gamma', a_i) = n(\Gamma, a_i)$ degut a com hem definit Γ'. Per tant com que $f \in \mathcal{H}(\Omega' \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$ aleshores pel teorema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} f(z)\, dz = \\ = n(\Gamma, a_1) \operatorname{Res}_{z=a_1} f + \cdots + n(\Gamma, a_n) \operatorname{Res}_{z=a_n} f. \end{aligned}$$

♣

Veiem que un cas particular del teorema dels residus és la fórmula de Cauchy, doncs si tenim una funció holomorfa $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ i Γ un cicle en Ω, aleshores aplicant el teorema dels residus a $f(z) = \frac{h(z)}{z-a}$ amb $a \in \Omega$ resulta que $\operatorname{Res}_{z=a} f = h(a)$ i per tant

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h(z)}{z-a} = n(\Gamma, a) \operatorname{Res}_{z=a} f = n(\Gamma, a) h(a).$$

Un parell de corol·laris d'aquest resultat tenen molta importància en les aplicacions. Un és el principi de l'argument.

Teorema 3.11 (Principi de l'argument). *Si f és meromorfa en Ω amb zeros a_j i pols b_k, aleshores donat un cicle Γ contingut en Ω, $\Gamma \sim 0$, i que no passa per cap a_j o b_k,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_j n(\Gamma, a_j) - \sum_k n(\Gamma, b_k).$$

La suma en a_j i en b_k estan comptades amb multiplicitat. Es a dir cada zero apareix repetit tantes vegades com ordre tingui el zero i de forma anàloga amb els pols.

Observem que el primer terme de la igualtat té una interpretació geomètrica doncs

$$n(f(\Gamma), 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Per tant, una possible interpretació geomètrica del principi de l'argument és que el nombre de voltes entorn de l'origen que fa la imatge d'una corba tancada mesura el nombre de zeros menys el nombre de pols que envolta la corba.

Demostració. Prenem un zero a de f d'ordre h. Anem a calcular el residu de f'/f en a. Si f té un zero d'ordre h, f es pot escriure en un entorn de a de la forma $f(z) = (z-a)^h g(z)$ on g és holomorfa en un entorn de a i $g(a) \neq 0$. En aquest cas $f'(z) = h(z-a)^{h-1}g(z) + (z-a)^h g'(z)$. Per tant $f'/f = h/(z-a) + g'(z)/g(z)$. Si calculem el residu en a, $\mathrm{Res}_{z=a}\, f'/f = h$. Si en canvi f té un pol d'ordre h en a, aleshores $f = (z-a)^{-h}g(z)$ on g és com abans holomorfa en un entorn de a i $g(a) \neq 0$. Per tant en aquest cas en un entorn de a, $f'(z)/f(z) = -h/(z-a) + g'(z)/g(z)$. Es a dir $\mathrm{Res}_{z=a}\, f'/f = -h$. Per tant si apliquem el teorema del residu a la funció f'/f i al cicle Γ obtenim el resultat desitjat. ♣

Com a conseqüència del principi de l'argument, es demostra el següent corol·lari que es coneix com a teorema de Rouche i que com veurem és molt pràctic a l'hora de calcular el nombre de zeros de funcions analítiques.

Corol·lari 3.12 (Teorema de Rouche). *Si $\Gamma \sim 0$ en Ω i el camí és tal que $n(\Gamma, z) = 0$ ó $n(\Gamma, z) = 1$ per a tot $z \in \Omega$ tal que $z \notin \Gamma$, aleshores per a qualsevol $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ amb $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ en $z \in \Gamma$, es compleix que f i g tenen el mateix numero de zeros encerclats per Γ.*

En l'enunciat del teorema de Rouche s'entén que la regió que encercla Γ són els punts de Ω tals que $n(\Gamma, z) = 1$.

Demostració. De la desigualtat $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ ja podem deduir que ni f ni g tenen zeros en Γ. A més $|g(z)/f(z) - 1| < 1$ en Γ i per tant si considerem la funció meromorfa $F = g/f$ resulta que la imatge $F(\Gamma)$ de Γ per F es troba continguda dins del disc de centre 1 i radi 1. Llavors $n(F(\Gamma), 0) = 0$. Si apliquem el principi de l'argument a F, tenim que F té tants pols com zeros encerclats per Γ. Ara be els pols de F venen dels zeros de f i els zeros de F dels zeros de g i ja tenim el que volíem veure. ♣

3.5 Dominis simplement connexos

En el disc, l'aplicació del teorema de Cauchy o del teorema dels residus és particularment simple, doncs tot cicle contingut en D és automàticament homòleg a 0. Veiem com són els dominis que tenen aquesta propietat.

Definició. Diem que un domini Ω és *simplement connex* si $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ té una única component connexa.

La següent proposició ens indica que aquests dominis tenen les mateixes propietats que tenen els discos. De fet, més endavant, amb el teorema de Riemann entendrem el perquè d'aquesta analogia.

Proposició 3.13. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini. Són equivalents:*

1. *Ω és simplement connex.*
2. *Per a tota $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, existeix una primitiva $F \in \mathcal{H}(\Omega)$, amb $F' = f$.*
3. *Per a tot cicle Γ contingut en Ω, $\Gamma \sim 0$.*
4. *Per a tota funció holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i per a tot cicle $\Gamma \subset \Omega$ es satisfà $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.*
5. *Per a tota funció $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) \neq 0$ en tot punt $z \in \Omega$, existeix una altra funció $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ de forma que $e^g = f$.*

Demostració. Veure que les condicions 2,3,4 i 5 són equivalents és senzill. En primer lloc si es satisfà 3, aleshores pel teorema de Cauchy 4 és cert, es a dir, la integral al llarg de tot camí tancat és zero. En aquest cas podem definir la primitiva de tota funció holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ de la següent manera: fixem un z_0 arbitrari en Ω, aleshores per a tota $z \in \Omega$, sigui γ_z un camí contingut en Ω que uneix z_0 i z. Definim $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$. Com que la integral al llarg de camins tancats val 0, aleshores F és independent del camí triat γ_z i satisfà $F'(z) = f(z)$. Es a dir es compleix 2. Veiem ara que si tota funció holomorfa té primitiva, llavors existeix el logaritme de les funcions que no s'anul·len. Sigui $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, amb $f(z) \neq 0$ per a tota $z \in \Omega$. Definim la funció $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ com $h = f'/f$. Existirà una funció g_0 tal que $g_0' = h$. En aquest cas $(fe^{-g_0})' = f'e^{-g_0} - fe^{-g_0}f'/f = 0$. Es a dir $f = Ke^{g_0}$. Triem c, de forma que $e^c = K$ i aleshores prenent $g(z) = g_0(z) + c$ tenim que $e^g = f$. Hem vist doncs que 2 implica 5. Veiem finalment que 5 implica 3. Hem de comprovar que donat un cicle tancat $\Gamma \subset \Omega$ i un punt $z \notin \Omega$, aleshores $n(\Gamma, z) = 0$. Però, en efecte, si $z \notin \Omega$, aleshores $f(\zeta) = \zeta - z$ és una funció holomorfa en Ω que no té zeros en Ω. Per tant existeix una funció $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^{g(\zeta)} = (\zeta - z)$. En particular $g'(\zeta) = 1/(\zeta - z)$. Llavors,

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g'(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Hem vist que les darreres quatre condicions eren totes equivalents entre si. Resta per demostrar que 1 és equivalent a qualsevol d'elles. Comencem per observar que trivialment 1 implica

3 doncs per tot cicle $\Gamma \subset \Omega$, $n(\Gamma, z)$ és constant en cada component connexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ i a més és 0 en la no acotada. Com que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ només té una component, aleshores és la no acotada i $n(\Gamma, z) = 0$ per tot punt $z \notin \Omega$. L'altre implicació és més delicada, doncs d'una propietat analítica volem extreure implicacions topològiques. Veiem que 2 implica 1. Suposem que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ té dues components com a mínim i arribarem a contradicció. Podem posar $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega = H \cup K$, on H és tancat $\infty \in H$ i K és un compacte disjunt de H. En aquest cas si diem $W = \Omega \cup K$, tenim que W és obert ($W = \mathbb{C}^\infty \setminus H$) i K és un compacte contingut dins W. Sigui ϕ una funció $\mathcal{C}^\infty$ amb suport contingut dins W i tal que $\phi \equiv 1$ en un petit entorn obert de K. Prenem un $a \in K$, apliquem la fórmula de Cauchy-Pompeiu (el corol·lari 3.6) i resulta

$$1 = \phi(a) = \frac{-1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{dm(\zeta)}{\zeta - a} = \frac{-1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{dm(\zeta)}{\zeta - a}.$$

Com $1/(z-a)$ és una funció holomorfa en Ω, per la hipòtesi 2 existeix una funció holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f'(\zeta) = 1/(\zeta - a)$. Per tant resulta que

$$1 = \frac{-1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} f'(\zeta)\, dm(\zeta).$$

Si fem dos integracions per part tenim

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} f'(\zeta)\, dm(\zeta) &= -\int_{\Omega} \frac{\partial^2 \phi(\zeta)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} f(\zeta)\, dm(\zeta) = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \phi(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\, dm(\zeta) = 0. \end{aligned}$$

Ja hem arribat doncs a una contradicció ♣

3.6 Sèries de Laurent

Hem vist que tota funció holomorfa en un disc admet desenvolupament en sèrie de potències entorn del centre del disc. Però si la funció és holomorfa en un domini com una corona aquest resultat ja no es vàlid. Hem de considerar desenvolupaments més generals. Considerem una sèrie de la forma

$$b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n} + \cdots$$

Si fem el canvi $z = 1/w$ observem que aquesta sèrie és convergent en $|z| > R$ i a més és uniformement convergent en $|z| \geq \rho$ per a tota $\rho > R$ i defineix una funció holomorfa en $|z| > R$. Si prenem sèries de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

aleshores la part amb $n \geq 0$ és convergent en una regió de la forma $|z| < R_2$ i la part amb $n < 0$ convergeix en $|z| > R_1$. Si es dona el cas que $R_1 < R_2$, llavors defineix una funció holomorfa en la corona. De forma recíproca volem veure que tota funció holomorfa f en un anell $C = \{w;\ R_1 < |w-a| < R_2\}$ admet un desenvolupament en sèrie amb potencies positives i negatives de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z-a)^n.$$

Aquest desenvolupament es diu desenvolupament en sèrie de Laurent. Anem a veure com fer-ho. Prenem una funció $f \in \mathcal{H}(C)$. La descomposem en suma de dues f_1 i f_2 on f_1 serà holomorfa en $|z-a| < R_2$ i f_2 ho serà en $|z-a| > R_1$.

Com a funció f_1 prenem

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

on r és tal que $|z-a| < r < R_2$. Degut al teorema de Cauchy la integral que defineix f_1 no depèn de la tria que fem de r sempre que estigui sota la condició $|z-a| < r < R_2$. A més la integral defineix una funció holomorfa en tot el disc $D(a, R_2)$, no només en la corona.

Com a funció f_2 prenem

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

on $R_1 < r < |z-a|$. Com abans la integral no depèn de la r que triem en la definició i a més la integral defineix una funció f_2 holomorfa en el complementari del disc $D(a, R_1)$.

Fixat $z \in C$ prenem un cicle $\Gamma = \partial D(a, r_1) - \partial D(a, r_2)$, on $R_1 < r_1 < |z-a| < r_2 < R_2$. Està clar que $n(\Gamma, z) = 1$ i a més $\Gamma \sim 0$ en C. Per tant si apliquem el teorema dels residus

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = f_1(z) + f_2(z).$$

Ara el que farem es trobar una expressió en sèrie de potències per f_1 i un altre per f_2. Com que f_1 és holomorfa en $D(a, R_2)$, admetrà un desenvolupament en sèrie potències $(z-a)^k$ amb $k \geq 0$. En canvi f_2 que és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus D(a, R_1)$ té un desenvolupament en sèrie de potències $(z-a)^k$ amb $k < 0$. Comencem per f_1:

$$f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n,$$

on $A_n = f_1^{(n)}(a)/n!$, es a dir,

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

Com veiem la singularitat en la integral és en el punt a, per tant podem triar com a r qualsevol valor entre $R_1 < r < R_2$ i no canvia el valor de la integral.

Per a desenvolupar f_2 en sèrie de potències farem el canvi $\zeta = a + 1/\zeta'$ i $z = a + 1/z'$. Sota aquest canvi la circumferència $|\zeta - a| = r$ es transforma en $|\zeta'| = 1/r$ i per tant tenim

$$f_2(a + 1/z') = \frac{-1}{2\pi i} \int_{|\zeta'|=1/r} \frac{z'}{\zeta'} \frac{f(a + 1/\zeta')d\zeta'}{\zeta' - z'}.$$

Així expressada és una funció holomorfa en z' en el disc $|z'| < 1/r$ i amb desenvolupament en sèrie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} B_n {z'}^n$, on

$$B_n = \frac{-1}{2\pi i} \int_{|\zeta'|=1/r} \frac{f(a + 1/\zeta')d\zeta'}{{\zeta'}^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=r} f(\zeta)(\zeta - a)^{n+1} d\zeta.$$

Finalment doncs, hem vist que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z - a)^n,$$

on els A_n tenen tots l'expressió

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

que com ja hem vist no depèn de la $R_1 < r < R_2$. Observem que en aquest desenvolupament, A_{-1} és exactament el residu, doncs si considerem $f - A_{-1}/(z - a)$, la resta té primitiva entorn de a.

Capítol 4

Aproximació i convergència de funcions holomorfes

Volem estudiar propietats de les funcions holomorfes lligades al procés de pas al límit. Es a dir, problemes com comprovar si el límit de funcions holomorfes es holomorf i donar condicions de compacitat, que ens assegurin que tota successió de funcions té una parcial convergent. També veurem com es preserven els zeros i la injectivitat de les funcions per pas al límit i finalment estudiarem resultats de densitat de subspais de funcions holomorfes.

4.1 Límit de funcions holomorfes

El resultat més bàsic de tots és el que ens permet esbrinar sota quines condicions el límit de funcions holomorfes és holomorf. És l'anomenat teorema de Weierstrass.

Teorema 4.1 (Teorema de Weierstrass). *Sigui $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ una successió de funcions holomorfes en Ω i suposem que per a tot compacte $K \subset \Omega$, $f_n|_K \to f|_K$ uniformement en K. Aleshores f és holomorfa en Ω i a més $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformement sobre cada compacte de Ω.*

Aquest teorema ens diu que la convergència uniforme sobre tots els compactes (que és més feble que la convergència uniforme en Ω però més forta que la convergència puntual) és suficient per assegurar la convergència cap a una funció holomorfa. A més això arrossega la convergència de les derivades. Una altre observació que és útil és que la convergència uniforme sobre un compacte K es pot substituir per l'aparentment més feble convergència uniforme sobre ∂K pel principi del màxim.

Demostració. Sigui R un rectangle contingut en Ω. Com que ∂R és compacte en Ω, aleshores $f_n|_{\partial R} \to f|_{\partial R}$ i per tant

$$0 = \int_{\partial R} f_n(z)\, dz \to \int_{\partial R} f(z)\, dz \qquad \text{quan } n \to \infty.$$

Aleshores la integral de f al llarg de la frontera de qualsevol rectangle contingut en Ω val 0. Aquesta era una de les condicions que varem provar per assegurar que f era holomorfa (el teorema de Morera). Queda per veure, que en aquest cas $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformement sobre compactes. Inicialment ho veurem per discos tancats $\overline{D} \subset \Omega$. En efecte si $D = D(a,r)$ i $\overline{D} \subset \Omega$, existeix un $R > r$ de forma que $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$. En aquest cas apliquem la fórmula de Cauchy a $f_n^{(k)} - f^k$ i obtenim que per a tota $z \in \overline{D(a,r)}$,

$$f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-a|=R} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw.$$

Si és així, aleshores per a tota $z \in \overline{D(a,r)}$,

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k! M_n R}{(R-r)^{k+1}},$$

on $M_n = \sup\{|f_n(z) - f(z)|,\ |z-a| = R\}$. Per hipòtesi $M_n \to 0$ i per tant $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformement en $\overline{D(a,r)}$. Finalment si K no és un disc i és un compacte arbitrari en Ω, existeixen discos $\{D_i\}_{i=1}^n$ tals que $\overline{D_i} \subset \Omega$ i tals que $K \subset D_1 \cup \cdots \cup D_n$. Com $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformement en cada D_i, aleshores $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformement en K. ♣

Veiem que pel fet que les funcions f_n són analítiques el seu límit f no només hereta l'analiticitat sinó d'altres propietats menys intuïtives. En aquest sentit podem enunciar el teorema de Hurwitz:

Teorema 4.2 (Teorema de Hurwitz). *Sigui Ω un obert de $\mathbb{C}$ i $\{f_n\}$ una successió de funcions holomorfes en Ω, tals que $f_n \to f$ uniformement sobre compactes. Si $f \not\equiv 0$ i tenim un disc $\overline{D} \subset \Omega$ de forma que $f(z) \neq 0$ si $z \in \partial D$, aleshores existeix un N gran de forma que per a tota $n \geq N$, f_n i f tenen el mateix nombre de zeros en D.*

Demostració. Pel fet que $f_n \to f$ uniformement sobre compactes, sabem pel teorema de Weierstrass que f és holomorfa en Ω. Per a comparar el nombre de zeros de f_n i de f en $D = D(a,r)$ utilitzarem el teorema de Rouche. Anem a veure que es satisfan les hipòtesis. Per a començar, com que $f(z) \neq 0$ si $z \in \partial D$, resulta que $\delta = \inf\{|f(z)|;\ |z-a| = r\} > 0$. A més com $f_n \to f$ uniformement sobre compactes, llavors existeix un n prou gran de forma que per a tot $z \in \partial D$ es compleix $|f(z) - f_n(z)| < \delta/2$. En aquest cas, $|f(z) - f_n(z)| < |f(z)|$ per a tot $z \in \partial D$ i pel teorema de Rouche f i f_n tenen el mateix nombre de zeros. ♣

Veiem un parell de corol·laris del teorema de Hurwitz:

Corol·lari 4.3. *Si Ω és un domini i f_n és una successió de funcions holomorfes en Ω que no s'anul·len mai, convergents uniformement sobre compactes cap a $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, aleshores o be $f \equiv 0$ en Ω o f no s'anul·la mai.*

Aquest corol·lari no requereix demostració. Un altre resultat que utilitzarem més endavant i que també és una conseqüència del teorema de Hurwitz és el següent:

Corol·lari 4.4. *Si Ω és un domini en $\mathbb{C}$ i $f_n \in H(\Omega)$ és una successió de funcions holomorfes que convergeixen uniformement sobre compactes cap a una funció holomorfa f i suposem que f_n són injectives, aleshores o be f és també injectiva o és constant.*

Demostració. Agafem un $z_0 \in \Omega$ qualsevol. Comprovarem que o be $f \equiv f(z_0)$ o be $f(z) \neq f(z_0)$ per a tota altre $z \in \Omega$, $z \neq z_0$. Com això serà cert per a tota z_0 haurem demostrat el corol·lari. En el domini $\Omega \setminus \{z_0\}$ les funcions $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$ no tenen zeros. A més $g_n(z) \to g(z) = f(z) - f(z_0)$. Sabem pel corol·lari al teorema de Hurwitz que o be $g \equiv 0$, i en aquest cas $f \equiv f(z_0)$ o be $g(z) \neq 0$ en tot punt de $\Omega \setminus \{z_0\}$ i per tant per a tota $z \in \Omega,\ z \neq z_0$ es satisfà $f(z) \neq f(z_0)$ com volíem veure. ♣

4.2 Densitat dels polinomis

Un altre tipus de resultats que tenen relació amb la convergència de funcions holomorfes són els resultats de compacitat. Ja sabem que tota successió de funcions reals equicontinues i equiacotades en un compacte admet una parcial uniformement convergent en el compacte (teorema de Azcoli). Veurem que per funcions holomorfes podem afeblir les hipòtesis i de la condició de equiacotació deduirem la equicontinuitat. Primer de tot donem una definició:

Definició. Un conjunt $\Phi \subset \mathcal{H}(\Omega)$ és una família normal si tota successió $\{f_n\}$ de Φ, té una parcial convergent uniformement sobre compactes en Ω.

El resultat anàleg al teorema de Azcoli en variable complexa és el següent

Teorema 4.5 (Teorema de Montel). *Sigui Ω un obert de $\mathbb{C}$ i sigui Φ una família de funcions holomorfes en Ω ($\Phi \subset \mathcal{H}(\Omega)$) amb la següent propietat: Per a tot compacte $K \subset \Omega$, existeix una constant $M_K > 0$ de forma que per a tota $f \in \Phi$, $|f(z)| < M_K$ per a tota $z \in K$. En aquest cas Φ és una família normal.*

Demostració. Prenem $\{f_n\}$ una successió continguda en Φ. Hem de demostrar que existeix una successió parcial que convergeix uniformement sobre compactes. Prenem una successió de compactes K_n de forma que $\cdots \subset K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1} \subset K_{n+1} \subset \cdots$ i tal que la unió $\cup_{n=0}^{\infty} K_n = \Omega$. Una possibilitat es prendre

$$K_n = \{z \in \Omega;\ d(z, \Omega^c) \geq 1/n\} \cap \overline{B(0,n)}.$$

Ara comencem per K_1. En primer lloc $\{f_n\}$ és una successió acotada en K_1. Com que també f_n és acotada en K_2, aleshores per les desigualtats de Cauchy tenim f_n' és acotada en K_1 i per tant f_n no només és equiacotada sinó que a més és equicontínua. Veiem això amb més detall. Fixem un $\varepsilon > 0$ i prenem un $\delta > 0$, de forma que $B(z, 2\delta) \subset K_2$ per a tota $z \in K_1$. A continuació triem δ' de forma que $D(z, \delta') \subset K_3$ si $z \in K_2$. En aquest cas per les desigualtats de Cauchy veiem que $|f_n(z)| \leq N = M_{K_3}/\delta'$ per a tot $z \in K_2$.

Si z i w són punts de K_1 tals que $|z - w| < \delta$, aleshores $f_n(z) - f_n(w) = \int_z^w f_n'(\zeta)\, d\zeta$. Com tot l'interval $[z, w] \subset K_2$ sabem que $|f_n'(\zeta)| < N$ i per tant $|f_n(z) - f_n(w)| \leq N\delta$. Agafant el δ prou petit, tenim que $|f_n(z) - f_n(w)| \leq \varepsilon$. El δ que hem triat no depèn de n, es a dir, $\{f_n\}$ és equicontínua. Llavors, utilitzem el teorema d'Azcoli que assegura l'existència d'una parcial $\{f_n^1\}$ de f_n tal que convergeix uniformement en K_1. Prenem aquesta parcial i repetim l'argument amb el compacte de sortida K_2 enlloc de K_1. En aquest cas hi haurà una parcial $\{f_n^2\}$ de $\{f_n^1\}$ convergent uniformement sobre K_2. Tornem a repetir el procés i obtenim una successió de successions $\{\{f_n^1\}, \{f_n^2\}, \dots\}$, cadascuna és una parcial de l'anterior i $\{f_n^i\}$ és convergent en K_i. Prenem la successió $\{g_j\} = \{f_1^1, f_2^2, f_3^3, \dots\}$. Aquesta successió a partir de la posició j és una parcial de f_n^j i per tant convergirà uniformement en K_j. A més veient els seus elements, comprovem que és una successió parcial de l'original $\{f_n\}$. Ara si prenem qualsevol compacte $K \subset \Omega$, existirà un n prou gran de forma que $K \subset K_n$ i per tant $\{g_n\}$ serà convergent uniformement en K. Hem demostrat doncs el teorema. ♣

Aquest teorema és útil en la construcció de funcions holomorfes com veurem en la demostració del teorema de Riemann més endavant, però té l'inconvenient de que no és un resultat constructiu. No diu quina és la parcial convergent i molt menys qui és el límit.

Un altre tipus de resultat és el de densitat de subspais de funcions holomorfes. Sabem que tota funció holomorfa en un disc es pot aproximar per polinomis (desenvolupament de Taylor) i que tota funció holomorfa en una corona l'aproximem per funcions racionals amb un pol en el centre de la corona (el desenvolupament de Laurent). Una pregunta natural a fer-se és si aquest és un resultat general, es a dir, si tota funció holomorfa en un obert Ω es pot aproximar per funcions racionals amb pols fora del domini. El resultat que veiem a continuació ens diu que això és així.

Teorema 4.6 (Teorema de Runge). *Suposem que K és un compacte en $\mathbb{C}$ i $\{a_j\}$ és una successió de punts en $\mathbb{C}^\infty$ de forma que en cada component de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ hi ha com a mínim un punt de la successió. Aleshores per a tota funció holomorfa en K (això vol dir holomorfa en un algun entorn obert del compacte), existeix una successió de funcions racionals $\{R_n\}$ amb pols només algun dels $\{a_j\}$ i de forma que $R_n \to f$ uniformement en K. Dit d'una altra forma, les funcions racionals amb pols en $\{a_j\}$ són denses dins de les funcions holomorfes en K amb la convergència uniforme.*

Nota. Un dels punts a_j de l'enunciat pot ser el punt de l'infinit. Una funció racional amb pols només el punt de l'infinit s'entén que és un polinomi.

Com a corol·lari immediat s'obté

Corol·lari 4.7. *Si $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ és connex (recordem que això també s'expressa dient que K és simplement connex), aleshores tota funció holomorfa $f \in \mathcal{H}(K)$ pot ser aproximada uniformement en K per polinomis.*

Demostració. La demostració del corol·lari resulta d'aplicar el teorema, prenent com a successió només el punt de l'infinit, i.e. $\{a_j\} = \{\infty\}$. ♣

Abans de passar a la demostració del teorema fem un parell d'observacions. En primer lloc, veiem que el teorema no es pot millorar en el sentit que si hi ha cap component de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ que no conté cap punt de la successió, aleshores podem construir una funció holomorfa en K que no es pot aproximar per funcions racionals amb pols en $\{a_j\}$. En efecte, suposem que V és una component acotada de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ que no conté cap punt a_j (el cas d'una component no acotada es fa de forma similar). Prenem $a \in V$ i diem $d = \sup_{z\in K} |z - a|$. La funció $f(z) = 1/(z - a)$ és holomorfa en K. Veiem que no es pot aproximar per funcions racionals amb pols en $\{a_j\}$. Si es pogués existiria una funció racional R amb pols en $\{a_j\}$ de forma que

$$\left|\frac{1}{z-a} - R(z)\right| < 1/d \quad \text{si } z \in K.$$

Es a dir, $|(z-a)R(z)-1| < 1$ en K, en particular en ∂V. Com la funció $g(z) = (z-a)R(z)-1$ és holomorfa en V (R només te pols en les altres components), llavors com V és acotat podem aplicar el principi del màxim i veiem que $|g(z)| < 1$ per a tota $z \in V$. Això és una contradicció, doncs $g(a) = 1$.

Una segona observació, és que el numero de components possibles que pot tenir el complement d'un compacte és numerable, doncs en cada component hi ha una petita bola i per tant hi ha un numero de coordenades racionals dels que tant sols hi ha una quantitat numerable. El cas d'una quantitat infinita numerable de components pot existir. Considerem per exemple el cas del disc unitat foradat: $\overline{D(0,1)} \setminus \{\cup_{n=10}^{\infty} D_n\}$, on $D_n = \{z \in \mathbb{C};\ |z - n/(n+1)| < 2^{-n}\}$.

Passem, doncs a la demostració del teorema de Runge,

Demostració. Volem veure que les racionals amb pols en a_j són denses dins de l'espai de les funcions holomorfes en K. Unes funcions particulars holomorfes en K són les de la forma $1/(z-a)^m$, on $a \notin K$. Primer demostrarem que qualsevol d'aquesta forma la podem aproximar per funcions racionals amb els pols prefixats i després veurem que qualsevol funció holomorfa $f \in \mathcal{H}(K)$ s'aproxima per suma de funcions del tipus indicat ($1/(z-a)^m$, $a \notin K$). Considerem doncs inicialment el conjunt $A \subset \mathbb{C} \setminus K$ format pels punts $a \in \mathbb{C} \setminus K$ tals que les funcions

$$\frac{1}{(z-a)^k},\ k = 1, 2, \ldots$$

es poden aproximar uniformement en K per funcions racionals amb pols en $\{a_j\}$. Veurem que aquest conjunt $A \subset \mathbb{C} \setminus K$ és tancat i obert. Per tant serà la unió d'unes quantes components connexes de $\mathbb{C} \setminus K$. Com que en cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus K$ hi ha un element a_j de la successió i aquest a_j pertany a A trivialment, aleshores A és tot $\mathbb{C} \setminus K$. Demostrem que A és tancat i obert. Si $a_n \in A$ i $a_n \to a \in \mathbb{C} \setminus K$, aleshores la funció $1/(z-a)^k$ s'aproxima uniformement en K per funcions del tipus $1/(z-a_n)^k$ i aquestes a la seva vegada, com que suposem que $a_n \in A$, s'aproximen per funcions racionals R amb pols en $\{a_j\}$. Es a dir la funció $1/(z-a)^k$ té funcions racionals arbitràriament pròximes amb els pols en la successió prescrita. Això per definició vol dir que $a \in A$. Hem vist que A és un tancat de $\mathbb{C} \setminus K$. Veiem que és un obert. Si $a \in A$, aleshores per a tot altre punt $b \in \mathbb{C} \setminus K$ que es trobi a prop de a (l'agafem tal que $|a-b| < d(a,K)$) podem escriure

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\frac{b-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{b-a}{z-a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b-a)^k}{(z-a)^{k+1}}, \quad \forall z \in K.$$

Es a dir, podem aproximar $1/(z-b)$ per una combinació lineal de funcions del tipus $1/(z-a)^k$. Com que $a \in A$, cadascuna d'elles es pot aproximar per funcions racionals i de resultes d'això també podem aproximar $1/(z-b)$ per funcions racionals amb pols en $\{a_j\}$. Un cop aproximem

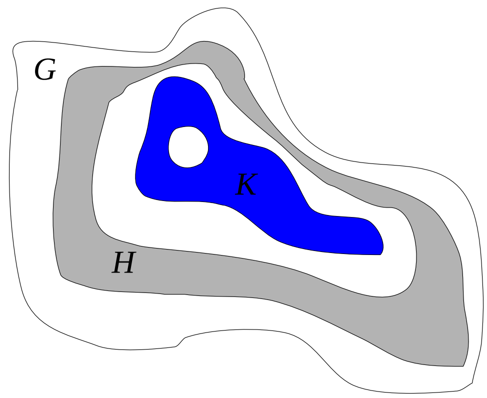

Figura 4.1: El conjunt H

$1/(z-b)$ les seves potències també s'aproximen i per tant hem vist que $b \in A$. Es a dir que A és obert. Hem comprovat doncs que $A = \mathbb{C} \setminus K$, es a dir que tota funció de la forma $1/(z-a)$ amb $a \in \mathbb{C} \setminus K$ es pot aproximar per funcions racionals amb pols en $\{a_j\}$.

Veiem ara que qualsevol funció holomorfa $f \in \mathcal{H}(K)$ es pot aproximar uniformement per una combinació lineal de funcions del tipus $1/(z-b_i)$ amb $b_i \notin K$. Sigui $f \in \mathcal{H}(K)$, això vol dir que existeix un obert (que no és el mateix per a totes les f) de forma que $K \subset G$ i $f \in \mathcal{H}(G)$. Sigui ϕ una funció $\mathcal{C}^\infty$ a suport compacte contingut dins de G i tal que $\phi \equiv 1$ en un entorn obert de K. Sabem per la fórmula de Cauchy-Pompeiu que per a tota $z \in K$

$$f(z) = f(z)\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{\partial(\phi f)}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{dm(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_G f(\zeta)\frac{\partial\phi}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{dm(\zeta)}{\zeta - z}.$$

En aquesta darrera integral no cal integrar en tot G doncs el suport de $\frac{\partial\phi}{\partial\bar{\zeta}}$ es un conjunt $H \subset G$ que no conté el compacte K, de fet està a distància positiva d'ell, veieu la figura 4.1. La integral la podem aproximar per una suma de Riemman trencant la base H en petits quadrats. Refinant la partició podem aconseguir una aproximació arbitràriament bona.

$$\int_H f(\zeta)\frac{\partial\phi}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{dm(\zeta)}{\zeta - z} \approx \sum_{k=0}^{n} f(\zeta_i)\frac{\partial\phi}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta_i)\frac{A(\zeta_i)}{\zeta_i - z},$$

on tots els $\zeta_i \in H$ i $A(\zeta_i)$ és l'àrea del petit rectangle que conté ζ_i de la partició. Es a dir finalment hem vist que

$$f(z) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{c_i}{\zeta_i - z}, \quad \text{amb } \zeta_i \notin K,\ z \in K$$

Com que $1/(z-\zeta_i)$ es pot aproximar per funcions racionals amb els pols desitjats, aleshores f també. ♣

Capítol 5

Aplicacions conformes

Ja hem vist alguns lligams entre les funcions i la topologia del domini on estan definides. Anem a aprofondir en aquesta linia i veurem quan dos dominis són equivalents des del punt de vista de la teoria de funcions. Estudiarem un cas particularment senzill i interesant que es el dels dominis simplement connexos i demostrarem el teorema de Riemann. També calcularem el grup d'automorfismes de diversos dominis.

5.1 Definicions i objectius

Ja varem veure que les funcions holomorfes amb derivada no zero es podien entendre com aplicacions de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ que preservaven els angles i l'orientació. Aquestes aplicacions es diuen també aplicacions conformes. Té un interès molt especial estudiar l'existència de les aplicacions conformes i bijectives entre dos dominis Ω_1 i Ω_2 de $\mathbb{C}$. Pensem que si sabem com són les funcions holomorfes del domini Ω_1 sabem com són les del domini Ω_2, senzillament composant amb l'aplicació bijectiva i holomorfa (de vegades se'n diuen *biholomorfes* a les aplicacions així). Es a dir, la teoria de funcions sobre Ω_2 queda reduïda a l'estudi de les funcions sobre Ω_1. Dos dominis així no es distingeixen des del punt de vista de les funcions holomorfes. Per tant se'ls hi dona un nom.

Definició. Dos dominis Ω i Ω' en $\mathbb{C}$ són *conformement equivalents* si existeix una aplicació $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ i bijectiva $\phi : \Omega \longleftrightarrow \Omega'$.

Observem que en aquesta cas l'aplicació inversa ϕ^{-1} és holomorfa també.

Seria molt bo si, donats dos dominis, poguéssim reconèixer tot d'una si són conformement equivalents o no, especialment si ho poguéssim esbrinar només mirant característiques de caire geomètric del domini. El teorema fonamental en aquest camp és el teorema de Riemann:

Teorema 5.1 (Teorema de Riemann). *Si $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ és simplement connex aleshores Ω és conformement equivalent a un disc D.*

Observem que tot $\mathbb{C}$ no pot ser equivalent al disc unitat D doncs si $\phi : \mathbb{C} \to D$, fos holomorfa, aleshores pel teorema de Liouville seria constant i per tant no seria injectiva.

La demostració del teorema de Riemann no és simple. Primer de tot haurem d'estudiar els automorfismes del disc, es a dir, les aplicacions biholomorfes del disc en si mateix.

Automorfismes del disc

Per a caracteritzar quins són tots els automorfismes del disc, necessitem el següent resultat de "rigidesa" de les aplicacions holomorfes del disc en el disc.

Lema 5.2 (Lema de Schwarz). *Sigui $f \in \mathcal{H}(D)$ una aplicació holomorfa del disc en si mateix i que fixa l'origen ($f(0) = 0$). Aleshores per a tota $z \in D$, $|f(z)| \leq |z|$ i a més $|f'(0)| \leq 1$. Si a més es dona la igualtat en cap de les dues desigualtats, aleshores $f(z) = \lambda z$ amb $|\lambda| = 1$.*

Demostració. Considerem les funcions $f_r(z) = f(rz)$ amb $0 < r < 1$. La funció $f_r(z)/z \in \mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$, pel principi del màxim satisfà

$$\left|\frac{f_r(z)}{z}\right| \leq \sup_{|\zeta|=1} \frac{|f_r(\zeta)|}{|\zeta|} \leq 1, \qquad \forall z \in D,$$

es a dir per a tota $z \in D$, es compleix $|f(rz)| \leq |z|$. Si fem tendir $r \to 1$ en aquesta desigualtat, tenim $|f(z)| \leq |z|$ i per tant aplicant la definició de derivada tenim $|f'(0)| \leq 1$. Un cop vist això veiem que podem definir la funció $g \in H(D)$ com $g(z) = f(z)/z$ si $z \neq 0$ i $g(0) = f'(0)$. Es compleix $|g(z)| \leq 1$ per a tota $z \in D$. Per tant si $|g(z)| = 1$ per a algun punt de l'interior, g és constant de nou pel principi del màxim, $g \equiv \lambda$ amb $|\lambda| = 1$. ♣

Ja coneixem uns quants dels automorfismes del disc, es tracta de les transformacions lineals que preserven la circumferència unitat. Són les transformacions del tipus

$$T_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \qquad a \in D.$$

Veiem que $T_a(0) = -a$ i $T_a(a) = 0$. Per una altra part és un automorfisme del disc trivialment amb invers $T_a^{-1} = T_{-a}$. A part d'aquests sempre hi ha les rotacions i les composicions d'aquests dos tipus. De fet, gràcies al lema de Schwarz, veurem que aquests són tots els automorfismes.

Proposició 5.3. *Tot automorfisme ϕ del disc en si mateix és de la forma $\lambda T_a(z)$, amb $|\lambda| = 1$ i $a \in D$.*

Demostració. En efecte, si ϕ és un automorfisme del disc i diem $b = \phi^{-1}(0)$, aleshores $\psi(z) = \phi(T_{-b}(z))$ és un automorfisme del disc tal que $\psi(0) = 0$. Per tant, pel lema de Schwarz $|\psi(z)| \leq |z|$ per a tota $z \in D$. Per una altra part ψ^{-1} també és una aplicació del disc al disc amb $\psi^{-1}(0) = 0$ i en conseqüència $|\psi(z)| \geq |z|$. De les desigualtats concloem que $\psi(z) = \lambda z$ amb $|\lambda| = 1$. Per tant $\phi(w) = \lambda T_b(w)$. ♣

5.2 Teorema de Riemann

Ja disposem de les eines necessàries per demostrar el teorema de Riemann.

Demostració. Tenim un domini $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, diem $\mathcal{F}$ a la família de funcions holomorfes $f : \Omega \to D(0,1)$ que són injectives.

Dividirem la prova en tres passos. El primer consisteix en veure que la família $\mathcal{F}$ no és buida

• Primer pas. Anem a construir una funció de $\mathcal{F}$. Sigui w un punt de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. La funció $z \to z - w$ no s'anul·la mai en Ω i per tant pel fet que Ω és simplement connex existeix una funció $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\phi^2(z) = z - w$. De la definició de ϕ es veu que si $\phi(z_1) = \pm\phi(z_2)$ aleshores $z_1 = z_2$ i per tant ϕ és injectiva i a més $\phi(z_1) \neq \phi(-z_2)$ si $z_1 \neq z_2$. Com que $\phi(\Omega)$ és un obert de $\mathbb{C}$ pel teorema de l'aplicació oberta, aleshores és segur que conté un disc $D(a, r)$ amb la propietat $0 < r < |a|$. En aquest cas el disc $D(-a, r)$ no interseca la imatge $\phi(\Omega)$. Per tant l'aplicació $\psi(z) = r/(\phi(z) + a)$ pertany a $\mathcal{F}$. Ja hem vist doncs que $\mathcal{F}$ no és buida.

• Segon pas. A continuació fixem un $\alpha \in \Omega$. L'objectiu del segon pas es veure que si $f \in \mathcal{F}$ no és exhaustiva ($f(\Omega) \neq D$), aleshores existeix una funció $g \in \mathcal{F}$ amb $|f'(\alpha)| < |g'(\alpha)|$. En efecte, suposem que f no és exhaustiva. Prenem $\beta \in D \setminus f(\Omega)$, aleshores si diem T_β a l'automorfisme del disc que porta β al 0, llavors $T_\beta \circ f \in \mathcal{F}$ i no s'anul·la mai, per tant existeix una $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $h^2 = T_\beta \circ f$. Com que h^2 és injectiva, aleshores h ho és també, així que $g = T_{h(\alpha)} \circ h \in \mathcal{F}$. Si diem $\pi(z) = z^2$, aleshores $f = T_{-\beta} \circ \pi \circ T_{-h(\alpha)} \circ g$, de forma que $f'(\alpha) = (T_{-\beta} \circ \pi \circ T_{-h(\alpha)})'(0)g'(\alpha)$. Es a dir si veiem que $|(T_{-\beta} \circ \pi \circ T_{-h(\alpha)})'(0)| < 1$ ja tenim demostrat el segon punt. Ara ens fixem que la funció $\psi = T_{-\beta} \circ \pi \circ T_{-h(\alpha)}$ és una funció holomorfa del disc en el disc que *no* és injectiva. Estem temptats d'utilitzar el lema de Schwarz, però cal abans assegurar-se que la imatge del 0 és 0. Per això, diem $\gamma = \psi(0)$ i cal considerar $T_\gamma \circ \psi$. Llavors $|T'_\gamma(\gamma)\psi'(0)| < 1$, es a dir, $|\psi'(0)| < |T'_\gamma(\gamma)|^{-1} = 1 - |\gamma|^2 < 1$. Això és el que volíem veure. Ara només queda la part "soft" de l'argument.

• Tercer pas. Sigui $\eta = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(\alpha)| > 0$. Del que hem vist es dedueix que si $f \in \mathcal{F}$ assoleix el suprem (i.e. $|f'(\alpha)| = \eta$), aleshores f és exhaustiva i de resultes de pertànyer a $\mathcal{F}$ també és injectiva i holomorfa, es a dir, és una solució del nostre problema. Per veure que podem assolir el suprem, prenem una successió $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $|f'_n(\alpha)| \to \eta$. Com que $\mathcal{F}$ és una família normal (tots els seus membres g satisfan $|g| < 1$), pel teorema de Montel existeix una parcial convergent $f_{n_k} \to f$ uniformement sobre compactes. Pel teorema de Weierstrass, f és holomorfa en Ω i $|f'(\alpha)| = \eta$. A més ja hem vist que el límit de funcions holomorfes injectives és injectiu o constant. Com que $|f'(\alpha)| = \eta \neq 0$, aleshores f és injectiva. A més, per a tota n, $f_n(\Omega) \subset D$, per pas al límit $f(\Omega) \subset \overline{D}$. Però per una altra part, $f(\Omega)$ és obert i es conclou que $f(\Omega) \subset D$ i $f \in \mathcal{F}$ com volíem veure. ♣

Un últim comentari sobre el teorema de Riemann es que el seu enunciat el podem millorar trivialment de la següent forma:

Teorema 5.4 (Teorema de Riemann (revisited)). *Si $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ és simplement connex i $\alpha \in \Omega$, aleshores existeix una única aplicació f biholomorfa entre Ω i el disc unitat D tal que $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha)$ és real i positiva.*

Demostració. En primer lloc, comprovem la unicitat. Si existeixen dues funcions f i g amb les propietats desitjades, llavors $h(z) = f(g^{-1}(z))$ és una aplicació holomorfa $h : D \to D$ bijectiva i tal que $h(0) = 0$. Pel lema de Schwarz se satisfà $h(z) = \lambda z$ amb $|\lambda| = 1$. Per una altra part, $\lambda = h'(0) = f'(\alpha)/g'(\alpha) > 0$. Es a dir $\lambda = 1$ i $f = g$. Per veure l'existència d'una funció f amb les propietats enunciades pel teorema, comencem per una funció holomorfa i bijectiva $g : \Omega \to D$. Ja hem vist que existeix una. Ara anem a modificar-la per tal que compleixi la resta de condicions. Comencem per dir $\beta = g(\alpha)$ i prenem $h = T_\beta \circ g$. Com que T_β és un automorfisme del disc h encara és una bijecció entre Ω i D. A més $h(\alpha) = 0$. Pot ser encara que $h'(\alpha)$ no sigui real i positiva. En qualsevol cas $h'(\alpha) \neq 0$ doncs h és injectiva. Diem $\lambda = \bar{h}'(\alpha)/|h'(\alpha)|$ i prenem $f(z) = \lambda h(z)$. Amb aquesta elecció $f : \Omega \to D$, $f(0) = 0$ i $f'(\alpha) = |h'(\alpha)| > 0$. ♣

5.3 Automorfismes de $\mathbb{C}$

Ja hem vist com són tots els automorfismes de D. De la mateixa manera és immediat veure que tot automorfisme d'un domini simplement connex $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ és de la forma $f^{-1} \circ T \circ f$, on f és una aplicació bijectiva de Ω en D i T un automorfisme del disc. Ens queden per descriure quins són els automorfismes de $\mathbb{C}$. D'això ens ocupem ara.

Proposició 5.5. *Tot automorfisme de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ és de la forma $f(z) = az + b$ amb $a \neq 0$.*

Demostració. Sigui f un biholomorfisme de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. Aleshores la funció $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida així: $g(z) = f(1/z)$ és una funció holomorfa i injectiva en tot el pla menys en l'origen on presenta una singularitat aïllada. La singularitat en l'origen no pot ser evitable, doncs en aquest cas $\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to\infty} f(z) = L$, existeix i per tant f és acotada. Pel teorema de Liouville f seria constant i això no és possible doncs f és injectiva. Veiem que no pot presentar tampoc una singularitat essencial. La imatge de $D(2,1)$ per g és un obert doncs g és holomorfa. Per un altra part si g presenta una singularitat essencial, aleshores la imatge de tot entorn de 0 és densa en tot $\mathbb{C}$. En particular $g(D(0,1) \setminus \{0\}) \cap g(D(2,1)) \neq \emptyset$. Això vol dir que g no és injectiva i això no pot ser. Hem demostrat doncs que g presenta en 0 un pol. Es a dir, existeix un $n > 0$ tal que $\lim_{z\to 0} z^n g(z) = 0$. Dit d'un altra forma $\lim_{z\to\infty} f(z)/z^n = 0$. De les desigualtats de Cauchy veiem que $f^{(n+1)} \equiv 0$ i llavors f és un polinomi. Els únics polinomis injectius que hi ha són els de grau 1 i per tant $f(z) = az + b$. ♣

5.4 Principi de reflexió

Per acabar el capítol d'aplicacions conformes, donarem el principi de reflexió de Schwarz. Aquest principi permet, en determinades circumstàncies, estendre el domini de definició d'una funció holomorfa. Per enunciar aquest principi amb comoditat, precisem d'una mica de notació. Diem Π^+ al semiplà superior: $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Suposem que tenim un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ de forma que la intersecció de $\overline{\Omega}$ i la recta real és un interval J. Diem $\Omega^+ = \Pi^+ \cap \Omega$ i Ω^- a la reflexió del domini G^+ respecte de la recta real, veieu la figura 5.1.

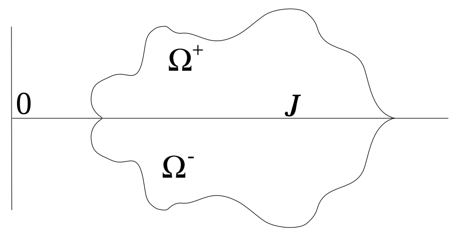

Figura 5.1: Les regions simètriques Ω^+ i Ω^-

Teorema 5.6 (Principi de reflexió). *Si f és una funció holomorfa en Ω^+ un domini com en la figura 5.1 i f estén a una funció contínua en $\Omega^+ \cup J$ tal que $f(x) \in \mathbb{R}$ si $x \in J$ aleshores f estén a una funció holomorfa en el domini $\Omega^+ \cup J \cup \Omega^-$.*

Demostració. Comencem per definir g de la següent manera $g(z) = f(z)$ si $z \in \Omega^+$ o $z \in J$. Si $z \in \Omega^-$, aleshores definim $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. No és difícil comprovar que g satisfà les equacions de Cauchy-Riemann en Ω^-. En efecte, si diem $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, aleshores quan $z \in \Omega^-$, $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y) = \widetilde{u}(x,y) + i\widetilde{v}(x,y)$. Hem de comprovar que $\widetilde{u}_x = \widetilde{v}_y$ i que $\widetilde{u}_y = -\widetilde{v}_x$. En efecte $\widetilde{u}_x = u_x = v_y = \widetilde{v}_y$ i $\widetilde{u}_y = -u_y = v_x = -\widetilde{v}_x$. Per tant g és holomorfa en $\Omega^+ \cup \Omega^-$. Com que f és real en J les dues definicions enganxen be i g és contínua en $\Omega^+ \cup \Omega^- \cup J$. Encara no hem vist que és holomorfa en tota la unió. Per veure-ho, agafem qualsevol rectangle R contingut en $\Omega^+ \cup \Omega^- \cup J$. Si $R \subset \Omega^\pm$ ja sabem que $\int_{\partial R} g(z)\,dz = 0$. El cas que resta és quan R talla a l'interval J. En aquest cas trenquem R en dos rectangles R^+ i R^-, cadascuna d'ells en Π^+ i Π^- respectivament i que reposen en $\mathbb{R}$. Hem de veure que $\int_{\partial R^+} g(z)\,dz = 0$ i $\int_{\partial R^-} g(z)\,dz = 0$. El que farem és prendre una successió de rectangles R_n continguts estrictament en Ω^+ i tals que $R_n \to R$. Com que g és holomorfa en Ω^+, aleshores $\int_{\partial R_n} g(z)\,dz = 0$. A més per la continuitat de g es veu que $\int_{\partial R_n} g(z)\,dz \to \int_{\partial R} g(z)\,dz$. De forma anàloga es tracta el cas de R^-. ♣

Capítol 6

Funcions harmòniques

Algunes de les propietats que hem estudiat de les funcions holomorfes com la propietat de la mitja i alguna de les seves conseqüències com el principi del màxim són propietats que són certes en un conteste més ampli, el de les funcions harmòniques. El concepte de funció harmònica és purament real, no necessitarem l'estructura complexa, però en el cas de funcions harmòniques definides en oberts de $\mathbb{R}^2$ és molt útil entendre la relació que hi ha entre les funcions harmòniques i les holomorfes, doncs això permet demostracions més simples utilitzant els teoremes de variable complexa que ja coneixem.

6.1 Definicions i propietats bàsiques

Comencem per les definicions.

Definició. Donat un obert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ diem que una funció $u : \Omega \to \mathbb{R}$ és *harmònica* si és de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ i satisfà

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Abans de seguir, convé fer un parell de precisions en aquesta definició. En primer lloc la regularitat $\mathcal{C}^2$ de la funció u no és estrictament necessària, està en certa forma implícita en la condició $\Delta u = 0$. De fet veurem que tota funció harmònica és $\mathcal{C}^\infty$. La regularitat l'afegim a la definició pagant amb una certa redundància la comoditat a l'hora de definir l'operador Δ com ho hem fet.

Una segona observació és que també es pot definir el que és una funció harmònica a valors complexos. Senzillament, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ és harmònica si $f = u + iv$ i u i v són harmòniques. En particular tota funció holomorfa en Ω és harmònica. Com que és una extensió trivial del concepte original d'harmònica, ens limitarem a partir d'ara a considerar funcions harmòniques a valors reals, però els resultats s'estenen de forma immediata a funcions a valors complexos.

Veiem quina és la relació que hi ha entre funcions holomorfes i funcions harmòniques. Donada una funció harmònica u en un obert Ω, podem associar-li una funció holomorfa f en Ω de la següent forma: $f(x+iy) = u_x(x,y) - iu_y(x,y)$. Dit d'una altra forma $f(z) = 2\frac{\partial u}{\partial z}$. Per a comprovar que és holomorfa només cal veure que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Però en efecte,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}\partial z} = \frac{1}{2}\Delta u = 0.$$

Aquesta és la relació fonamental que tenen les funcions harmòniques i les holomorfes i és la que explotarem. També es pot veure fàcilment (corol·lari 1.2) que tant la part real com la part imaginària d'una funció holomorfa són harmòniques. Una pregunta natural és la següent: És cert el recíproc? Es a dir, tota funció harmònica realés la part real d'una funció holomorfa? Aquest problema és equivalent a l'existència d'una funció conjugada harmònica que definim a continuació:

Definició. Donada una funció harmònica u en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$, si existeix una altra funció harmònica v en Ω tal que $u_x = v_y$ i $u_y = -v_x$ li direm la *funció harmònica conjugada* de u.

De fet la conjugada harmònica no és única, doncs està determinada mòdul una constant, es a dir si v és la conjugada harmònica de u, aleshores $v + K$ també. És immediat comprovar que si v és la conjugada harmònica de u, llavors $-u$ és la conjugada harmònica de v. La relació entre l'existència de la conjugada harmònica d'una funció real u i el d'una funció holomorfa f tal que $u = \operatorname{Re} f$ és directa, doncs si existeix v, llavors $f = u + iv$ és holomorfa i a l'inrevés si $u = \operatorname{Re} f$ llavors $v = \operatorname{Im} f$ és una conjugada harmònica.

Malauradament no sempre existeix una funció conjugada harmònica. Considerem el següent exemple: $u(z) = \log|z|$ definida en el domini $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z| < 2\}$. Aquesta funció no té conjugada harmònica definida en tot Ω, localment $u = \operatorname{Re}\log z$ i per tant localment $v = \operatorname{Arg} z$, però l'argument no està definit en tota la corona de forma contínua. L'obstrucció per a la construcció d'una conjugada harmònica de u ha estat el fet que Ω tingués un forat. La següent proposició ens assegura que aquesta és l'única obstrucció.

Proposició 6.1. *Si u és una funció harmònica real en un domini simplement connex Ω aleshores $u = \operatorname{Re} f$ per alguna $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Demostració. Ja hem vist que donada u, $f = \frac{\partial u}{\partial z}$ és una funció holomorfa en Ω. Com que el domini és simplement connex, llavors f té una primitiva g definida en tot Ω. Es a dir, $g' = \frac{\partial u}{\partial z}$. Com que g és holomorfa $\frac{\partial(g+\bar{g})}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}$. Tant u com $g + \bar{g}$ són reals i per tant si prenem conjugats en la darrera igualtat tenim $\frac{\partial(g+\bar{g})}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$. Per tant $g + \bar{g} - u = h$, on h és holomorfa. Per una altra part hauria de ser real, això vol dir que h és una constant real. Per tant $u = \operatorname{Re}(2g - h)$. ♣

En particular hem vist que les funcions harmòniques en qualsevol domini són $\mathcal{C}^\infty$ doncs localment sempre són la part real d'una funció holomorfa. Per a les funcions holomorfes coneixem un resultat del valor mig que ens assegura que tota funció holomorfa f en un entorn del disc $\overline{D(z,r)}$ satisfà

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Si diem $f = u + iv$ i prenem la part real de la igualtat de la mitja tenim que per a tota funció harmònica u en un entorn del disc $\overline{D(z,r)}$ se satisfà

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Com en el cas de les funcions holomorfes, d'aquesta propietat es dedueix que les funcions harmòniques no constants no tenen màxims locals. Amb la mateixa prova que la de funcions holomorfes tenim el següent principi:

Teorema 6.2 (Principi del màxim). *Si Ω és un domini acotat i u és una funció real contínua en $\overline{\Omega}$ i harmònica en l'interior, aleshores u assoleix el seu màxim i el seu mínim en la frontera $\partial\Omega$. En particular si $u = 0$ en $\partial\Omega$, aleshores $u \equiv 0$.*

Hem vist com els valors de u en la frontera del disc determinen el valor en el centre. A continuació veurem com obtenir els valors de qualsevol punt de l'interior a partir dels valors frontera, en el mateix esperit amb que varem demostrar la formula de Cauchy per a funcions holomorfes. Sabem que si u és harmònica en un entorn del disc $\overline{D(0,1)}$, aleshores

$$u(re^{it}) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \bar{z}^n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n r^{|n|} e^{int},$$

amb convergència uniforme en el disc tancat.

Anem ara a donar la fórmula de representació de les funcions harmòniques. Donada u harmònica en un entorn de $\overline{D(0,1)}$, aleshores

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}\, dt, \quad \forall r < 1.$$

En efecte si substituïm dins de la integral el valor de u per la seva sèrie, tenim

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)}\, dt =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{imt} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)}\, dt = \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m r^{|m|} e^{im\theta}\, dt = u(re^{i\theta}).\end{aligned}$$

Hem vist doncs que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it}) P_r(\theta - t)\, dt, \quad \forall r < 1,$$

on $P_r(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}$. A aquest nucli integral que reprodueix les funcions harmòniques se li diu nucli de Poisson i també podem comprovar que satisfà les següents igualtats:

$$P_r(\theta - t) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} = \frac{1 - |z|^2}{|1 - \bar{\zeta} z|^2} = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2},$$

on $\zeta = e^{it}$ i $z = re^{i\theta}$.

6.2 Problema de Dirichlet al disc

Ens interessem ara en el problema següent: Donada una funció $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ existeix una funció $u \in \mathcal{C}(\overline{D})$ harmònica en l'interior i tal que u restringida a ∂D sigui f?

La resposta és afirmativa i la solució està donada pel nucli de Poisson. Donada $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ definim la integral de Poisson Pf com

$$Pf(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})P_r(\theta - t)\,dt, \quad \forall r < 1.$$

Veiem que $u = Pf$ és una solució del problema de Dirichlet. En primer lloc veiem que defineix una funció harmònica en l'interior. Això es pot veure observant que

$$P_r(\theta - t) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right),$$

i aquesta funció és harmònica per $z \in D$. Per tant si prenem ΔPf el laplacià entra dintre de l'integral que és zero doncs el nucli és harmònic. La part delicada es comprovar que Pf és una funció que estén contínuament fins a la vora i que coincideix amb f. Es a dir, hem de veure que per a qualsevol $\theta \in [0, 2\pi]$, $Pf(z) \to f(e^{i\theta})$ si $z \to e^{i\theta}$. Per a demostrar-ho, veiem en primer lloc que $P1 = 1$. En efecte, això es una conseqüència de la fórmula de representació de les funcions harmòniques que hem vist, doncs 1 és harmònica a tot $\mathbb{C}$. Amb això ens podem reduir al cas en que $f(e^{i\theta}) = 0$, doncs en cas contrari considerem la funció $g(e^{it}) = f(e^{it}) - f(e^{i\theta})$. Aquesta funció satisfà $g(e^{i\theta}) = 0$ i si veiem que $Pg(z) \to 0$ quan z tendeix a $e^{i\theta}$ aleshores $Pg = Pf - f(e^{i\theta}) \to 0$ i ja tenim el cas general. Suposem doncs que $f(e^{i\theta}) = 0$. Llavors existeix un interval I_1 de la circumferència centrat en $e^{i\theta}$ de forma que $|f(e^{it})| < \varepsilon/2$ si $t \in I_1$. Sigui I_2 l'interval complementari en la circumferència. Si diem χ_{I_i} a la funció característica de l'interval $I_i,\ i = 1, 2$ aleshores $Pf(z) = P[f\chi_{I_1}](z) + P[f\chi_{I_2}](z)$. Veiem que cadascun d'aquests dos sumands es més petit que $\varepsilon/2$ quan z està prou a prop de $e^{i\theta}$. El primer és el més senzill, doncs $|f\chi_{I_1}(e^{it})| < \varepsilon/2$ per tot t i per tant per a tot $z \in D$ tenim

$$|P[f\chi_{I_1}](z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f\chi_{I_1}(e^{it})|\frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}\,dt \le \varepsilon/2.$$

Per a l'altre integral sabem que f és contínua en ∂D i per tant el seu mòdul té un màxim M i podem acotar així:

$$|P[f\chi_{I_2}](z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{I_2} |f(e^{it})|\frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}\,dt \le M\frac{1}{2\pi}\int_{I_2}\frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}\,dt$$

Ara be, quan z està molt a prop de $e^{i\theta}$, aleshores $|e^{it} - z|$ està acotat inferiorment doncs $e^{it} \in I_2$, es a dir està lluny de $e^{i\theta}$. Per un altre part el numerador tendeix cap a zero si $z \to e^{i\theta}$, per tant per z prou a prop tenim $|P[f\chi_{I_2}](z)| \le \varepsilon/2$. Hem resolt doncs el problema de Dirichlet en el disc. El mateix problema es pot plantejar en un obert arbitrari en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^n$ però aquesta ja és una altra historia, . . .

That's all folks!

Bibliografia

[Ahl79] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill, New York, N.Y., tercera edició, 1979.

[And97] M. Andersson. *Topics in complex analysis*. UniversiText. Springer-Verlag, New York, N.Y., 1997.

[Con78] J. B. Conway. *Functions of one complex variable*, volum 11 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, N.Y., segona edició, 1978.

[Nar85] R. Narasimhan. *Complex analysis in one variable*. Birkhäuser, Boston, 1985.

[Rud70] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, London, 1970.