[título_] Lección 1. Ejercicios

[versión_] Octubre 2008
[materia_] Algoritmos y conceptos preliminares.
[asignatura_] Matemàtiques I
[centro_] E. T. S. d'Arquitectura del Vallès - Universitat Politècnica de Catalunya
[url_] http://upcommons.upc.edu/ocw http://etsav.upc.edu/assignatures/mat01
[ficheros_] L1_E_Cast.pdf L1_Sol_Cast.pdf

[descripción_] Problemas y soluciones de: operaciones con matrices, cálculo de rangos, cálculo de determinantes, sistemas de ecuaciones e inversión de matrices.

E1.2 Soluciones.

Soluciones a algunos ejercicios de la lista E1.1

1.1 Es importante darse cuenta de que las matrices resultado de un producto tienen tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda.

a. 33

b. $\begin{pmatrix} 14 & -21 & 35 \\ 4 & -6 & 10 \\ 10 & -15 & 25 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

1.2

$$(A+B)C=\begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 40 & 38 & 6 \\ 16 & 23 & 14 \end{pmatrix} \qquad C(3A+2B)=\begin{pmatrix} 54 & 20 & -22 & 49 \\ 30 & 17 & -9 & 35 \\ 16 & 7 & -10 & 11 \\ 94 & -52 & 20 & 99 \end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 29 & 28 & 6 \\ 9 & 13 & 3 \end{pmatrix} \qquad CA=\begin{pmatrix} 14 & 2 & -14 & 13 \\ 8 & 1 & -5 & 9 \\ 4 & 1 & -6 & 3 \\ 26 & -6 & -4 & 27 \end{pmatrix}$$

1.4 Los determinantes valen:

a. -7 **b.** -2 **c.** -15 **d.** 4 **e.** 12 **f.** 82 **g.** 22

1.5 a. Paso 1: Empezamos con un menor de orden 1 diferente de cero:

$$\begin{pmatrix} [2] & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det[2]=2\neq 0 \longrightarrow \text{rang}\geq 1$$

Paso 2: Ampliamos el menor anterior - conservándolo - hasta uno 2x2, con determinante no nulo:

SOME RIGHTS RESERVED

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & 6 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & 5 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 9 \neq 0 \longrightarrow \text{rang} \geq 2$$

Paso 3: Ampliamos el menor anterior - conservándolo - hasta uno 3x3, con determinante no nulo:

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \det\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow \text{no informa}$$

Hay que probar con otra posible ampliación:

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 6 \end{bmatrix} & 3 & \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \qquad \det\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow \text{no informa}$$

Como que no hay más ampliaciones posibles, resultará que:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

Nota: no es necesario probar otros menores 3x3, ya que no serán ampliaciones del último menor 2x2 con determinante diferente de cero. Por ejemplo, no sería necesario calcular:

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

puesto que no es ampliación de $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, menor 2x2 sobre el que se ha basado todo el proceso.

1.5.d Alternativamente, también se puede calcular el rango mediante el método de Gauss. En este caso, el objetivo es conseguir ceros por debajo (o encima) de una diagonal.

Si a lo largo del proceso se convierte en cero toda una fila (o columna), se puede prescindir de ésta y, en consecuencia, rebajar la estimación del rango en una unidad.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & -1 \\ 5 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(\frac{1}{5}\right)F_3} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 - 4F_4]{F_2 - 3F_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 10 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 - \left(\frac{1}{2}\right)F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 10 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como se ha obtenido una diagonal con elementos no nulos, y ceros por encima, el proceso termina y el rango vale 2.

SOME RIGHTS RESERVED

1.5 (apartados restantes del problema 1.5)
b. El rango es 2. **c.** 1. **d.** 2 **e.** 1 **f.** 3 **g.** 3

1.7.a Para empezar, se escribe el sistema en forma matricial.

Producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 2 & -13 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 6 \\ 2 & 1 & -5 & | & -4 \\ 2 & -13 & 13 & | & 28 \end{pmatrix}$$

El objetivo es conseguir ceros por debajo de la diagonal principal de la matriz ampliada.

Las operaciones
F_2 - 2 F_1 (a la segunda fila se le resta dos veces la primera fila)
F_3 - 2 F_1 (a la tercera fila se le resta dos veces la primera fila)
proporcionan:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 6 \\ 2 & 1 & -5 & | & -4 \\ 2 & -13 & 13 & | & 28 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 6 \\ 0 & 7 & -9 & | & -16 \\ 0 & -7 & 9 & | & 16 \end{pmatrix}$$

El proceso continúa sumando a la tercera fila la segunda, **F_3 + F_2** con el objetivo de eliminar el valor **7**, último elemento no nulo que queda por debajo de la diagonal. Se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 6 \\ 0 & 7 & -9 & | & -16 \\ 0 & -7 & 9 & | & 16 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 6 \\ 0 & 7 & -9 & | & -16 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

de forma que una ecuación completa (la tercera) se ha visto transformada en **0=0**, dejando de aportar información al sistema y, en consecuencia, desapareciendo.

Nos encontramos delante de un sistema equivalente al inicial, pero con tan sólo dos ecuaciones, de manera que, en caso de tener solución, ésta dependerá necesariamente de parámetros.

Recuperemos el sistema asociado a la matriz ampliada obtenida hasta este punto, y decidamos qué variable pasa a ser parámetro (**z**, en nuestro caso), para volver posteriormente a la forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 6 \\ 0 & 7 & -9 & | & -16 \end{pmatrix} \longrightarrow \left.\begin{matrix} x-3y+2z=6 \\ 7y-9z=-16 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left.\begin{matrix} x-3y=6-2z \\ 7y=-16+9z \end{matrix}\right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & 6-2z \\ 0 & 7 & | & -16+9z \end{pmatrix}$$

desde donde proseguimos hasta obtener la matriz identidad en el lado izquierdo, haciendo para ello ceros encima de la diagonal.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & | & 6-2z \\ 0 & 7 & | & -16+9z \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+\frac{3}{7}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{7}(-6+13z) \\ 0 & 7 & | & -16+9z \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{7}(-6+13z) \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{7}(-16+9z) \end{pmatrix}$$

El problema ha quedado resuelto. En efecto, si escribimos el sistema asociado a la última matriz ampliada resulta:

SOME RIGHTS RESERVED

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7}(-6+13z) \\ 0 & 1 & \frac{1}{7}(-16+9z) \end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x=\frac{1}{7}(-6+13z) \\ y=\frac{1}{7}(-16+9z) \end{array}\right\}$$

lo cual no es sino la solución expresada en función del parámetro **z**.

Para terminar, podemos expresar la solución en forma vectorial:

$$(x,y,z)=(\frac{1}{7}(-6+13z),\frac{1}{7}(-16+9z),z)=(-\frac{6}{7},-\frac{16}{7},0)+z(\frac{13}{7},\frac{9}{7},1)$$

NOTA: procedimientos distintos de cálculo pueden llevarnos a soluciones de apariencia diversa, todas ellas correctas (¡o no!).

1.7.b

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x=1 \\ y=2z \\ t=-3u \end{array}\right\}$$

En forma vectorial, la solución se escribe:

$$(x,y,z,t,u)=(1,2z,z,-3u,u)=(1,0,0,0,0)+z(0,2,1,0,0)+u(0,0,0,-3,1)=$$
$$(1,0,0,0,0)+[(0,2,1,0,0),(0,0,0,-3,1)]$$

1.7.d

$$\left.\begin{array}{r} x=-2 \\ y=\frac{7}{3} \\ z=-\frac{16}{3} \end{array}\right\}$$

1.8.c Para invertir una matriz, se puede utilizar el método de Gauss para la resolución de ecuaciones. Interpretemos la matriz como la de coeficientes de un sistema, y escribamos la identidad en lugar del vector de términos independientes.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A partir de aquí, se aplica el algoritmo de Gauss hasta obtener la matriz identidad en el lado izquierdo, momento en el que habremos obtenido también la matriz inversa, ésta última en el lado derecho.

SOME RIGHTS RESERVED

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1.8. (Otros apartados del problema 1.8) De manera parecida se tiene que:

a.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.9 Cálculo de la matriz inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 17 & -15 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -7 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-2F_3]{F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1-3F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 27 & -14 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \\ -7 & 27 & -14 \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema, lo escribimos primero como un producto de matrices:

$$\left.\begin{array}{r} 17x-15y-2z=2 \\ 7x-7y-z=-1 \\ 5x-6y-z=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 17 & -15 & -2 \\ 7 & -7 & -1 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera es posible multiplicar a ambos lados de la igualdad por A^{-1}, resultando:

$$\begin{pmatrix} 17 & -15 & -2 \\ 7 & -7 & -1 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{multiplicando por } A^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \\ -7 & 27 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -41 \end{pmatrix}$$

SOME RIGHTS RESERVED