[título_] **Lección 2. Ejercicios**

[versión_] Octubre 2008
[materia_] Puntos, vectores y variedades lineales.
[asignatura_] Matemàtiques I
[centro_] E. T. S. d'Arquitectura del Vallès - Universitat Politècnica de Catalunya
[url_] http://upcommons.upc.edu/ocw http://etsav.upc.edu/assignatures/mat01
[ficheros_] L2_E_Cast.pdf L2_Sol_Cast.pdf

[descripción_] Problemas y soluciones sobre dependencia e independencia lineal de vectores, bases y dimensión, ecuaciones implícitas y paramétricas de rectas y planos.

E1.2 Soluciones.

Soluciones a algunos ejercicios de la lista E2.2

2.7 El vector (a,5,13) es siempre combinación lineal de (1,3,0),(-4,5,7),(-2,0,0) y (3,2,7), sea cual sea el valor del parámetro a. Esto se debe a que (1,3,0),(-4,5,7),(-2,0,0) y (3,2,7) generan todo el espacio tridimensional.

2.8 Esto tan sólo sucede cuando a=-2 y b=1. Para comprobarlo, podemos por ejemplo formar una matriz con los vectores (1,1,0,a), (3,-1,b,-1) y (-3,5,a,-4), y calcular su rango.

Empezaremos escogiendo un menor de orden 2 con determinante distinto de cero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & b & a \\ a & -1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

A continuación, lo ampliamos de todas las formas posibles (sólo hay dos en este caso), y imponemos que sus determinantes sean = 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & b & a \\ a & -1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = -4a-8b=0 \rightarrow a=-2b \quad [1]$$

$$\downarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ a & -1 & -4 \end{vmatrix} = 24+12a=0 \rightarrow a=-2 \quad [2]$$

Las condiciones [1] y [2] deben satisfacerse simultáneamente para que el rango sea 2, y la única opción es que a=-2 y b=1.

2.9 Procediendo de forma similar al ejercicio 2.8:

$$\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ a & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ampliamos de las dos maneras posibles:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a = 0 \;\rightarrow\; a=0 \text{ o } a=+1 \quad [1]$$

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; a=+1,\ a=-1 \quad [2]$$

Como ambas condiciones deben satisfacerse simultáneamente, deberá ser a=+1.

2.10 Para que sean iguales deben cumplirse dos cosas:

1.- Que F=[(0,1,1),(1,0,2),(-2,3,-1)] tenga dimensión 2.

2.- Que los vectores (1,1,3) i (-1,4,a) sean de F, y linealmente independientes entre sí.

Existen diversos procedimientos que permiten comprobar ambas condiciones.

<u>Procedimiento 1</u>:
Por ejemplo, se puede hacer un estudio de rangos:

1.- Comprobando primero que $\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2$ (es cierto).

2.- Comprobando a continuación que $\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & a \end{pmatrix} = 2$ (esto dependerá del valor de a. Debe ser a=2).

Finalmente, y para este valor a=2, resulta también que $\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \\ 3 & a \end{pmatrix} = 2$, con lo cual las columnas (vectores) son linealmente independiente.

<u>Procedimiento 2</u>:
También es posible plantear el problema mediante una matriz de Gauss, eliminando aquellas filas (vectores) que puedan obtenerse como combinación lineal de las restantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ - & - & - \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3F - 2·2F}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ - & - & - \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3F - 3·1F}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ - & - & - \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{4F−1F−2F}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ - & - & - \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ - & - & - \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[3F\,-\,2\cdot 2F]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ - & - & - \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[3F\,-\,3\cdot 1F]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ - & - & - \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[4F-1F-2F]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ - & - & - \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & a \end{pmatrix}$$

También de esta manera hemos obtenido que a=2. Para terminar, también aquí habría que comprobar que los dos vectores de G son linealmente independientes.

Procedimiento 3:
Como última opción se propone un planteamiento de naturaleza geométrica, que resulta muy intuitivo.
Si, mediante alguno de los procedimientos ya descritos, comprobamos la condición 1, sabremos que F es un plano que pasa por el origen de coordenadas. Si por otro lado comprobamos que los dos vectores generadores de G son linealmente independientes, cosa también ya hecha, llegamos a la misma conclusión para G. Ambos planos serán iguales si, por ejemplo, tienen vector característico proporcional. Veámoslo:

$$\vec{n}_F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2,\ 1,\ -1)$$ el vector característico de F.

$$\vec{n}_G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & a \end{vmatrix} = (a-12,\ \text{-a-3},\ 5)$$ el vector característico de G.

Así pues, también aquí deberá ser a=2 para que ambos vectores sean paralelos.

2.11 El sistema tiene una única solución (x,y,z)=(1.5,0.5,1). La interpretación geométrica es bien simple: los tres planos asociados a cada una de las tres ecuaciones se cortan en un único punto.

2.12 Se escribe la matriz del sistema y se procede a resolver por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & b \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 3-a & 0 \\ 0 & 3 & 1-2a & b-2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 3-a & 0 \\ 0 & 0 & -8+a & b-2 \end{array}\right)$$

Resulta que:
Si $a \neq 8$, la variable z se puede despejar de manera única y el sistema es compatible determinado. Interpretación geométrica: las tres ecuaciones del sistema representan tres planos que se cortan en un punto.

Si a=8, la parte izquierda de la tercera fila se anula. Si b=2, también se anulará el término independiente y el sistema será compatible indeterminado, con la solución dependiendo de un parámetro. Interpretación geométrica: los tres planos se cortan sobre una recta.

Si a=8 pero $b \neq 2$ en la tercera fila leemos $0 = b-2 \neq 0$, condición contradictoria. Por lo tanto, el sistema carece de solución. Interpretación geométrica: Dado que al sustituir a por 8 en el sistema original las dos primeras ecuaciones determinan siempre una recta (su rango es 2), la tercera deberá ser la de un plano paralelo a ésta. En cualquier otro caso la cortaría, proporcionando de paso una solución al sistema.