[títol_] **Lliçó 3. Exercicis**

[versió_] Octubre 2008
[matèria_] Sistemes de referència.
[assignatura_] Matemàtiques I
[centre_] E. T. S. d'Arquitectura del Vallès - Universitat Politècnica de Catalunya
[url_] http://upcommons.upc.edu/ocw http://etsav.upc.edu/assignatures/mat01
[fitxers_] L3_E.pdf L3_Sol.pdf

[descripció_] Problemes i solucions sobre sistemes de referència a fins. Equacions del canvi, efecte de la referència en equacions de plans i rectes, i referències adaptades a varietats afins.

E3.2 Solucions.

Solucions d'alguns exercicis de la llista E3.1

3.2 a. Les coordenades (x',y') de (2,6) en la nova base S es calculen resolent el sistema d'equacions $(2,6)=x'(2,2)+y'(4,-2)$.

També es poden calcular (és equivalent), multiplicant per la matriu inversa de M, on

$M=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. La inversa és $M^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$, i les coordenades (x',y') valen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

b. Les coordenades (x,y) en base canònica de $(0,1)_B$ seran $(x,y)=0(2,2)+1(4,-2)=(4,-2)$. També es poden obtenir multiplicant el vector per la matriu M.

c.

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

d.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}$$

3.3 a. La matriu demanada és M^{-1}, com a l'exercici anterior.
b. S'obtindran canviant de base el vector que s'obté al restar al punt (0,3) el nou origen de coordenades (1,1), o sigui:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De forma semblant, per a un punt genèric $P=(p_1,p_2)$ serà:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1-1 \\ p_2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c. La matriu demanada és M, com a l'exercici anterior.

d.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per a un punt genèric, la relació és:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.6 Les matrius solució són:

$B \to C$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D \to C$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$B \to D$
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$C \to B$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C \to D$
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$D \to B$
$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.7 a. La matriu és $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, la inversa de la matriu M que es forma disposant els vectors de la nova base en columnes, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $Q=(3,2,0)=(1,1,1)_S$, com a resultat de:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c. De forma semblant, per a un punt genèric $P=(x,y,z)$ el canvi és:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y-z \\ x-y \\ x-y+z \end{pmatrix}$$

on (x',y',z') representen les coordenades de P en referència S, o sigui: $P=(x',y',z')_S$

d. La nova referència T introdueix un canvi d'origen, i ja no n'hi haurà prou amb considerar només la matriu. Notarem amb '' (doble prima) les coordenades d'un punt genèric en T.

$$P=(x,y,z)_R=(x',y',z')_S=(x'',y'',z'')_T$$

Canvi de S a T: primer s'ha d'expressar A en referència S

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'on } A=(2,-2,-2)_S$$

i després $(x'',y'',z'')=(x',y',z')-(2,-2,-2)=(x'-2,y'+2,z'+2)$

Canvi de R a T: s'obté encadenant els canvis: de R a S, i de S a T.

$R\to S \quad (x' \;\; y' \;\; z')=(-x+2y-z \;\; x-y \;\; x-y+z)$

$S\to T \quad (x'',y'',z'')=(x',y',z')-(2,-2,-2)=(x'-2,y'+2,z'+2)=(-x+2y-z-2,x-y+2,x-y+z+2)$

3.8

b. De S a C: De C a S:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. De S a C:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d. De C a S:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

3.11 Notarem per R la referència tridimensional.

a. $(1,1,1)_R$ és el nou origen de coordenades, i per tant $(1,1,1)_R=(0,0)_S$

$(2,0,1)_R$: per a tenir les noves coordenades, restem el nou origen i expressem el resultat com a combinació lineal dels vectors de la nova base: $(2,0,1)-(1,1,1)=(1,-1,0)=\vec{u}_1-\vec{u}_2=(1,-1)_S$

b. $(1,1)_S=A+\vec{u}_1+\vec{u}_2=(1,1,1)_R+(1,0,0)_R+(0,1,0)_R=(2,2,1)_R$
$(-1,-1)_S=A-\vec{u}_1-\vec{u}_2=(1,1,1)_R-(1,0,0)_R-(0,1,0)_R=(0,0,1)_R$

c. No, perquè el punt $(2,0,2)_R$ no és del pla.
d. $(x,y,1)_R-(1,1,1)_R=(x-1,y-1,0)_R=(x-1)(1,0,0)_R+(y-1)(0,1,0)_R=(x-1)\,\vec{u}_1+(y-1)\,\vec{u}_2$ Per tant, les coordenades són $(x-1,y-1)_S$

e. $(x',y')_S=A+x'\vec{u}_1+y'\vec{u}_2=(1,1,1)_R+x'(1,0,0)_R+y'(0,1,0)_R=(1+x',1+y',1)_R$

f. Equacions implícites de r (tridimensionals): $\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=1 \end{cases}$
Equacions paramètriques de r (tridimensionals):
s'obtenen resolent el sistema anterior en funció d'un paràmetre, $(x,y,z)=(2,0,1)+\lambda(-1,1,0)$

Equacions implícites de r (bidimensionals, en la referència del pla):
substituint x, y i z per les seves expressions corresponents en x' i y', resulta x'+y'=0

Equacions paramètriques de r (bidimensionals, en la referència del pla):
per exemple, resolent l'equació anterior, $(x',y')=\lambda(-1,1)$

g. Equació implícita bidimensional: x'-y'=1
Equacions implícites tridimensionals:
substituint les variables x',y' per les seves expressions equivalents en x,y,z i afegint la condició z=1, resulta $\begin{cases} x-y=1 \\ z=1 \end{cases}$
Equacions paramètriques bidimensionals:
resolent x'-y'=1 en funció d'un paràmetre, $(x',y')=(1,0)+\lambda(1,1)$
Equacions paramètriques tridimensionals: $(x,y,z)=(1,0,1)+\lambda(1,1,0)$

3.12 a. $P=(x',y')_S$ significa que $\overrightarrow{AP}=x'(1,-1,0)+y'(1,1,-2)$. $\overrightarrow{AP}$ denota el vector amb origen en A (l'origen de la referència S) i extrem en P, o sigui $\overrightarrow{AP}=P-A=(x,y,z)-(1,0,0)$ Per tant, (x,y,z)=(1,0,0)+x'(1,-1,0)+y'(1,1,-2) = (1+x'+y',-x'+y',-2y').

b. Si P=(x,y,z) és del pla x+y+z=1, serà de la forma P=(x,y,1-x-y). Les coordenades $P=(x',y')_S$ són els coeficients de la combinació lineal:
(x,y,1-x-y)-(1,0,0)=x'(1,-1,0)+y'(1,1,-2) o equivalentment,
(x-1,y,1-x-y)=(x'+y',-x'+y',-2y') que escrit matricialment resulta:

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{Canvi de S a R}$$

Per resoldre aquest sistema seleccionem un menor d'ordre 2 amb determinant no nul, i l'invertim. Per exemple,

$$\begin{pmatrix} y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

c. equacions implícites: substituint x, y i z per les seves expressions en x',y' i z' (apartat a), s'obté que:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ z=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} (1+x'+y')+(-x'+y')+(-2y')=1 \\ -2y'=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} 1=1 \\ -2y'=3 \end{array}\right\} \rightarrow y'=-\frac{3}{2}$$

A partir de les implícites obtenim fàcilment les paramètriques: $(x', y') = (0, -\frac{3}{2}) + \lambda(1, 0)$

(x' pot prendre qualsevol valor, y' està determinat).

3.14 Es tracta d'expressar els vèrtex del triangle en la referència de la pantalla $S = \{O' ; u_1, u_2\}$ Com que $e_1 = 200 \cdot u_1$ i $e_2 = -200 \cdot u_2$, la matriu de canvi d'eixos (base) serà:

$$\begin{pmatrix} 200 & 0 \\ 0 & -200 \end{pmatrix}$$

I el canvi global vindrà descrit per les equacions:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 200 & 0 \\ 0 & -200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1.5 \\ y-2.5 \end{pmatrix}$$

o, el que és equivalent,

$$x' = 200x + 300$$
$$y' = -200y + 500$$

Concretament, els píxels corresponents als vèrtex del triangle són:
p_1=(300,500) p_2=(100,500) p_3=(300,100)

3.15 Prenent nova referència $S = \{O ; \overline{OA}, \overline{OB}\}$, i expressant el punt desconegut C en la nova referència:
C=$(x,y)_S$ on x i y es calculen resolent el sistema $(1,-0.2) = x(3.5, 2.1) + y(1.9, 0.7)$, o el que és equivalent, multiplicant per la matriu inversa:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 & 1.9 \\ 2.1 & 0.7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.82 \end{pmatrix}$$

El campament C té, per tant, coordenades (-0.7,1.82) en la nova referència, i això permet de localitzar-lo.