[título_] **Lección 3. Ejercicios**

[versión_] Octubre 2008
[materia_] Sistemas de referencia.
[asignatura_] Matemàtiques I
[centro_] E. T. S. d'Arquitectura del Vallès - Universitat Politècnica de Catalunya
[url_] http://upcommons.upc.edu/ocw http://etsav.upc.edu/assignatures/mat01
[ficheros_] L3_E_Cast.pdf L3_Sol_Cast.pdf

[descripción_] Problemas y soluciones sobre sistemas de referencia afines. Ecuaciones del cambio, efecto de la referencia en ecuaciones de planos y rectas, y referencias adaptadas a variedades afines.

E3.2 Soluciones.

Soluciones a algunos ejercicios de la lista E3.1

3.2 a. Las coordenadas (x',y') de (2,6) en la nueva base S se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones $(2,6)=x'(2,2)+y'(4,-2)$.

De forma equivalente, se pueden calcular también multiplicando por la matriz inversa de M, siendo

$$M=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

La inversa es $M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$, y las coordenadas (x',y') valen:

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

b. Las coordenadas (x,y) en base canónica de $(0,1)_B$ serán $(x,y)=0(2,2)+1(4,-2)=(4,-2)$. También se pueden obtener multiplicando el vector por la matriz M.

c.

$$\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$$

d.

$$\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'_1\\ u'_2\end{pmatrix}$$

3.3 a. La matriz pedida es M^{-1}, como en el ejercicio anterior.

b. Se obtendrán cambiando de base el vector que se obtiene al restar del punto (0,3) el nuevo origen de coordenadas (1,1), o sea:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De forma parecida, para un punto genérico $P=(p_1,p_2)$ tendremos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1-1 \\ p_2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c. La matriz pedida es M, como en el ejercicio anterior.

d.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para un punto genérico, la relación será:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.6 Las matrices solución son:

$B \to C$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D \to C$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$B \to D$
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$C \to B$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C \to D$
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$D \to B$
$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.7 a. La matriz es $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, la inversa de la matriz M que se forma disponiendo los vectores de la nueva base mediante columnas,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b. $Q=(3,2,0)=(1,1,1)_S$, como resultado de:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$$

c. De forma parecida, para un punto genérico P=(x,y,z) el cambio será:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+2y-z\\x-y\\x-y+z\end{pmatrix}$$

donde (x',y',z') representan las coordenadas de P en referencia S, o sea: $P=(x',y',z')_S$

d. La nueva referencia T introduce un cambio de origen, y ya no es suficiente con considerar solamente la matriz. Notemos mediante " (doble prima) las coordenadas de un punto genérico expresado en referencia T:

$$P=(x,y,z)_R=(x',y',z')_S=(x'',y'',z'')_T$$

Cambio de S a T: primero hay que expresar A en referencia S

$$\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$$ y por tanto $A=(2,-2,-2)_S$

y después $(x'',y'',z'')=(x',y',z')-(2,-2,-2)=(x'-2,y'+2,z'+2)$

Cambio de R a T: se obtiene encadenando los cambios de R a S y de S a T.

$R\to S \quad \begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+2y-z & x-y & x-y+z\end{pmatrix}$

$S\to T \quad (x'',y'',z'')=(x',y',z')-(2,-2,-2)=(x'-2,y'+2,z'+2)=(-x+2y-z-2,x-y+2,x-y+z+2)$

3.8

b. De S a C: De C a S:

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

c. De S a C:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

d. De C a S:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

3.11 Notemos por R la referencia tridimensional.

a. $(1,1,1)_R$ es el nuevo origen de coordenadas, y por tanto $(1,1,1)_R=(0,0)_S$

$(2,0,1)_R$: para obtener las nuevas coordenadas restaremos el nuevo origen y expresaremos el resultado como una combinación lineal de los vectores que forman la nueva base:
$(2,0,1)-(1,1,1)=(1,-1,0)=\vec{u}_1-\vec{u}_2=(1,-1)_S$

b. $(1,1)_S=A+\vec{u}_1+\vec{u}_2=(1,1,1)_R+(1,0,0)_R+(0,1,0)_R=(2,2,1)_R$
$(-1,-1)_S=A-\vec{u}_1-\vec{u}_2=(1,1,1)_R-(1,0,0)_R-(0,1,0)_R=(0,0,1)_R$

c. No, porque el punto $(2,0,2)_R$ no es del plano.
d. $(x,y,1)_R-(1,1,1)_R=(x-1,y-1,0)_R=(x-1)(1,0,0)_R+(y-1)(0,1,0)_R=(x-1)\,\vec{u}_1+(y-1)\,\vec{u}_2$ Por tanto, las coordenadas serán $(x-1,y-1)_S$

e. $(x',y')_S=A+x'\vec{u}_1+y'\vec{u}_2=(1,1,1)_R+x'(1,0,0)_R+y'(0,1,0)_R=(1+x',1+y',1)_R$

f. Ecuaciones implícitas de r (tridimensionales): $\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=1 \end{cases}$

Ecuaciones paramétricas de r (tridimensionales):
se obtienen resolviendo el sistema anterior en función de un parámetro, $(x,y,z)=(2,0,1)+\lambda(-1,1,0)$

Ecuaciones implícitas de r (bidimensionales, en la referencia del plano):
sustituyendo x, y, z por sus correspondientes expresiones en x', y', resulta x'+y'=0

Ecuaciones paramétricas de r (bidimensionales, en la referencia del plano):
por ejemplo, resolviendo la ecuación anterior $(x',y')=\lambda(-1,1)$

g. Ecuación implícita bidimensional: x'-y'=1
Ecuaciones implícitas tridimensionales:
sustituyendo las variables x',y' por sus expresiones equivalentes en x,y,z, y añadiendo la condición z=1, resulta $\begin{cases} x-y=1 \\ z=1 \end{cases}$

Ecuaciones paramétricas bidimensionales:
resolviendo x'-y'=1 en función de un parámetro, $(x',y')=(1,0)+\lambda(1,1)$

Ecuaciones paramétricas tridimensionales: $(x,y,z)=(1,0,1)+\lambda(1,1,0)$

3.12 a. $P=(x',y')_S$ significa que $\overrightarrow{AP}=x'(1,-1,0)+y'(1,1,-2)$. $\overrightarrow{AP}$ denota el vector con origen en A (el origen de la referencia S) y extremo en P, o sea $\overrightarrow{AP}=P-A=(x,y,z)-(1,0,0)$ Por tanto, (x,y,z)=(1,0,0)+x'(1,-1,0)+y'(1,1,-2) = (1+x'+y',-x'+y',-2y').

b. Si P=(x,y,z) es del plano x+y+z=1, será de la forma P=(x,y,1-x-y). Las coordenadas $P=(x',y')_S$ son los coeficientes de la combinación lineal:
(x,y,1-x-y)-(1,0,0)=x'(1,-1,0)+y'(1,1,-2) o equivalentemente,
(x-1,y,1-x-y)=(x'+y',-x'+y',-2y') Si se escribe en forma matricial, toma la forma:

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{Cambio de S a R}$$

Para resolver este sistema se selecciona un menor de orden 2 con determinante no nulo, y se invierte. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

c. ecuaciones implícitas: sustituyendo x,y,z por sus expresiones equivalentes en x',y',z' (ver apartado **a**), se obtiene:

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ z=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} (1+x'+y')+(-x'+y')+(-2y')=1 \\ -2y'=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 1=1 \\ -2y'=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow y'=-\frac{3}{2}$$

A partir de las implícitas fácilmente se obtienen las les paramétricas: $(x', y') = (0, -\frac{3}{2}) + \lambda(1,0)$

(x' puede tomar cualquier valor, y' está determinado).

3.14 Se trata de expresar los vértices del triángulo en la referencia de la pantalla $S = \{O' ; u_1, u_2\}$ Como que $e_1 = 200 \cdot u_1$ i $e_2 = -200 \cdot u_2$, la matriz de cambio de base (o ejes) será:

$$\begin{pmatrix} 200 & 0 \\ 0 & -200 \end{pmatrix}$$

Y el cambio global vendrá descrito por las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 200 & 0 \\ 0 & -200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1.5 \\ y-2.5 \end{pmatrix}$$

o, de forma equivalente,

$$x' = 200x + 300$$
$$y' = -200y + 500$$

Concretamente, los píxeles correspondientes a los vértices del triángulo son:
p_1=(300,500) p_2=(100,500) p_3=(300,100)

3.15 Tomando nueva referencia $S = \{O ; \overline{OA}, \overline{OB}\}$, y expresando el punto desconocido C en ésta, $C=(x,y)_S$, los valores desconocidos x e y se calculan resolviendo el sistema

$$(1, -0.2) = x(3.5, 2.1) + y(1.9, 0.7)$$

o, de forma equivalente, multiplicando por la matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 & 1.9 \\ 2.1 & 0.7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.82 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas del campamento resultan ser C=(-0.7,1.82) en la referencia S, lo cual permite situarlo sobre el plano.