

**[títol\_] Lliçó 5. Exercicis****[versió\_]** Novembre 2008**[matèria\_]** Moviments**[assignatura\_]** Matemàtiques I**[centre\_]** E. T. S. d'Arquitectura del Vallès - Universitat Politècnica de Catalunya**[url\_]** <http://upcommons.upc.edu/ocw> <http://etsav.upc.edu/assignatures/mat01>**[fitxers\_]** L5\_E.pdf L5\_Sol.pdf**[descripció\_]** Problemes i solucions de moviments (isometries) al pla i a l'espai.**E5.1 Exercicis.**

5.1 Comproveu si són o no ortogonals les matrius següents. En cas afirmatiu, calculeu-ne la inversa corresponent.

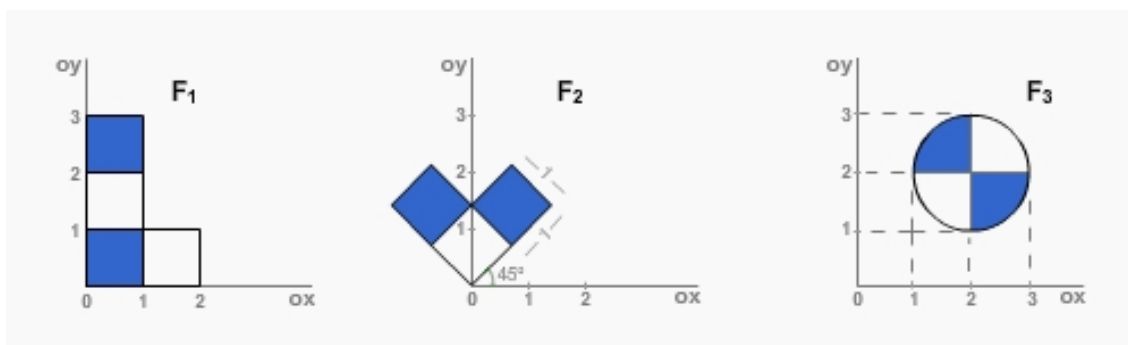
|  |  |  |
|--|--|--|
| <b>a.</b><br>$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$   | <b>b.</b><br>$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$   | <b>c.</b><br>$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  |
| <b>d.</b><br>$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$  | <b>e.</b><br>$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ | <b>f.</b><br>$\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ |
| <b>g.</b><br>$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$  | <b>h.</b><br>$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$                  |  |
| <b>i.</b><br>$\begin{pmatrix} \frac{2+3\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{-3+2\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{-3+2\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{4} & \frac{6+\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix}$ | <b>j.</b><br>$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$       |  |

5.2 Digueu si les afinitats donades per les següents equacions són o no moviments.

|   |  |
|---|--|
| <p>a.</p> $f(x,y) = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right)$ | <p>b.</p> $f(x,y) = \left( -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 2, \frac{1}{2}x + \frac{-1}{2}y - 1 \right)$ |
| <p>c.</p> $f(x,y,z) = \left( \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}, \frac{2x-y-z}{\sqrt{6}}, \frac{y-z}{\sqrt{2}} \right)$ | <p>d.</p> $f(x,y,z) = \left( \frac{2x-y+2z-1}{3}, \frac{-x+2y+2z}{3}, \frac{2x+2y-z+1}{3} \right)$     |

5.3 Les equacions que trobareu a continuació representen alguns moviments del pla. Identifiqueu-los i descriu-ne l'efecte geomètric. Dibuixeu els transformats de les peces  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_3$  de la figura.

|                       |                            |                          |                           |
|-----------------------|----------------------------|--------------------------|---------------------------|
| a. $f(x,y) = (-x, y)$ | b. $f(x,y) = (x, -y+2)$    | c. $f(x,y) = (-x-4, -y)$ | d. $f(x,y) = (-y+2, x)$   |
| e. $f(x,y) = (y, x)$  | f. $f(x,y) = (-y+2, -x+2)$ | g. $f(x,y) = (x+1, y-1)$ | h. $f(x,y) = (y+1, -x+1)$ |



5.4 Proposeu referències adaptades a les següents rectes i plans.

Rectes del pla:

|            |          |             |              |
|------------|----------|-------------|--------------|
| a. $x+y=0$ | b. $y=1$ | c. $x-2y=1$ | d. $3x+4y=0$ |
|------------|----------|-------------|--------------|

Rectes i plans de l'espai:

|                   |   |   |   |
|-------------------|---|---|---|
| e. $x+y+z=3$      | f. $x-y+z=1$                                      | g. $y-z=0$  | i. $z=5$                                  |
| k. $x = y = z$    | h. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ | i. $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ | j. $\begin{cases} x=y \\ z=5 \end{cases}$ |
| m. $x = 2y-1 = z$ |   |   |   |

5.5 Doneu la matriu, el vector de desplaçament i les equacions dels moviments del pla:

- a. Gir de centre  $(1,-1)$  i angle  $\pi/4$
- b. Gir de centre  $(2,0)$  i angle  $\pi/2$
- c. Simetria d'eix la recta que passa pel punt  $(2,0)$  i que forma un angle de  $\pi/4$  respecte de l'eix OX.
- d. Simetria d' eix la recta que passa pel punt  $(2,0)$  i que forma un angle de  $\pi/6$  respecte de l'eix OY.
- e. Simetria d'eix  $3x-4y=0$
- f. Simetria central respecte del punt  $(-1,1)$

**5.6** En les equacions dels moviments del pla que apareixen a continuació, heu de determinar els punts  $P$  tals que  $f(P)=P$  (punts fixos). Digueu també de quins moviments es tracta.

|                         |                        |                        |                        |
|-------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| a. $f(x,y)=(-y+1, x-2)$ | b. $f(x,y)=(y-1, x+1)$ | c. $f(x,y)=(-x-2, -y)$ | d. $f(x,y)=(y+1, x+1)$ |
|-------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|

**5.7** Matriu de la transformació ortogonal del pla que s'obté com a resultat d'aplicar successivament les transformacions:

1. Simetria axial deix  $y=x$ .
  2. Simetria axial d'eix  $x=0$ .
- Classifiqueu-la.

**5.8** Quina és la matriu de la transformació ortogonal que s'obté com a resultat d'aplicar:

1. Una simetria especular respecte del pla d'equació  $x=y$
  2. Una simetria axial respecte de la recta d'equació  $x=y=z$
- El resultat obtingut, depèn de l'ordre? De quin moviment es tracta?

**5.9** Doneu les matrius de les següents transformacions ortogonals de l'espai.

- a. Matriu de la simetria rotacional d'angle  $\pi/2$  i eix la recta generada pel vector  $(1,1,0)$
- b. Matriu del gir d'angle  $\pi/6$  i eix la recta generada pel vector  $(\sqrt{3}, 0, 1)$
- c. Matriu de la simetria rotacional d'angle  $\pi/4$  i eix la recta generada pel vector  $(-\sqrt{3}, 0, 1)$
- d. Matriu de la simetria especular respecte del pla  $x+\sqrt{3}z=0$

**5.10** Doneu les equacions dels següents moviments de l'espai.

- a. Simetria especular respecte del pla  $x+z=1$
- b. Gir d'angle  $\pi/3$  i d'eix la recta  $x=y, z=1$
- c. Simetria rotacional d'angle  $\pi/4$ , eix  $z=y=1$  i punt fix  $(0,1,1)$
- d. Gir d'angle  $\pi/6$  i eix la recta  $x-1=y=z+1$
- e. Simetria especular respecte del pla  $x+y+z=3$
- f. Simetria rotacional d'angle  $\pi/2$ , sabent que  $f(1,1,1)=(1,1,1)$  i  $f(2,2,2)=(0,0,0)$ .

**5.11** Classifiqueu els moviments del pla següents:

a.  $f(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+1-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}\right)$

b.  $f(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}\right)$

5.12 Classifiqueu les transformacions ortogonals que tenen per matriu:

|   |   |
|---|---|
| <p>a.</p> $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$   | <p>b.</p> $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$     |
| <p>c.</p> $\begin{pmatrix} \frac{2+3\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{-3+2\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{-3+2\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{4} & \frac{6+\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix}$ | <p>d.</p> $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$  |
| <p>e.</p> $\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   | <p>f.</p> $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ |

Quins són els seus elements geomètrics característics (plans de simetria, eixos de gir i angles)

5.13 Digueu quins moviments representen les equacions següents. Establiu-ne els punts P tals que f(P)=P (punts fixos).

|  |
|--|
| <p>a.</p> $f(x,y,z) = \left( \frac{x+\sqrt{3}y+2\sqrt{3}}{2}, z+1, \frac{-\sqrt{3}x+y}{2} \right)$                                     |
| <p>c.</p> $f(x,y,z) = \left( \frac{3x+2y+\sqrt{3}z-4}{4}, \frac{x-\sqrt{3}z+4}{2}, \frac{\sqrt{3}x-2\sqrt{3}y+z+4\sqrt{3}}{4} \right)$ |
| <p>d.</p> $f(x,y,z) = \left( \frac{3x-2y+\sqrt{3}z}{4}, \frac{x-\sqrt{3}z+2}{2}, \frac{\sqrt{3}x+2\sqrt{3}y+z}{4} \right)$             |

5.14 Trobeu els punts Q tals que f(Q)=-Q (punts inversos respecte de f) pels moviments:

|  |   |
|--|---|
| <p>a.</p> $f(x,y) = (-x+2 \quad -y+2)$ | <p>b.</p> $f(x,y) = \left( \frac{3x+4y+5}{5}, \frac{4x-3y+10}{5} \right)$ |
|--|---|

|   |  |
|---|--|
| <b>c.</b><br>$f(x,y,z) = \left( \frac{x+\sqrt{3}y}{2}, z, \frac{-\sqrt{3}x+y}{2} \right)$ | <b>d.</b><br>$f(x,y,z) = \left( \frac{x-2y-2z+3}{3}, \frac{-2x+y-2z}{3}, \frac{-2x-2y+z-3}{3} \right)$ |
|---|--|

**5.15** Comproveu que la composició de dues simetries axials del pla equival a un gir, de centre el punt d'intersecció dels eixos, i angle el doble del que formen els eixos. Què passa si aquests són paral·lels?

**5.16** Si s'aplica primer una simetria axial, i a continuació un gir amb centre sobre el seu eix, quin moviment del pla en resulta? I si s'executen les mateixes operacions en ordre invers?

**5.17** Raoneu per què el concepte de punt fix (i.e. punts  $P$  tals que  $f(P)=P$ ) no depèn de la referència de treball. Doneu una demostració analítica d'aquest fet.

**5.18** Un punt  $Q$  és invers respecte d'un moviment  $f$  si  $f(Q)=-Q$ . La propietat de ser invers respecte de  $f$ , depèn de la referència de treball? Justifiqueu la resposta amb exemples.