

Señales y Sistemas I

Transformada de Fourier

Antonio Bonafonte
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)
<antonio.bonafonte@upc.edu>

con la colaboración de Asunción Moreno

Otoño 2008
v. (29 de mayo de 2009)

Índice general

2. Transformada de Fourier	1
2.1. Series y Transformada de Fourier	1
2.1.1. Autofunciones de los S.L.I.	2
2.1.2. Series de Fourier	4
2.1.3. Transformada de Fourier	10
2.1.4. Representación de la Transformada de Fourier.	15
2.1.5. Aplicación a S.L.I.	17
2.2. Convergencia de la transformada de Fourier	18
2.2.1. Convergencia puntual	19
2.2.2. Convergencia cuadrática	20
2.3. Generalización de la transformada de Fourier	20
2.4. Propiedades	22
Linealidad	22
Simetrías: paridad	22
Hermicidad	23
Convolución	25
Dualidad	28
Retardo	30
Producto	31
Modulación	32
Escalado	34
Derivación	35
Multiplicación por t	37
Integración	38
Teorema de Parseval	39
2.5. Transformada de Fourier de señales periódicas.	42
2.5.1. De series de Fourier a transformada de Fourier.	42

2.5.2.	De la transformada de Fourier a las series de Fourier	44
2.5.3.	Fórmula de Poisson	47
2.6.	Muestreo	49
2.6.1.	Muestreo ideal	50
2.6.2.	Interpolación en el muestreo ideal	52
2.6.3.	Muestreo real	54
2.7.	Limitación en tiempo y en frecuencia	56
2.7.1.	Limitación en banda: efecto en las discontinuidades	56
2.7.2.	Enventanado	62
2.8.	Resumen de Transformadas de Fourier y Propiedades	63
2.9.	Problemas propuestos	66

Capítulo 2

Transformada de Fourier

En el tema I, vimos que, como cualquier señal $x(t)$ puede ponerse como combinación lineal de funciones $\delta(t)$ y $\delta(t-t_0)$, el conocimiento de $h(t) = T[\delta(t)]$ caracteriza a cualquier sistema lineal e invariante. Sin embargo, la función $\delta(t)$, desde el punto de vista experimental, no es muy práctica: no es fácil generar una señal (asociada a una magnitud física) tal que su duración tienda a cero y su amplitud a infinito. Además, muchos sistemas sólo se comportan como lineales e invariantes para un rango limitado de amplitudes.

Vamos a estudiar ahora la respuesta de un S.L.I. a una función exponencial compleja e^{st} , (s complejo) y en particular la respuesta a las exponenciales imaginarias ($e^{j2\pi ft}$). Veremos en este tema, de la mano de las series y transformadas de Fourier, como la mayoría de las señales de interés pueden representarse como combinaciones lineales de exponenciales complejas. Por tanto, la respuesta de un S.L.I. a las exponenciales complejas nos servirá para conocer la respuesta a cualquiera de estas señales. Podríamos utilizar funciones senoidales, en vez de exponenciales complejas, pero estas últimas simplifican el tratamiento matemático.

Aunque estamos introduciendo la transformada de Fourier para caracterizar los S.L.I., esta es sólo una de las motivaciones. La transformada de Fourier nos permitirá analizar las señales desde un punto de vista distinto, facilitando la comprensión de muchos procedimientos utilizados en telecomunicaciones, tales como la modulación, la multiplexación, o la representación digital de las señales.

Además, la transformada de Fourier nos proporcionará las primeras herramientas para la *síntesis de sistemas*: en el tema 1, aprendimos a analizar sistemas, por ejemplo, determinar la respuesta de S.L.I. a entradas, mediante la convolución. Sin embargo, no podemos *deconvolucionar*, es decir, buscar la respuesta impulsional que ha de tener un sistema para que transforme una entrada en una salida.

2.1. Series y Transformada de Fourier

En este apartado se definirán las series y la transformada de Fourier. En primer lugar, en el apartado 2.1.1 veremos cuál es la respuesta de un sistema lineal e invariante a la exponencial compleja $e^{j2\pi f_0 t}$ y, a partir del resultado, la respuesta a funciones como el $\cos(2\pi f_0 t)$, que son combinación lineal de exponenciales complejas, para distintos valores de f_0 .

En el apartado 2.1.2 veremos como las series de Fourier permiten expresar señales periódicas

como combinación lineal de exponenciales complejas. Y en el apartado 2.1.3 veremos como la transformada de Fourier permite representar mediante exponenciales complejas señales no periódicas.¹

Finalmente, en el apartado 2.1.5, se utilizan estos resultados para estudiar la salida de una señal, periódica o no, expresada mediante combinación lineal de exponenciales complejas, a través de un sistema lineal e invariante.

2.1.1. Autofunciones de los S.L.I.

Dada una transformación lineal \mathbf{A} , definida en un espacio vectorial V :

$$\mathbf{A} : V \longrightarrow V$$

se dice que un vector x es un *vector propio* o *autovector* si se cumple que

$$\mathbf{A}x = \lambda x \tag{2.1}$$

λ se denomina *valor propio* o *autovalor*. Frecuentemente los *autovectores* forman una base del espacio vectorial y por tanto, el conocimiento de los autovectores y autovalores permite conocer el resultado de la transformación lineal para cualquier vector del espacio vectorial.

La convolución es una transformación lineal en el espacio vectorial de las funciones. Las exponenciales complejas e^{st} son *autofunciones* de la ecuación de convolución. Es decir, si en un sistema lineal e invariante entra $x(t) = e^{st}$, la salida es proporcional a la entrada, $y(t) = \alpha x(t)$.

En efecto,

$$e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau}_{H_{LB}(s)} \tag{2.2}$$

Fijémosnos que la integral es una constante, en el sentido que no depende del tiempo. Para una exponencial concreta de entrada, es decir, para un valor concreto de s , la integral es una constante, un número. La salida del sistema lineal invariante es, efectivamente, $x(t)$ afectado por esa constante.

A $H_{LB}(s)$ se le llama transformada de Laplace bidireccional. En el caso que el sistema sea causal, ($h(t) = 0$ para $t < 0$), tendríamos $H_L(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt$, que se conoce como transformada de Laplace.

En particular, si $s = j2\pi f_0 t$, la entrada es una exponencial imaginaria, $e^{j2\pi f_0 t}$, y la salida será:

$$e^{j2\pi f_0 t} * h(t) = e^{j2\pi f_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f_0 t} h(t) dt}_{H(f_0)} \tag{2.3}$$

¹Esto es cierto sujeto a condiciones de convergencia de series y transformadas

$H(f)$ es una función compleja de variable real (el resultado de la integral es un número complejo y f es real) y se conoce como la transformada de Fourier de $h(t)$. En general, la transformada de Fourier de $x(t)$, que llamaremos $X(f)$ se define como

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.4)$$

Respuesta a una señal senoidal

Ahora que ya sabemos como afecta a una exponencial imaginaria el paso por un sistema lineal e invariante, podemos ver cual es el efecto de cualquier señal que sea combinación lineal de exponenciales imaginarias.

Estudiemos primero un caso concreto, en el que la señal sea una senoidal. Sea un sistema lineal e invariante caracterizado por su respuesta impulsional $h(t)$, y sea $H(f)$ la transformada de Fourier de $h(t)$. A el sistema se le aplica una señal senoidal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

Expresemos $x(t)$ como combinación lineal de exponenciales imaginarias:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$$

$x(t)$ es combinación lineal de dos exponenciales imaginarias $e^{j2\pi f_0 t}$ y la salida será la combinación lineal de las mismas exponenciales afectadas, por la constante $H(f)$:

$$y(t) = \frac{1}{2}H(f_0)e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}H(-f_0)e^{-j2\pi f_0 t}$$

Asumiendo que $h(t)$ es real, $H(f_0)$ y $H(-f_0)$ están relacionados por la propiedad de la *hermicidad* de la transformada de Fourier: $H(-f_0) = H^*(f_0)$. En efecto:

$$\begin{aligned} H^*(f_0) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi f_0 t} dt \right)^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) (e^{-j2\pi f_0 t})^* dt = \{h(t) = h^*(t) \text{ por ser real}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{j2\pi f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi(-f_0)t} dt = H(-f_0) \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} H(f_0) &= |H(f_0)| e^{j\angle H(f_0)} \\ H(-f_0) &= |H(f_0)| e^{-j\angle H(f_0)} \end{aligned}$$

y la salida, $y(t)$, es

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} |H(f_0)| e^{j\angle H(f_0)} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} |H(f_0)| e^{-j\angle H(f_0)} e^{-j2\pi f_0 t} \\ &= |H(f_0)| \left(\frac{1}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \angle H(f_0))} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \angle H(f_0))} \right) \\ &= |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \angle H(f_0)) \end{aligned}$$

Se puede observar que cuando en cualquier sistema lineal e invariante entra una señal senoidal, la salida es una señal senoidal, de la *misma* frecuencia. El sistema lo único que hace es amplificar o atenuar su amplitud y añadir una componente de fase, es decir, un retardo.

Si la señal de entrada tuviera una cierta fase $\hat{x}(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$, podemos expresar la fase como un retardo y, dada la invarianza del sistema, aplicar ese retardo a la salida. Es decir:

$$\hat{x}(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \cos\left(2\pi f_0\left(t + \frac{\phi}{2\pi f_0}\right)\right) = x(t + t_0)$$

siendo $t_0 = \frac{\phi}{2\pi f_0}$. Por tanto, la salida $\hat{y}(t)$ será $y(t + t_0)$:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= y(t + t_0) = |H(f_0)| \cos(2\pi f_0(t + t_0) + \angle H(f_0)) \\ \hat{y}(t) &= |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \phi + \angle H(f_0)) \end{aligned}$$

La figura 2.1 ilustra el paso de exponencial compleja, imaginaria o una función senoidal por un sistema lineal e invariante.

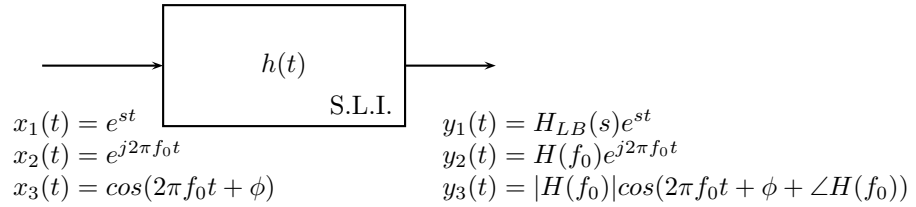


Figura 2.1: Efecto de un sistema lineal e invariante sobre funciones exponenciales y senoidales

2.1.2. Series de Fourier

En este apartado veremos como las series de Fourier permiten expresar señales periódicas como combinación lineal de exponenciales complejas.

Sea $x(t)$ una señal periódica, con periodo $T_0 = 1/f_0$. Bajo ciertas condiciones de convergencia $x(t)$ puede representarse como combinación lineal de exponenciales complejas:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (2.5)$$

El término $k = 0$, c_0 , es una constante e indica la componente continua, el valor medio de la señal.

Los términos $k = \pm n$, $c_{-n}e^{-j2\pi n f_0 t} + c_n e^{j2\pi n f_0 t}$, son periódicos, de frecuencia $n f_0$ y periodo T_0/n . A f_0 , se le denomina *frecuencia fundamental* de la señal.

Otras representaciones

Si $x(t)$ es real, imponiendo en la ecuación (2.5) que $x(t) = x^*(t)$, puede verse que $c_k = c_{-k}^*$ (ejercicio). Entonces, el término n y el término $-n$ pueden agruparse. Escribiendo $c_n = |c_n|e^{j\phi_n}$ y por tanto $c_{-n} = |c_n|e^{-j\phi_n}$

$$\begin{aligned} & |c_n|e^{-j(2\pi n f_0 t + \phi_n)} + |c_n|e^{j(2\pi n f_0 t + \phi_n)} \\ &= 2|c_n| \cos(2\pi n f_0 t + \phi_n) \\ &= 2|c_n| \cos \phi_n \cdot \cos(2\pi n f_0 t) - 2|c_n| \sin \phi_n \cdot \sin(2\pi n f_0 t) \\ &\equiv a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t) \end{aligned}$$

Por tanto, las series de Fourier pueden expresarse también como suma de senos y cosenos, de frecuencias *armónicas*, es decir, múltiplos de la frecuencia fundamental, f_0 .

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi k f_0 t) \quad (2.6)$$

con la siguiente relación entre coeficientes:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_k &= 2|c_n| \cos \phi_n \\ b_k &= 2|c_n| \sin \phi_n \end{aligned} \quad (2.7)$$

Puede observarse que si $x(t)$ es par, forzosamente los coeficientes b_k deberán ser nulos. Y si $x(t)$ es impar, se anularán los coeficientes a_k , incluyendo a_0 .

Cálculo de los coeficientes

Asumiendo que para una señal $x(t)$ periódica, la expresión de la serie de Fourier es correcta, ¿cómo podemos calcular los coeficientes c_k ? Como veremos las exponenciales complejas de armónicos distintos son *ortogonales*. Por ello, mediante el producto escalar de una exponencial compleja con $x(t)$, podremos determinar la contribución (coeficiente) de esa exponencial:

Definiendo el producto escalar de señales periódicas, con periodo $T_0 = 1/f_0$ como

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t)y^*(t)dt \quad (2.8)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\langle x(t), e^{j2\pi m f_0 t} \rangle &= \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) e^{-j2\pi m f_0 t} dt \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t} \right) e^{-j2\pi m f_0 t} dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi m f_0 t} dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \langle e^{j2\pi k f_0 t}, e^{j2\pi m f_0 t} \rangle
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Como hemos adelantado, los distintos fasores son ortogonales. Si $k = m$, el producto escalar vale 1:

$$\langle e^{j2\pi k f_0 t}, e^{j2\pi k f_0 t} \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} dt = 1$$

Y si $k \neq m$, el producto escalar se anula, ya que integramos una exponencial compleja (es decir, un seno más un coseno), de periodo submúltiplo de T_0 , en un intervalo T_0 . En cada periodo el seno y el coseno tienen área nula. Veámoslo analíticamente, llamando $r = k - m$,

$$\begin{aligned}
\langle e^{j2\pi k f_0 t}, e^{j2\pi m f_0 t} \rangle &= \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} e^{j2\pi(k-m)f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} e^{j2\pi r f_0 t} dt \\
&= \frac{1}{T_0} \frac{e^{j2\pi r f_0 t} \Big|_{-T_0/2}^{T_0/2}}{j2\pi r f_0} = \frac{1}{T_0} \frac{e^{j2\pi r f_0 T_0/2} - e^{-j2\pi r f_0 T_0/2}}{j2\pi r f_0} \\
&= \frac{1}{T_0} \frac{\sin(\pi r)}{\pi r f_0} = \text{sinc}(r)
\end{aligned}$$

que se anula si $r \neq 0$. Nótese que aunque hemos integrado entre $\pm T_0/2$, el mismo resultado se obtiene con cualquier intervalo de longitud T_0 .

Continuando con la resolución de la expresión (2.9), todos los términos del sumatorio son nulos, salvo cuando $k = m$, en cuyo caso vale T_0 , por tanto,

$$\begin{aligned}
\langle x(t), e^{j2\pi m f_0 t} \rangle &= \dots \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \langle e^{j2\pi k f_0 t}, e^{j2\pi m f_0 t} \rangle \\
&= \dots + 0 + 0 + c_m + 0 + \dots = c_m
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Por tanto,

$$\boxed{c_m = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) e^{-j2\pi m f_0 t} dt} \tag{2.11}$$

El intervalo de integración, de duración T_0 , puede elegirse arbitrariamente según convenga.

E 2.1.1 (R) Determine el desarrollo en serie de Fourier (DSF) de un tren de pulsos rectangulares de anchura T_1 y periodo T_0 ($T_1 < T_0$):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - kT_0}{T_1}\right)$$

■ **Solución:** Al ser una señal periódica de periodo T_0 , se puede expresar mediante desarrollo en serie de Fourier,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kt/T_0}$$

El valor de los coeficientes es:

$$c_m = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) e^{-j2\pi m f_0 t} dt$$

La expresión queda más sencilla si elegimos como intervalo de integración entre $\pm T_0/2$ pues así, sólo queda una parte de la integral no nula:

$$c_m = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \Pi\left(\frac{t}{T_1}\right) e^{-j2\pi m f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-j2\pi m f_0 t} dt$$

(Ejercicio: calcule los coeficientes eligiendo como intervalo de integración $[t_0, t_0 + T_0]$, con $t_0 \in (0, T_1)$.)

Si $m = 0$,

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} dt = \frac{T_1}{T_0}$$

y si $m \neq 0$,

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{T_0} \cdot \frac{1}{-j2\pi m f_0} \left(e^{-j2\pi m f_0 T_1/2} - e^{j2\pi m f_0 T_1/2} \right) \\ &= \frac{1}{T_0} \cdot \frac{1}{\pi m f_0} \sin(\pi m f_0 T_1) = \frac{T_1}{T_0} \cdot \frac{1}{\pi m f_0 T_1} \sin(\pi m T_1/T_0) = \frac{T_1}{T_0} \operatorname{sinc}(m T_1/T_0) \end{aligned}$$

Expresión que, de hecho, es también válida para c_0 .

Por tanto, $x(t)$ se expresa como combinación de exponenciales complejas, donde la exponencial m tiene frecuencia $m/T_0 = m f_0$, y la constante es $c_m = \frac{T_1}{T_0} \operatorname{sinc}\left(m \frac{T_1}{T_0}\right)$. Dependiendo de la relación entre T_0 y T_1 se toman unos u otros valores de la $\operatorname{sinc}(\cdot)$.

Como comprobación, ¿cuál es el desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$ si $T_1 = T_0$? Justifique el resultado.

La figura 2.2 muestra los coeficientes de la serie de Fourier para el caso $T_0 = 2T_1$.

Una representación alternativa para el eje de abscisas es indicar, en vez del índice m , la frecuencia de la exponencial compleja a la que modifica esa constante, es decir, $m f_0$:

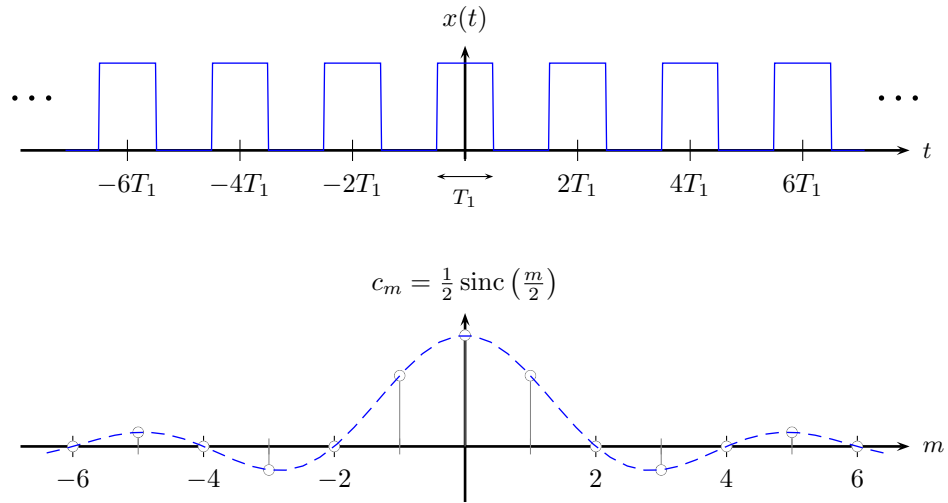
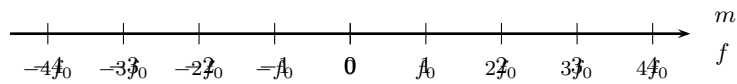


Figura 2.2: Coeficientes de Fourier de tren de pulsos



En esta representación se indica, de manera explícita la frecuencia de la señal periódica (frecuencia del primer coeficiente) y las frecuencias de los distintos componentes, facilitando la interpretación física de la señal sin necesidad de multiplicar los índices k por la frecuencia fundamental, f_0 , de la señal.

La figura 2.3 muestra el resultado de la serie Fourier, $\sum_{k=-N}^N c_k e^{j2\pi k f_0 t}$, en función de N . Se puede demostrar que la energía de la señal error, $e(t)$, definida como

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^N c_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

tiende a cero según crece el valor de N .

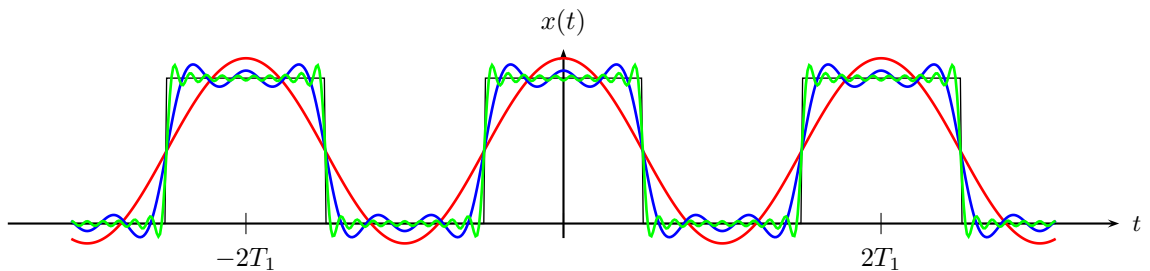


Figura 2.3: Suma de la serie de Fourier, en función del número de términos: $N \in (1, 5, 20)$

E 2.1.2 (R) Encuentre el desarrollo en serie de Fourier de un tren de deltas de Dirac, separadas T_0 :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

■ **Solución:** La señal puede expresarse como desarrollo en serie de Fourier,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kt/T_0}$$

con coeficientes c_k ,

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Por las propiedades de $\delta(t)$, la integral es el valor de la función en el origen,

$$c_k = \frac{1}{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0}$$

En este caso, todas las constantes c_k tienen el mismo valor; el desarrollo en serie buscado es:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kt/T_0}$$

La figura 2.4 ilustra este resultado. Obsérvese que hemos preferido etiquetar el eje abcisas con valores frecuenciales: el primer coeficiente, $k = 1$, lo hemos dibujado en un eje frecuencial, de la frecuencia de la exponencial compleja a la que multiplica c_1 , que es $\frac{1}{T_0}$.

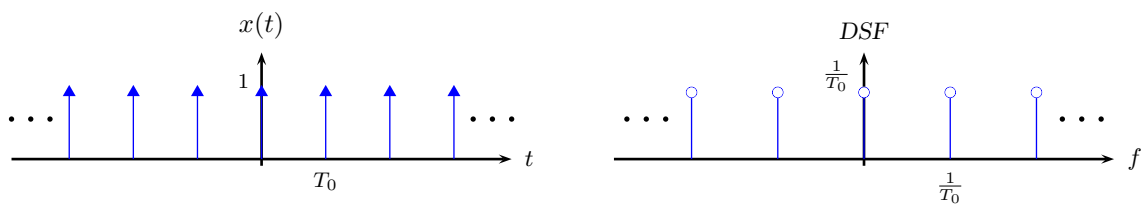
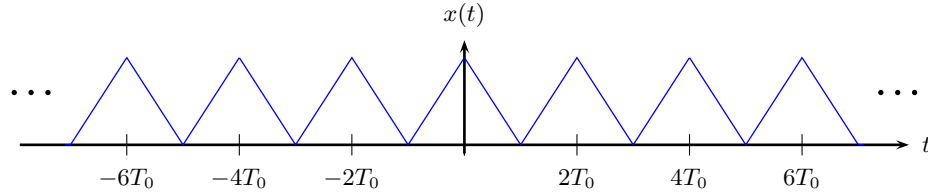


Figura 2.4: Coeficientes del Desarrollo en Serie de Fourier (DSF) de un tren de deltas

Nótese que hemos preferido utilizar frecuencias (en vez de índice) para mostrar los coeficientes de la serie de Fourier, facilitando deducir algunas observaciones interesantes. En particular, cuanto más espaciadas en tiempo están las deltas, más cercanas han de ser las frecuencias de las exponenciales complejas.

E 2.1.3 Calcule el desarrollo en serie de Fourier de $|\cos(2\pi f_0 t)|$. Expréselo como suma de exponenciales complejas y también como suma de funciones senoidales.

E 2.1.4 Sea $x(t)$ el tren de pulsos triangulares que se muestra en la figura:



Calcule su desarrollo en serie de Fourier y demuestre que puede expresarse como

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(2\pi(2k-1)\frac{t}{T}\right)$$

2.1.3. Transformada de Fourier

Las señales no periódicas también pueden ponerse como combinación lineal de exponenciales complejas. Por ejemplo, consideremos un pulso rectangular, $\Pi\left(\frac{t}{T_1}\right)$. Es como el ejemplo del tren de pulsos (figura 2.2), pero con la separación entre pulsos, $T_0 \rightarrow \infty$, es decir, con $f_0 \rightarrow 0$.

La figura 2.5 representa el resultado obtenido para la serie de Fourier del tren de pulsos (ejercicio E 2.1.1) para distintos valores de T_0 .

Como puede observarse, cuanto mayor es T_0 (pulsos más separados), más próximas están las frecuencias de las exponenciales complejas (kf_0). Y los coeficientes de estas exponenciales, $c_k = T_1 f_0 \text{sinc}(kT_1 f_0)$ se calculan a partir de valores próximos de la función sinc. En el límite, el sumatorio se transforma en integral, sumando un continuo de frecuencias. Por tanto, para señales no periódicas:

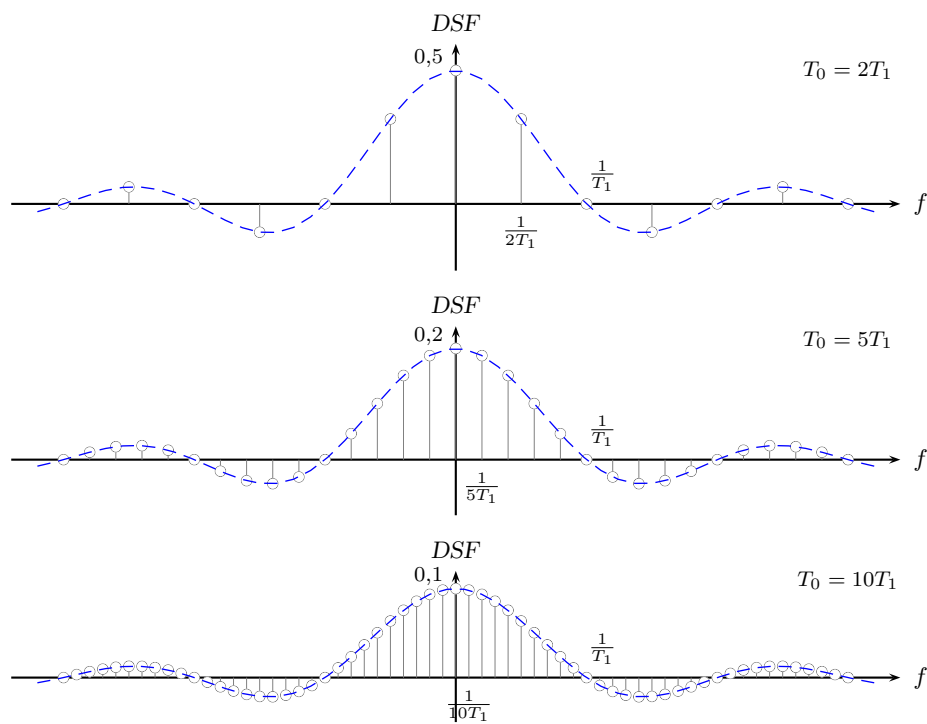
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad (2.12)$$

Si comparamos con las series de Fourier, ecuación (2.5), hemos cambiado la frecuencia kf_0 por f , y su constante de proporcionalidad, c_k , que multiplicaba a $e^{j2\pi k f_0 t}$, por una constante que hemos llamado $X(f)$, que multiplica a la exponencial $e^{j2\pi f t}$.

Calculo de $X(f)$

Para ver el valor de $X(f)$, procederemos análogamente a lo que hemos visto con las series, buscando el producto escalar con una exponencial compleja de una frecuencia determinada, f_r . Ahora, al ser señales no periódicas, definidas en \mathcal{R} , el producto escalar se define como

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \quad (2.13)$$

Figura 2.5: Coeficientes de Fourier de tren de pulsos en función del periodo de repetición T_0

El producto escalar de $x(t)$ por una exponencial compleja es:

$$\begin{aligned} \langle x(t), e^{j2\pi f_r t} \rangle &= \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f_r t} dt \\ &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \left(\int_{f=-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \right) e^{-j2\pi f_r t} dt \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por linealidad de las integrales, si éstas convergen podemos cambiar el orden de la integración:

$$\langle x(t), e^{j2\pi f_r t} \rangle = \int_{f=-\infty}^{\infty} X(f) \left(\int_{t=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(f-f_r)t} dt \right) df \quad (2.15)$$

Análogamente a lo que ocurría antes con las series, la integral interna se anula salvo que $f = f_r$, en cuyo caso la integral tiende a infinito ($\int_{t=-\infty}^{\infty} dt$).

De hecho, en el ejercicio E 2.1.9 veremos que esa integral se comporta como una delta de Dirac:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_s t} dt = \delta(f_s) \quad (2.16)$$

Por tanto, sustituyendo $\delta(f - f_r)$ en la expresión anterior,

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f_r t} dt = \int_{f=-\infty}^{\infty} X(f) \delta(f - f_r) df = X(f_r) \quad (2.17)$$

Por tanto $X(f)$ puede calcularse mediante el producto escalar de $x(t)$ y una exponencial compleja de frecuencia f :

$$\boxed{X(f) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt} \quad (2.18)$$

Esta expresión coincide con la que en la ecuación (2.4) ya habíamos llamado transformada de Fourier, a partir del estudio de exponenciales complejas a través de S.L.I.

El par formado por una señal y su transformada de Fourier se suele representar mediante una flecha, $x(t) \longleftrightarrow X(f)$. También se denota mediante \mathcal{F} la transformada de Fourier y mediante \mathcal{F}^{-1} su inversa: $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$

E 2.1.5 (R) Calculad la transformada de Fourier de un pulso:

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T \operatorname{sinc}(Tf) \quad (2.19)$$

■ Solución:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right\} &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{t=-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{e^{-j2\pi fT/2} - e^{j2\pi fT/2}}{-j2\pi f} = \frac{\sin \pi T f}{\pi f} = T \operatorname{sinc}(Tf)\end{aligned}$$

En particular, si $T = 1$:

$$\boxed{\Pi(t) \longleftrightarrow \operatorname{sinc}(f)} \quad (2.20)$$

La figura 2.6 ilustra esta transformada.

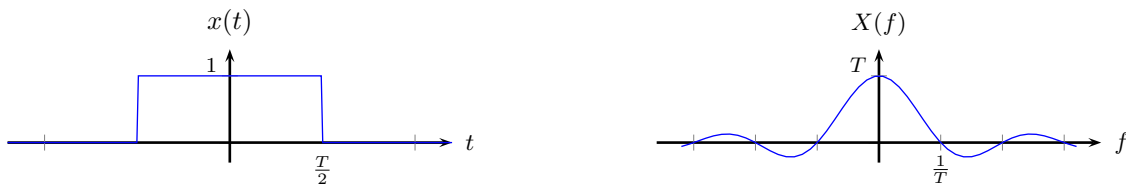


Figura 2.6: Transformada de Fourier de un pulso rectangular

E 2.1.6 (R) Comprobar la transformada de Fourier de una exponencial decreciente, real, y causal:

$$\boxed{e^{-\alpha t} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha + j2\pi f}} \quad (2.21)$$

■ Solución:

$$\begin{aligned}X(f) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} u(t) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} dt = \\ &= -\frac{e^{-(\alpha + j2\pi f)t}}{\alpha + j2\pi f} \Big|_{t=0}^{\infty} = \\ &= \frac{1}{\alpha + j2\pi f}\end{aligned}$$

E 2.1.7 (R) Determinar la transformada de Fourier de $\frac{1}{\pi t}$

■ **Solución:** Para calcular esta transformada de Fourier necesitaremos utilizar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\beta) d\beta = 1 \quad (2.22)$$

Esta expresión se demostró en los apuntes del tema 1, al estudiar funciones cuyo límite es $\delta(t)$.

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} \cos(2\pi ft) dt - j \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} \sin(2\pi ft) dt \end{aligned}$$

La primera de las integrales es nula, ya que se integra, en un intervalo par, una función impar (ya que $1/t$ es impar y multiplica a $\cos(2\pi ft)$ que es par). Por tanto,

$$\begin{aligned} X(f) &= -j \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} \sin(2\pi ft) dt \\ &= -j \int_{t=-\infty}^{\infty} 2f \text{sinc}(2ft) dt \end{aligned}$$

Aplicamos ahora el cambio de variable, $2ft \rightarrow \beta$. Fijémonos que los límites de la integral dependen del *signo* de f . En efecto, si $f > 0$, entonces

$$X(f) = -j \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\beta) d\beta = -j$$

Pero si $f < 0$:

$$X(f) = -j \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\beta) d\beta = j$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow -j \text{sgn}(f)} \quad (2.23)$$

Análogamente podemos calcular la señal $x(t)$ cuya transformada de Fourier es $X(f) = \frac{1}{j\pi f}$, obteniendo el siguiente par transformado:

$$\boxed{\text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}} \quad (2.24)$$

E 2.1.8 (R) Calcular la transformada de Fourier de una *gausiana*, $x(t) = e^{-\pi t^2}$

Nota:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

■ Solución:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t^2 + j2ft)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi((t+jf)^2 - (jf)^2)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+jf)^2} e^{-\pi f^2} dt = e^{-\pi f^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{\pi}t + j\sqrt{\pi}f)^2} dt \end{aligned}$$

Aplicando el cambio de variable $\sqrt{\pi}t + j\sqrt{\pi}f = \frac{x}{\sqrt{2}}$,

$$X(f) = e^{-\pi f^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

Como el valor de la integral es la unidad,

$$\boxed{e^{-\pi t^2} \longleftrightarrow e^{-\pi f^2}} \quad (2.25)$$

E 2.1.9 (R) Demostrar que $\delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} dt$

■ Solución:

$$\begin{aligned} \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} dt &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{t=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{j2\pi ft} dt = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{j2\pi ft} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}}{j2\pi f} = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{j\pi fa} - e^{-j\pi fa}}{j2\pi f} = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi fa)}{\pi f} = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} a \operatorname{sinc}(af) \end{aligned}$$

En los apuntes del tema I vimos que la función $\delta(\cdot)$ puede expresarse como límite de funciones, en particular, de la función $\operatorname{sinc}(\cdot)$. Por tanto,

$$\boxed{\int_{t=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} dt = \delta(f)}$$

2.1.4. Representación de la Transformada de Fourier.

A partir de la expresión de la transformada de Fourier de $x(t)$,

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

puede observarse que $X(f)$ es en general una función compleja, ya que consiste en una suma de números complejos; es decir, para cada valor de f , $X(f)$ es un número complejo. Véase por ejemplo la transformada de Fourier de la exponencial causal (ejercicio E 2.1.6).

Para representar $X(f)$ en función de la frecuencia f podría utilizarse la representación de las partes real e imaginaria de $X(f)$. No obstante, habitualmente proporciona más información representar el módulo, $|X(f)|$ y la fase, $\angle X(f)$.

E 2.1.10 (R) Representad el módulo y fase de la transformada de Fourier de $\Pi(t)$.

■ **Solución:**

Como $X(f) = \text{sinc}(f)$ es real, el módulo es el valor absoluto. En cuanto a la fase, si el número es positivo la fase es $\phi = 0$ y si es negativa, la fase es $\phi = \pi$.

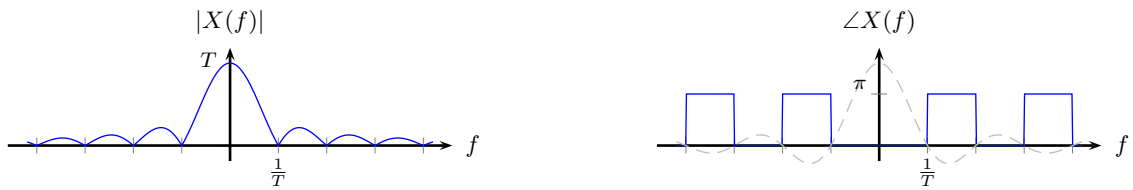


Figura 2.7: Módulo y fase de la transformada de Fourier de un pulso rectangular

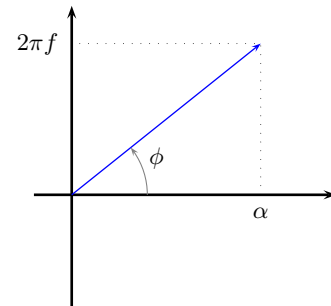
E 2.1.11 (R) Representad el módulo y fase de la transformada de Fourier de $e^{-\alpha t} u(t)$.

■ **Solución:**

Tal y como se vió en el ejercicio E 2.1.6,

$$e^{-\alpha t} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

Si dibujamos el complejo $\alpha + j2\pi f$, podemos ver que para $f = 0$, el modulo vale α y la fase $\phi = 0$. Según crece la frecuencia, el módulo crece hacia infinito, y la fase hacia $\phi = \frac{\pi}{2}$. Un punto característico es cuando $2\pi f = \alpha$, es decir, $f = \frac{\alpha}{2\pi}$, ya que en esa frecuencia el módulo vale $\alpha\sqrt{2}$, y la fase $\phi = \frac{\pi}{4}$. Y si suponemos que la frecuencia es negativa, el vector quedaría reflejado respecto el eje de abscisas: el módulo para f es el mismo que para $-f$, y la fase cambiaría el signo.



Como este complejo está en el denominador, el módulo va de α hasta cero. En cuanto a la fase, para frecuencias positivas varía desde 0 hasta $-\pi/2$. La figura muestra la representación de la transformada de Fourier.

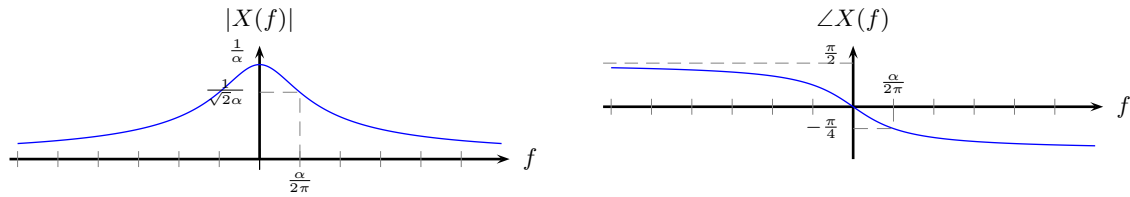


Figura 2.8: Módulo y fase de la transformada de Fourier de una exponencial decreciente, real y *causal*

2.1.5. Aplicación a S.L.I.

En el apartado 2.1.1 habíamos visto que la salida de un S.L.I, $h(t)$, a una exponencial compleja $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ es $y(t) = H(f_0)e^{j2\pi f_0 t}$, siendo $H(f)$ la transformada de Fourier de $h(t)$. En este apartado vamos a estudiar la salida a señales, periódicas o no, que hemos visto que pueden expresarse como combinación lineal de exponenciales complejas.

Señales periódicas

Si la entrada es una señal periódica, utilizando el desarrollo en serie de Fourier,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

aplicando linealidad, la salida será:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (h(t) \star e^{j2\pi k f_0 t}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(k f_0) e^{j2\pi k f_0 t} \quad (2.26)$$

Vemos que la expresión de la señal de salida, $y(t)$, responde a un desarrollo en serie de Fourier, con coeficientes $c_k H(k f_0)$. Es periódica y con el mismo periodo que la entrada, $1/f_0$.

Los S.L.I. no añaden componentes frecuenciales; en todo caso, pueden eliminarlos (si $H(k f_0) = 0$).

Señales no periódicas

Si la señal $x(t)$ no es periódica podemos expresarla como:

$$x(t) = \int_{f=-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

La salida al pasar por un sistema lineal, $h(t)$,

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * \left[\int_{f=-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \right] \\ &= \int_{f=-\infty}^{\infty} X(f) (h(t) * e^{j2\pi ft}) df \\ &= \int_{f=-\infty}^{\infty} X(f) H(f) e^{j2\pi ft} df \end{aligned}$$

En esta expresión hemos obtenido $y(t)$ expresada como combinación lineal de exponenciales complejas. Por tanto, $X(f)H(f)$ es su transformada de Fourier. Ésta es una propiedad fundamental de la transformada de Fourier:

$$\boxed{x(t) * h(t) \longleftrightarrow X(f)H(f)} \quad (2.27)$$

A la salida de un sistema lineal e invariante no pueden aparecer componentes frecuenciales que no existan a su entrada. A $H(f)$ se le llama respuesta frecuencial del sistema.

E 2.1.12 (R) Transformada de $\Delta(t)$.

■ **Solución:** Como $\Delta(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$, utilizando la propiedad de la convolución (ecuación (2.27)), y sabiendo el par transformado $\Pi(t) \longleftrightarrow \text{sinc}(t)$ (ejemplo E 2.1.5), tenemos

$$\boxed{\Delta(t) = \Pi(t) * \Pi(t) \longleftrightarrow \text{sinc}(t) \cdot \text{sinc}(t) = \text{sinc}^2(t)} \quad (2.28)$$



Figura 2.9: Transformada de Fourier de pulso triangular

2.2. Convergencia de la transformada de Fourier

El estudio análisis de la convergencia de series y transformadas de Fourier queda fuera del alcance de estos apuntes. No obstante, es conveniente conocer unas nociones, por ejemplo para no intentar calcular la transformada de Fourier de una señal que no existe.

En la expresión (2.18) definimos la transformada de Fourier de $x(t)$ como

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Ahora bien, $X(f)$ no existe para cualquier $x(t)$. Por ejemplo, si $x(t) = e^{-t}$ ni siquiera existe $X(0)$:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} dt \rightarrow \infty$$

También indicamos que a partir de la transformada de Fourier podemos recuperar la señal $x(t)$ mediante lo que se conoce como transformada inversa (ecuación (2.4)):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

Ahora bien, ¿qué significa precisamente el signo de igualdad?

El objetivo de esta sección es enunciar las condiciones de existencia de $X(f)$ y la condiciones de convergencia. Para ello, definiremos $x_a(t)$,

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

y veremos su relación con $x(t)$.

2.2.1. Convergencia puntual

Si $x(t)$ es absolutamente integrable, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$, entonces

1. Existe $X(f)$

En efecto,

$$\begin{aligned} |X(f)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)||e^{-j2\pi ft}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \end{aligned}$$

2. $x_a(t)$ coincide con $x(t)$ en todo punto en que la función sea continua y *de variación acotada*

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \int_{f=-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df = \\ &= \int_{f=-\infty}^{\infty} \left(\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) e^{j2\pi ft} df = \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{f=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)} df \right) d\tau = \end{aligned}$$

Habíamos visto (ejercicio E 2.1.9) que $\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi xy} dx = \delta(y)$. Por tanto, tomando $x = f$ e $y = t - \tau$

$$x_a(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

Por las propiedades de la función $\delta(\cdot)$, esa integral es $x(t)$ siempre que $x(\tau)$ sea continua y de variación acotada en el entorno de t , para poder aplicar el teorema del valor medio.

Una señal de *variación acotada* es aquella que en cualquier intervalo finito tiene un número de discontinuidades, máximos y mínimos finito. Por ejemplo, la función $\cos(1/t)$ no es de variación acotada porque el número de máximos en el entorno del origen no es finito.

E 2.2.1 Dibuje la función $x(t) = \cos(1/t)$. Justifique que no podemos calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(1/t)\delta(t)dt$.

2.2.2. Convergencia cuadrática

Sólo enunciaremos las condiciones. Si $x(t)$ es de energía finita, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$, entonces

1. Existe $X(f)$
2. El error cuadrático cometido al aproximar $x(t)$ por $x_a(t)$ es nulo. Es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_a(t)|^2 dt = 0$$

Nótese que estas condiciones son suficientes para la convergencia. Puede haber otras funciones (como $\frac{1}{t}$) que no cumplan estas condiciones pero que la transformada de Fourier converja.

2.3. Generalización de la transformada de Fourier

Podemos extender el concepto de la transformada de Fourier a otras señales si aceptamos la función $\delta(\cdot)$ en la transformada de Fourier.

Por ejemplo, si $X(f) = \delta(f)$,

$$x(t) = \int_{f=-\infty}^{\infty} \delta(f)e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi 0t} = 1$$

Por tanto,

$$\boxed{1 \longleftrightarrow \delta(f)} \tag{2.29}$$

Este par transformado nos indica una relación que ya hemos utilizado:

$$\delta(f) = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} dt$$

Notad que si $x(t) = 1$, no podemos calcular mediante integración directa ni siquiera $X(0)$,

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} 1e^{-j2\pi 0t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \rightarrow \infty$$

pero podremos hablar de la transformada de Fourier de la constante si admitimos $\delta(f)$ en su transformada.

Para este tipo de funciones, que no son absolutamente integrables ni cuadrado integrables, no es fácil la resolución directa de integral de la transformada de Fourier. Para su cálculo habitualmente utilizaremos propiedades de la transformada de Fourier y transformadas conocidas, o deberemos recurrir a límites.

E 2.3.1 (R) ¿Qué señal $x(t)$, tiene como transformada $X(f) = \delta(f - f_s)$?

■ **Solución:**

$$x(t) = \int_{f=-\infty}^{\infty} \delta(f - f_s) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi f_s t}$$

$$\boxed{e^{j2\pi f_s t} \longleftrightarrow \delta(f - f_s)} \quad (2.30)$$

E 2.3.2 (R) ¿Qué señal $x(t)$, tiene como transformada $X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_s) + \frac{1}{2}\delta(f + f_s)$?

■ **Solución:**

$$x(t) = \int_{f=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (\delta(f - f_s) + \delta(f + f_s)) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{2} e^{j2\pi f_s t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_s t} = \cos(2\pi f_s t)$$

$$\boxed{\cos(2\pi f_s t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f - f_s) + \frac{1}{2}\delta(f + f_s)} \quad (2.31)$$

E 2.3.3 (R) Transformada del escalón $u(t)$

■ **Solución:**

La función escalón no es absolutamente integrable ni cuadrado integrable. Sin embargo podemos relacionarla con la función $\text{sgn}(\cdot)$, para la que vimos (ejercicio E 2.1.7, ecuación (2.24)):

$$\text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

Utilizando que

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(t))$$

Tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(t)) \right) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Por tanto,

$$\boxed{u(t) \longleftrightarrow \frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}} \quad (2.32)$$

2.4. Propiedades

En este apartado vamos a presentar algunas de las propiedades más importantes de la transformada de Fourier.

Propiedad 1 (Linealidad)

$$\boxed{\alpha x(t) + \beta y(t) \longleftrightarrow \alpha X(f) + \beta Y(f)}$$

Esta propiedad se deriva directamente de la linealidad de la integral:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\alpha x(t) + \beta y(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x(t) + \beta y(t)) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned}$$

Propiedad 2 (Simetrías)

Propiedad 2.1 (Paridad)

$$\begin{aligned} x(t) \text{ par} &\iff X(f) \text{ par} \\ x(t) \text{ impar} &\iff X(f) \text{ impar} \end{aligned}$$

Para demostrarlo expresemos $X(-f)$ y veámos la relación con $X(f)$:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ X(-f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt = \{t = -\tau\} = \int_{\infty}^{-\infty} x(-\tau) e^{-j2\pi f\tau} (-d\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{aligned}$$

Si $x(t)$ es par, $X(f)$ también lo es:

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau = X(f)$$

Y si $x(t)$ es impar, también lo es $X(f)$:

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} -x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau = -X(f)$$

Propiedad 2.2 (Hermicidad)

$$\boxed{x(t) \text{ real} \iff X(f) \text{ hermítica, es decir } X(f) = X^*(-f)}$$

O expresado de otra forma,

$$\boxed{x(t) \text{ real} \iff |X(f)| \text{ par y } \angle X(f) \text{ impar}}$$

En efecto, si $X(f) = X^*(-f)$, tomando el módulo en ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned} |X(f)| &= |X^*(-f)| \\ &= |X(-f)| \end{aligned}$$

por lo que, efectivamente, el módulo es par. En cuanto a la fase, partiendo de la misma igualdad,

$$\begin{aligned} \angle X(f) &= \angle X^*(-f) \\ &= -\angle X(-f) \end{aligned}$$

por lo que la fase es impar. Véase por ejemplo el módulo y fase de una exponencial real, decreciente y causal, representando en la figura 2.8.

Para demostrar la hermicidad de la transformada de Fourier de señales reales, veamos primero un resultado que tiene su propia utilidad. Sea $x(t)$ una señal no necesariamente real. Entonces,

$$\boxed{x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-f)}$$

En efecto,

$$X^*(-f) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t} dt \right)^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt \right)^*$$

Como el conjugado de una suma (la integral) es la suma de conjugados,

$$X^*(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)e^{j2\pi ft})^* dt$$

y dado que el conjugado de un producto es el producto de conjugados,

$$X^*(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

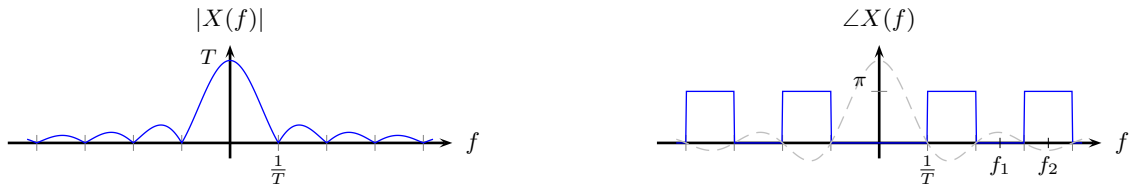
Si comparamos la parte derecha de la expresión con la definición de la transformada de Fourier vemos que estamos calculando la transformada de Fourier de $x^*(t)$. Y el valor de dicha transformada es $X^*(-f)$.

A partir de este resultado es inmediato demostrar la propiedad de la hermicidad. Si $x(t)$ es real,

$$\begin{aligned} x(t) &= x^*(t) \\ \mathcal{F}\{x(t)\} &= \mathcal{F}\{x^*(t)\} \\ X(f) &= X^*(-f) \end{aligned}$$

Debido a la simetría que presenta la transformada de Fourier de señales reales, habitualmente sólo se representan los valores positivos del módulo y de la fase de $X(f)$, y esto tanto en gráficas impresas, como en instrumentación (analizadores de espectro) o software de análisis (en particular, el programa que acompaña a “Senyals i Sistemes analògics: una introducció pràctica”). $X(f)$ para $f < 0$ no es que sea nulo, sino que puede obtenerse a partir de los valores para $f > 0$.

Un caso particular es cuando la transformada de Fourier es real. Por ejemplo, en el ejercicio E 2.1.10 se representaba el módulo y fase de $\mathcal{F}\{\Pi(\frac{t}{T})\} = T \text{sinc}(Tf)$:

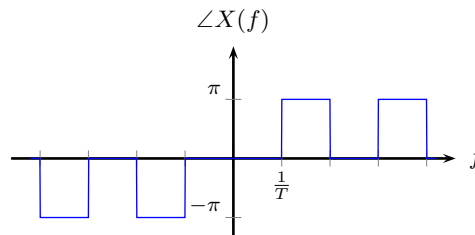


En la gráfica, no parece que la fase sea impar. Pero en realidad, sí lo es debido a que en un número complejo, la fase tiene una ambigüedad de $2k\pi$, es decir $|c|e^{j(\phi+2k\pi)} = |c|e^{j\phi}$

En particular, para las frecuencias f_1 y f_2 indicadas en la figura:

- $\angle X(f_1) = 0$ que es igual a $-\angle X(-f_1) = 0$.
- $\angle X(f_2) = \pi$ mientras que $-\angle X(-f_2) = -\pi$. Pero los valores de fase $\pm\pi$ son equivalentes: $e^{j\pi} = e^{-j\pi}$.

Comprobamos que al ser $\Pi(\frac{t}{T})$ real, podríamos expresar la fase (utilizando la ambigüedad $2k\pi$) como una función impar, tal y como se ilustra en la figura.



Propiedad 2.3 (Paridad para señales reales) Si $x(t)$ es real y par, $X(f)$ es real y (propiedad 2.1) par. Si $x(t)$ es real e impar, $X(f)$ es imaginaria y (propiedad 2.1), impar.

Consideremos el primer caso, $x(t)$ real y par.

$$X(f) = X^*(-f) \quad \text{por ser } x(t) \text{ real}$$

$$X(f) = X(-f) \quad \text{por ser } x(t) \text{ par}$$

Por tanto,

$$X^*(-f) = X(-f) \quad \text{o lo que es lo mismo, } X^*(f) = X(f)$$

Los únicos números complejos que son iguales a sus conjugados son los números reales; $X(f)$ ha de ser real.

La demostración del segundo caso, $x(t)$ impar, es similar. De las propiedades de paridad y hermicidad tenemos que, si $x(t)$ es real e impar, $X^*(f) = -X(f)$. La igualdad sólo se cumple si $X(f)$ es imaginaria.

Propiedad 3 (Convolución)

$$\boxed{x(t) * h(t) \longleftrightarrow X(f) \cdot H(f)}$$

Esta propiedad, que ya fue demostrada en el apartado 2.1.5, ecuación (2.27), es muy importante en el análisis y síntesis de sistemas lineales e invariantes.

Como $x(t) * h(t)$ puede interpretarse como la salida del sistema $h(t)$ al ser excitado por la señal $x(t)$, la propiedad nos dice que si $x(t)$ la representamos como combinación lineal de exponenciales complejas de distinta frecuencia, entonces un sistema lineal e invariante, amplifica o atenúa la contribución de cada componente frecuencial. Un sistema lineal e invariante puede eliminar una componente frecuencial en f_0 ya que $H(f_0)$ puede ser 0, pero no puede crear una componente frecuencial en f_0 si $X(f_0)$ es nula. Nótese que esta multiplicación es compleja, por lo que de hecho supone un cambio de amplitud y fase de los componentes senoidales.

E 2.4.1 (R)

Sea una señal $x(t)$ real, que pasar por un sistema lineal e invariante cuya respuesta impulsional es $h(t)$. Expresa $x(t)$ como combinación lineal de funciones cosenos, con las amplitudes y fases adecuadas. Estudie como cambian estas amplitudes y fases al pasar por el sistema.

■ **Solución:** Para expresar $x(t)$ como combinación lineal de $\cos(\cdot)$, realizaremos un desarrollo muy similar al que se hizo en el apartado 2.1.2 con las series de Fourier.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^0 X(f)e^{j2\pi ft} df + \int_0^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable en la primera integral, $f \rightarrow -\hat{f}$,

$$\begin{aligned} x(t) &= - \int_{\infty}^0 X(-\hat{f})e^{-j2\pi \hat{f}t} d\hat{f} + \int_0^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_0^{\infty} X(-\hat{f})e^{-j2\pi \hat{f}t} d\hat{f} + \int_0^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_0^{\infty} \left(X(-f)e^{-j2\pi ft} + X(f)e^{j2\pi ft} \right) df \end{aligned}$$

Expresando $X(f)$ y $X(-f)$ en forma polar, e imponiendo las propiedades de simetría del módulo y fase de $X(f)$ para señales reales:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^{\infty} \left(|X(-f)|e^{j\angle X(-f)}e^{-j2\pi ft} + |X(f)|e^{j\angle X(f)}e^{j2\pi ft} \right) df \\ &= \int_0^{\infty} \left(|X(f)|e^{-j\angle X(f)}e^{-j2\pi ft} + |X(f)|e^{j\angle X(f)}e^{j2\pi ft} \right) df \\ &= \int_0^{\infty} |X(f)| \left(e^{-j(2\pi ft + \angle X(f))} + e^{j(2\pi ft + \angle X(f))} \right) df \\ &= \int_0^{\infty} 2|X(f)| \cos(2\pi ft + \angle X(f)) df \end{aligned}$$

Esta es una forma que quizá sea más intuitiva (aunque raramente utilizada) de la transformada de Fourier, donde se ve que una señal real se puede expresar como combinación lineal de cosenos, con las amplitudes y fases adecuadas.

En cuanto a la salida $y(t)$, tendrá la misma forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} 2|Y(f)| \cos(2\pi ft + \angle Y(f)) df \\ &= \int_0^{\infty} 2|X(f) \cdot H(f)| \cos(2\pi ft + \angle(X(f) \cdot H(f))) df \\ &= \int_0^{\infty} 2|X(f)| \cdot |H(f)| \cos(2\pi ft + \angle X(f) + \angle H(f)) df \end{aligned}$$

Como vemos, el paso por el S.L.I. produce un cambio de amplitud y fase de las componentes frecuenciales.

Además, la propiedad de convolución nos permite determinar como queremos que sea un sistema, $H(f)$, a la vista de la entrada y de la salida.

$$\boxed{H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad \forall f/X(f) \neq 0} \quad (2.33)$$

Un caso de particular interés es el filtrado, objeto de estudio del tema 3. Un filtro selectivo en frecuencia puede utilizarse para separar de una señal la parte que nos interesa de la que no, siempre que las dos partes no se *solapen* frecuencialmente.

Por ejemplo, supongamos que tenemos una señal $z(t)$ cuya transformada de Fourier se muestra en la figura 2.10. Esta señal contiene la señal *util* o *deseada*, $m(t)$, y otra señal que interferente o no deseada, $i(t)$. ¿Qué sistema debemos diseñar para obtener $m(t)$?

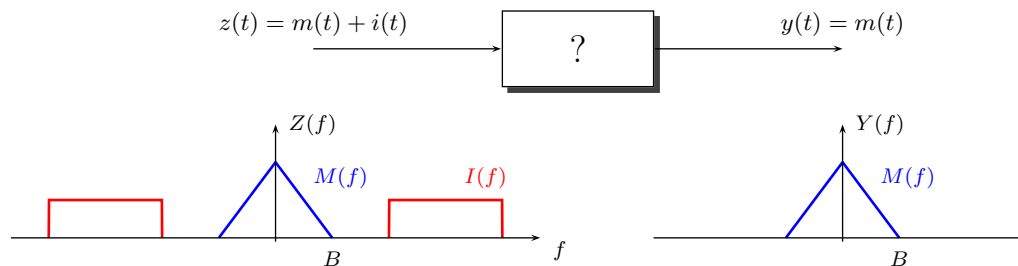
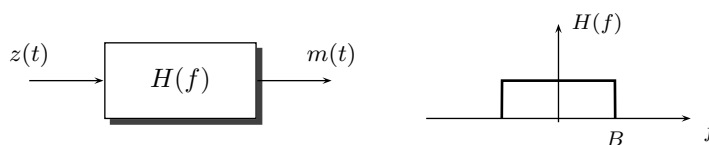


Figura 2.10: La propiedad de la convolución permite diseñar sistemas conociendo la entrada y la salida deseada.

Cómo en la salida no aparecen nuevas frecuencias, podemos utilizar un sistema lineal e invariante, $h(t)$. Dado que la salida queremos $y(t) = z(t) * h(t) = m(t)$, imponemos que $H(f) = 1$ en las frecuencias de la señal de interés, $M(f) \neq 0$. En las frecuencias de la *interferencia*, imponemos $H(f) = 0$. En el resto de frecuencias, como $Z(f)$ es nulo, la salida $Y(f)$ será nula sea cuál sea el valor de $H(f)$. Un criterio razonable es imponer que $H(f)$ sea también nulo en esas frecuencias: nuestro sistema está diseñado para obtener $m(t)$ pero podría ocurrir que aparezcan nuevas interferencias.

Por tanto, elegimos como sistema $H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$



A este sistema se le denomina *filtro paso bajo ideal*, porque deja pasar únicamente las frecuencias bajas. Es *ideal* porque es perfecto: las frecuencias que nos interesa las deja pasar sin tal como eran originalmente, y las que no nos interesan se eliminan totalmente. Como veremos en el tema III,

los filtros ideales no son realizables con ninguna tecnología, por lo que deberemos conformarnos con aproximaciones al filtro ideal. B es la frecuencia de corte, es decir, la frecuencia que separa entre las frecuencias que deja pasar el filtro (*banda de paso*) y las frecuencias que se eliminan (*banda atenuada*).

Propiedad 4 (Dualidad)

$$\boxed{x(t) \longleftrightarrow X(f) \quad \Longleftrightarrow \quad X(t) \longleftrightarrow x(-f)}$$

La motivación de esta propiedad viene de la similitud de la fórmula de la Transformada de Fourier y de la Transformada Inversa de Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

Por ello, si sabemos la transformada de Fourier de $x(t)$, podríamos utilizarlo para calcular la transformada inversa de esa misma función, evaluada en f , es decir, $x(f)$.

Antes de demostrar la propiedad, veamos un ejemplo.

E 2.4.2 (R) Calcular la transformada de Fourier de $\text{sinc}(t)$

■ **Solución:**

La transformada de Fourier de una $\text{sinc}(\cdot)$ es:

$$\mathcal{F}\{\text{sinc}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Sabemos que $\Pi(t) \longleftrightarrow \text{sinc}(f)$ (ejercicio E 2.1.5), es decir,

$$\Pi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(f)e^{j2\pi ft} df$$

Si a f le llamamos t y a t le llamamos f , nos queda,

$$\Pi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t)e^{j2\pi ft} dt$$

y para obtener exactamente la integral que buscamos, evaluamos el pulso en $-f$:

$$\Pi(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t)e^{j2\pi(-f)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

En este caso, como $\Pi(\cdot)$ es par,

$$\boxed{\text{sinc}(t) \longleftrightarrow \Pi(f)} \tag{2.34}$$

Partiendo de $\Pi(t) \leftrightarrow \text{sinc}(f)$ y sin calcular ninguna integral hemos derivado la transformada de Fourier de la función $\text{sinc}(t)$.

La demostración de la propiedad de dualidad no es más que una generalización del ejercicio E 2.4.2.

Queremos saber cuál es la transformada de Fourier de $X(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

sabiendo que $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

Intercambiando los nombres de t y f , tenemos:

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{j2\pi ft} dt$$

Y evaluando la expresión anterior en $-f$,

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

La expresión anterior dice que la transformada de Fourier de $X(t)$ es $x(-f)$, tal como queríamos demostrar.

E 2.4.3 (R) Sabiendo que $\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow -j \operatorname{sgn}(f)$ ¿Cuál es la transformada de Fourier de $\operatorname{sgn}(t)$?

■ **Solución:**

Aplicando la propiedad de dualidad,

$$-j \operatorname{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\pi(-f)}$$

Y por linealidad de la Transformada de Fourier, podemos multiplicar ambos lados por la constante j :

$$\operatorname{sgn}(t) \longleftrightarrow -\frac{j}{\pi f} \tag{2.35}$$

E 2.4.4 (R) Aplique la propiedad de dualidad al par $e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f - f_0)$

■ Solución:

$$X(t) = x(-f) \quad (2.36)$$

$$\boxed{\delta(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-2j\pi t_0 f}}$$

Hemos aplicado la propiedad de dualidad, y además, a la constante f_0 le hemos llamado, arbitrariamente t_0 , para que las unidades sean homogéneas.

Como caso particular, si $t_0 = 1$,

$$\boxed{\delta(t) \longleftrightarrow 1} \quad (2.37)$$

La propiedad de la dualidad puede utilizarse no sólo para obtener nuevos pares transformados a partir de pares conocidos, sino también para obtener, a partir de propiedades conocidas, propiedades *duales*, tal como veremos al demostrar las propiedades del producto (propiedad 6) y de la modulación (propiedad 7)

Propiedad 5 (Retardo)

$$\boxed{x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi t_0 f} X(f)}$$

La propiedad dice que, si retardamos una señal, su transformada de Fourier es la misma salvo un *término de fase lineal*. Es decir, el módulo de la transformada de Fourier de la señal retardada es:

$$|e^{-j2\pi t_0 f} X(f)| = |X(f)|$$

y su fase:

$$\angle(e^{-j2\pi t_0 f} X(f)) = -2\pi t_0 f + \angle X(f)$$

Como vemos, la fase de la transformada de la señal retardada es la de la señal sin retardar, añadiendo un término lineal con f . Si es un retardo ($t_0 > 0$) la pendiente es negativa. Si la señal se adelantase, la pendiente de la fase que se añade sería positiva.

La demostración *directa* es sencilla. Consiste en aplicar la fórmula de la transformada de Fourier sobre la señal de la cuál buscamos la transformada, en este caso $x(t - t_0)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt = \{(t - t_0) \rightarrow \tau\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f(\tau + t_0)} d\tau \\ &= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = e^{-j2\pi f t_0} X(f) \end{aligned}$$

Muchas de las propiedades de la transformada de Fourier pueden demostrarse por un método *indirecto*, que en ocasiones resulta más conveniente. Consiste en expresar $x(t)$ en función de su transformada de Fourier, manipular $x(t)$ para tener la señal de la que buscamos su transformada, e identificar su transformada de Fourier. Veamos la aplicación a esta misma propiedad:

Partimos de la expresión de $x(t)$ en función de $X(f)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

Por tanto, la expresión para $x(t - t_0)$ es:

$$x(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f(t-t_0)} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{-j2\pi ft_0} e^{j2\pi ft} df$$

Esta ecuación expresa una señal temporal, $x(t - t_0)$, como combinación lineal de las exponenciales complejas $e^{j2\pi ft}$. Las *constantes* que multiplican a esas exponenciales son su transformada de Fourier. Es decir:

$$\underbrace{x(t - t_0)}_{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(f)e^{-j2\pi ft_0}}_{Y(f)} e^{j2\pi ft} df$$

E 2.4.5 (R) A partir de la propiedad del retardo (propiedad 5), demuestre que un sistema que retarde la señal es lineal e invariante.

■ **Solución:**

Consideremos una señal $x(t)$ que pasa por un sistema retardador. Hemos visto que la transformada de Fourier de la salida es $X(f)e^{-j2\pi ft_0}$, por tanto, es el producto de la transformada de la entrada con otra función. Y eso equivale a una convolución en el tiempo, que es la operación que realizan los S.L.I.

En particular, como $Y(f) = X(f)e^{-j2\pi ft_0}$, calculando la transformada inversa,

$$y(t) = x(t) * \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-j2\pi ft_0} \right\}$$

La salida se encuentra mediante la convolución de la entrada con otra función, que llamamos respuesta impulsional del sistema lineal e invariante. En este caso, aplicando el par transformado de la ecuación 2.36, se obtiene

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-j2\pi ft_0} \right\} = \delta(t - t_0)$$

tal y como corresponde a un retardador.

Observando la representación frecuencial de la entrada/salida, podemos saber si es o no un sistema lineal e invariante.

Propiedad 6 (Producto)

$$\boxed{x_1(t) \cdot x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) * X_2(f)}$$

Para demostrarlo partimos de la propiedad de la convolución,

$$y_1(t) * y_2(t) \longleftrightarrow Y_1(-f) \cdot Y_2(f)$$

y aplicamos la propiedad de dualidad:

$$Y_1(t) \cdot Y_2(t) \longleftrightarrow y_1(-f) * y_2(-f)$$

Ahora bien, ésta no es una forma práctica de indicar una propiedad. Desearíamos expresar la transformada del producto en función de las transformadas de los factores; aquí se nos indica la transformada de un producto en función de las *transformadas inversas* de los factores. Para simplificarlo, llamemos $x_1(t) = Y_1(t)$ y $x_2(t) = Y_2(t)$.

De nuevo, por la propiedad de dualidad, podemos buscar la transformadas de $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} X_1(f) &= \mathcal{F}\{x_1(t)\} = \mathcal{F}\{Y_1(t)\} = y_1(-f) \\ X_2(f) &= \mathcal{F}\{x_2(t)\} = \mathcal{F}\{Y_2(t)\} = y_2(-f) \end{aligned}$$

Por lo que la expresión del producto queda:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) * X_2(f)$$

Propiedad 7 (Modulación)

Una operación muy frecuente en esquemas comunicaciones es la multiplicación de una señal (que contiene la información) por una señal senoidal, que se denomina portadora. La transformada de Fourier permite interpretar el resultado y entender los sistemas que se utilizan para recuperar la información.

Propiedad 7.1 (Modulación: exponencial compleja)

$$\boxed{x(t)e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f - f_0)}$$

Puede verse que esta propiedad es *dual* a la propiedad del retardo.

E 2.4.6 (R) Demostrar la propiedad de la modulación por una exponencial compleja.

■ **Solución:** Partimos de la propiedad del retardo,

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi t_0 f} X(f)$$

Aplicando la propiedad de dualidad a la propiedad anterior, y llamando α a la constante t_0 para que la notación no sea inconsistente, tenemos:

$$e^{-j2\pi \alpha t} X(t) \longleftrightarrow x(-f - \alpha)$$

Como ocurre siempre que aplicamos la propiedad de dualidad a una propiedad de la transformada de Fourier, el resultado que hemos obtenido no es fácil de verbalizar. Es más conveniente llamar a $X(t)$ como una función auxiliar, por ejemplo $y(t)$ y expresar la nueva propiedad en función de $y(t)$ y de su transformada $Y(f)$.

Nuevamente por dualidad,

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{X(t)\} = x(-f)$$

Por tanto, $x(-f - \alpha) = x(-(f + \alpha)) = Y(f + \alpha)$, y la expresión de la modulación es:

$$e^{-j2\pi\alpha t} y(t) \longleftrightarrow Y(f + \alpha)$$

Como vemos, α debe tener dimensiones frecuenciales. La forma habitual de enunciar esta propiedad se obtiene sustituyendo α por $-f_0$ (y utilizando de nuevo $x(t)$ para referirnos a una señal genérica):

$$\boxed{e^{j2\pi f_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(f - f_0)} \quad (2.38)$$

E 2.4.7 (R) Utilice la propiedad anterior para determinar $\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\}$.

■ **Solución:**

Simplemente debemos tomar $x(t) = 1$, y recordar que, según la ecuación (2.29), su transformada es $X(f) = \delta(f)$. Por tanto,

$$e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f - f_0)$$

E 2.4.8 (R) Demostrar los siguientes pares transformados:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(2\pi f_0 t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \\ \sin(2\pi f_0 t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f + f_0) \end{aligned}} \quad (2.39)$$

■ **Solución:**

Basta con representar el seno o el coseno en función de exponenciales complejas, y aplicar linealidad. Por ejemplo, para el segundo par:

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\right\} = \frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f + f_0)$$

E 2.4.9 Calcule la transformada de $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$.

Sugerencia: utilizad los pares anteriores y la propiedad del retardo.

Propiedad 7.2 (Modulación por una función senoidal)

$$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)$$

$$x(t) \sin(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2j}X(f - f_0) - \frac{1}{2j}X(f + f_0)$$

La demostración puede hacerse a partir de la propiedad de la modulación por una exponencial compleja ecuación (2.38), expresando el seno o coseno en función de exponenciales complejas, y aplicando linealidad; o bien aplicando la propiedad de la transformada del producto:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) \cos(2\pi f_0 t)\} &= X(f) * \left(\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \right) \\ &= \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0) \end{aligned}$$

La propiedad de la modulación permite *trasladar* una señal en frecuencia lo que tiene múltiples aplicaciones en telecomunicaciones. Una de ellas tiene que ver con la eficiencia de la transmisión vía radio. En efecto, para una transmisión eficiente, el tamaño de las antenas, L , debe ser $L > \lambda/10$, donde λ es la longitud de onda, relacionada con la frecuencia a través de la velocidad de propagación:

$$L > \frac{\lambda}{10} = \frac{c}{10f} \approx \frac{3 \cdot 10^7}{f} \text{ metros}$$

Teniendo en cuenta que en el audio los *graves* son componentes frecuenciales de menos de 50Hz, la longitud de la antena debería ser mayor que ¡¡600Km!! . Lo que hacen todos los sistemas de transmisión radioelectrica de audio es modular la señal para trasladar sus componentes frecuenciales a frecuencias mucho más altas. Por ejemplo, en transmisión de radio mediante AM (amplitud modulada), las señales se trasladan en torno a 500KHz por lo que el tamaño de las antenas han de ser

En los sistemas de telefonía móvil, como GSM, el codificador es muy complejo: la señal de voz se *digitaliza* y se utilizan modelos bastantes sofisticados de la señal para poder reducir los bits a transmitir. En cualquier caso, finalmente, esta señal digital se transmite como una señal analógica con frecuencias en torno a los 2GHz = $2 \cdot 10^9$ con lo que bastan antenas de unos pocos centímetros.

Propiedad 8 (Escala)

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

En efecto,

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j2\pi ft} dt = \{at \rightarrow \tau\} = \dots$$

Si $a < 0$ el cambio de variable invierte el intervalo de integración, por tanto, si $a < 0$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{x(at)\} &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)
 \end{aligned}$$

Puede verse que esta expresión también es válida para $a > 0$, donde el cambio de variable no invierte el intervalo de integración.

Esta propiedad indica que si una señal la comprimimos en el tiempo, la expandimos en frecuencia y viceversa. Supongamos por ejemplo una señal senoidal. Al comprimirla en el tiempo, el periodo dura menos, y su frecuencia fundamental es mayor.

Se corresponde también con la percepción que nos produce escuchar un disco de vinilo o un casete a distintas velocidades de reproducción: si la velocidad es lenta, la voz o música se vuelve grave, con componentes de baja frecuencia. Y si escuchamos el casete rebobinándose a doble velocidad, el sonido se vuelve agudo.

E 2.4.10 Calcular y representar la transformada de Fourier de $\Pi(t/T) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$. Suponer que $f_0 \gg 1/T$.

E 2.4.11 A partir de la transformada de Fourier de la exponencial causal y de la propiedad del escalado, demuestre que

$$\boxed{e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad (2.40)$$

Represente el módulo y fase de la transformada de Fourier.

Propiedad 9 (Derivación)

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f X(f)}$$

En efecto,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \right)$$

La derivada de una suma es la suma de las derivadas, por lo que (si la integral converge):

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t)}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (X(f) e^{j2\pi ft}) df \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left(\frac{d}{dt} e^{j2\pi ft} \right) df \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot j2\pi f \cdot e^{j2\pi ft} df
 \end{aligned}$$

Comparando con la expresión de la transformada inversa de Fourier, vemos que

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f X(f)$$

Vemos que un *derivador* es un sistema lineal e invariante, ya que en el dominio frecuencia la salida se multiplica por $H(f) = j2\pi f$.

E 2.4.12 (R) Compruebe en el dominio frecuencial que la derivada elimina la continua.

■ **Solución:** Como es bien sabido, al derivar eliminamos los valores constantes. Si definimos $y(t) = x(t) + C$,

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d(x(t) + c)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$$

Tomando transformada de Fourier:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} = j2\pi f Y(f)$$

Como $y(t) = x(t) + C \longleftrightarrow Y(f) = X(f) + C\delta(f)$,

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} = j2\pi f X(f) + j2\pi f C\delta(f)$$

Dado que $\psi(f)\delta(f) = \psi(0)\delta(f)$, en la expresión anterior $j2\pi f C\delta(f) = 0$. Por tanto,

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} = j2\pi f X(f) = \mathcal{F} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\}$$

E 2.4.13 (R) Sea $x(t)$ una señal continua, con $n-1$ derivadas continuas y con su n -ésima derivada discontinua. Demuestre que el comportamiento asintótico de la transformada de Fourier es:

$$\lim_{f \rightarrow \infty} |X(f)| \propto \frac{1}{f^{n+1}} \quad (2.41)$$

■ **Solución:** Si $x(t)$ tiene transformada de Fourier, esta tiene que ser decreciente en frecuencia, o a lo sumo tender a una constante, que indica que en $x(t)$ hay una $\delta(\cdot)$. Si fuera creciente, no convergería y no podríamos relacionar $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t} df$

Su derivada es continua y por el mismo motivo, su comportamiento asintótico ha de ser decreciente o a lo sumo, tender a una constante.

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f X(f)$$

Análogamente, la derivada n -ésima ha de ser decreciente en frecuencia, o a lo sumo tender a una constante.

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

Como la derivada enésima es discontinua, en la derivada de orden $n + 1$ aparece una función $\delta(t - t_0)$, siendo t_0 el instante de la discontinuidad:

$$\frac{d^{n+1} x(t)}{dt^{n+1}} = \alpha \delta(t - t_0) + r(t)$$

La transformada es:

$$\frac{d^{n+1} x(t)}{dt^{n+1}} \longleftrightarrow \alpha e^{j2\pi f t_0} + R(f) = (j2\pi f)^{n+1} X(f)$$

Como vemos, el módulo de esta transformada tiende a una constante, cuando $f \rightarrow \infty$, por tanto

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \left| \mathcal{F} \left\{ \frac{d^{n+1} x(t)}{dt^{n+1}} \right\} \right| = \lim_{f \rightarrow \infty} |2\pi f|^{n+1} |X(f)| = K$$

Despejando:

$$|X(f)| \lim_{f \rightarrow \infty} \propto \frac{1}{f^{n+1}}$$

Puede comprobarse como las funciones discontinuas, como $\Pi(t)$, $e^{-\alpha t} u(t)$, $u(t)$, etc., decrecen en el infinito como $\frac{\alpha}{f}$. Las funciones continuas, pero con derivada discontinua, como $\Delta(t)$, $e^{-\alpha|t|}$ etc., decaen como $\frac{\alpha}{f^2}$..

E 2.4.14 Utilice el resultado del ejercicio anterior (2.4.13) para estudiar el comportamiento asintótico de los coeficientes de la serie de Fourier de una señal periódica, en función de la continuidad de la señal básica y sus derivadas.

Propiedad 10 (Multiplicación por t)

$$tx(t) \longleftrightarrow \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f)$$

Esta es la propiedad dual a la derivación. En efecto a partir de

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f X(f)$$

aplicando la propiedad de dualidad obtenemos,

$$j2\pi t X(t) \longleftrightarrow \frac{dx(f)}{df} \Big|_{-f} = -\frac{dx(-f)}{df}$$

Llamando $y(t) = X(t)$ y sabiendo (por dualidad) que

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{X(t)\} = x(-f),$$

tenemos:

$$j2\pi t y(t) \longleftrightarrow -\frac{dY(f)}{df}$$

Finalmente, dividiendo ambos lados por $j2\pi$, y recuperando el nombre genérico $x(t)$,

$$tx(t) \longleftrightarrow \frac{j}{2\pi} \cdot \frac{dX(f)}{df}$$

Propiedad 11 (Integración)

$$\boxed{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{X(0)}{2} \delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}}$$

La integración $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, también puede interpretarse como un sistema lineal e invariante, tal y como vimos en el tema 1. Su respuesta impulsional, $h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$, es nula, si $t < 0$ o la unidad, si $t > 0$, dependiendo de que el intervalo de integración incluya o no el origen. Es decir, $h(t) = u(t)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t) \\ Y(f) &= X(f) \cdot \mathcal{F}\{u(t)\} = X(f) \cdot \left(\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right) \\ &= \frac{X(f)}{2} \delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f} \\ &= \frac{X(0)}{2} \delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f} \end{aligned}$$

E 2.4.15 (R) Sea $x(t) = \Pi(t)$. Definimos $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ y $z(t) = \frac{dy(t)}{dt}$.

Dibuje $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ y calcule sus transformadas de Fourier.

■ Solución:

La integral es nula hasta $-0,5$, crece con pendiente 1 hasta $0,5$, y es constante para $t > 0,5$. La figura 2.11 muestra la gráfica de $y(t)$.

En cuanto a $z(t)$, para $t < -\frac{1}{2}$ o para $t > \frac{1}{2}$, $y(t)$ tiene pendiente nula, por lo que $z(t)$ es nula. Y en el intervalo $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$, la pendiente es constante, de valor 1. Por tanto $z(t) = x(t)$.

En cuanto a las transformadas:

$$X(f) = \text{sinc}(f)$$

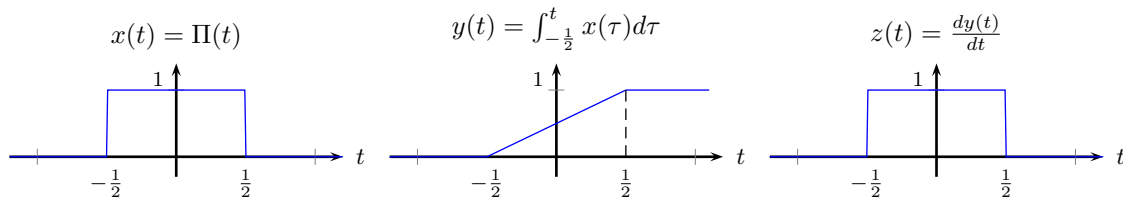


Figura 2.11: Resultado de aplicar a un pulso primero un integrador y a continuación un derivador.

Aplicando la propiedad de la integración (propiedad 11):

$$Y(f) = \frac{X(0)}{2} \delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f} = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{\text{sinc}(f)}{j2\pi f}$$

Para obtener $Z(f)$, aplicamos la propiedad de la derivación (propiedad 9)

$$Z(f) = j2\pi f Y(f) = j\pi f \delta(f) + \text{sinc}(f)$$

Dado que $j\pi f \delta(f) = 0$,

$$Z(f) = \text{sinc}(f) = X(f)$$

Propiedad 12 (Teorema de Parseval) *El producto escalar en el dominio temporal coincide con el del dominio transformado:*

$$\boxed{\begin{aligned} \langle x(t), y(t) \rangle &= \langle X(f), Y(f) \rangle \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df \end{aligned}}$$

En efecto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} \left(\int_{f=-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \right) y^*(t) dt$$

Si las integrales convergen, cambiando el orden de integración, y sacando $X(f)$ fuera de la integral en el tiempo,

$$\begin{aligned}
\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt &= \dots \\
&= \int_{f=-\infty}^{\infty} X(f) \left(\int_{t=-\infty}^{\infty} y^*(t)e^{j2\pi ft} dt \right) df \\
&= \int_{f=-\infty}^{\infty} X(f) \left(\int_{t=-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt \right)^* df \\
&= \int_{f=-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df
\end{aligned}$$

Para el caso particular de que $y(t) = x(t)$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x \\
\int_{-\infty}^{\infty} X(f)X^*(f)df &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df
\end{aligned}$$

Por tanto, la energía de la señal, es la integral del módulo al cuadrado tanto en el dominio temporal como frecuencial.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

La figura 2.12 ilustra esta propiedad para $x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$: el área bajo las dos curvas, es $E_x = A^2T$.

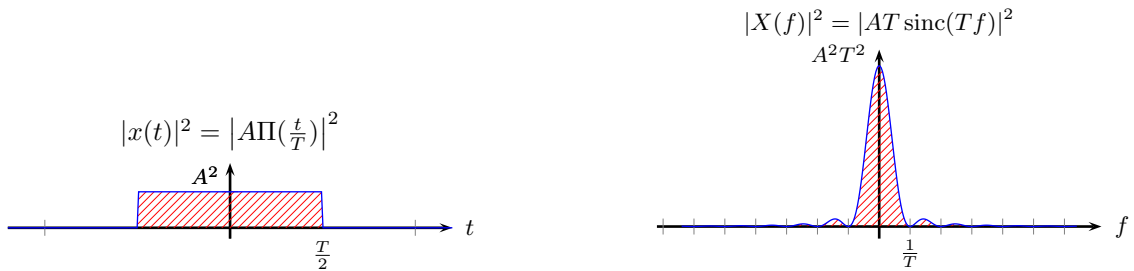


Figura 2.12: Transformada de Fourier de un pulso rectangular

Propiedad 12.1 (Parseval para señales periódicas) Para señales periódicas, el resultado es similar. Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales periódicas, de periodo $T_0 = \frac{1}{f_0}$, representables por su serie de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

Entonces, aplicando la definición de producto escalar para señales periódicas,

$$\begin{aligned} \langle x(t), y(t) \rangle &= \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) y^*(t) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t} \right) y^*(t) dt \end{aligned}$$

Como la integral de una suma es la suma de las integrales,

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} e^{j2\pi k f_0 t} y^*(t) dt \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right)^*$$

La integral es la expresión de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $y(t)$, d_k :

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k^*$$

En el tema IV, correlación y espectro, se estudiará el caso de dos señales periódicas de distinto periodo.

Para el caso particular de $y(t) = x(t)$,

$$\langle x(t), x(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) x^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} |x(t)|^2 dt = P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

La potencia media de la señal periódica puede calcularse en el tiempo o utilizando el módulo de los coeficientes de Fourier.

E 2.4.16 (R) Calcule la potencia media de $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) + \frac{A}{2} \cos(6\pi f_0 t)$

■ **Solución:**

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + \frac{A}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)} + \frac{A}{4} e^{j6\pi f_0 t} + \frac{A}{4} e^{-j6\pi f_0 t} \\ &= \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{A}{4} e^{j6\pi f_0 t} + \frac{A}{4} e^{-j6\pi f_0 t} \end{aligned}$$

Es una señal periódica, de frecuencia fundamental f_0 , con coeficientes c_k :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{A}{2} e^{j\phi} & c_{-1} &= \frac{A}{2} e^{-j\phi} \\ c_3 &= \frac{A}{4} & c_{-3} &= \frac{A}{4} \\ c_k &= 0 & \text{si } \forall k \neq \{\pm 1, \pm 3\} \end{aligned}$$

La potencia media de la señal es:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{16} + \frac{A^2}{16} = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{8} = \frac{5A^2}{8}$$

2.5. Transformada de Fourier de señales periódicas.

En el apartado 2.3 vimos como la generalización de la transformada de Fourier, permite hablar de la transformada de Fourier de $e^{j2\pi f_s t}$ (ecuación (2.30)). Fijémonos que ésta es una señal periódica. De hecho, dado que una señal periódica puede representarse como suma de exponenciales complejas (su serie de Fourier), podremos hablar de transformada de Fourier también para las señales periódicas. De esta forma, unificaremos la transformada de Fourier, que será válida tanto para señales periódicas como no periódicas.

2.5.1. De series de Fourier a transformada de Fourier.

Sea una señal $x(t)$ periódica, de periodo $T_0 = 1/f_0$, expresable mediante su serie de Fourier,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

Su transformada de Fourier será:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t} \right) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathcal{F} \{ e^{j2\pi k f_0 t} \} \end{aligned}$$

Utilizando el par transformado (2.30),

$$\boxed{X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - k f_0)} \quad (2.42)$$

Por tanto, podemos expresar la transformada de Fourier de una señal periódica como una secuencia de *deltas*, espaciadas según la periodicidad de la señal, $f_0 = 1/T_0$, y con área igual a los coeficientes de la serie de Fourier c_k .

La figura 2.13 muestra la representación, mediante la transformada de Fourier, del tren de pulsos del ejemplo E 2.1.1.

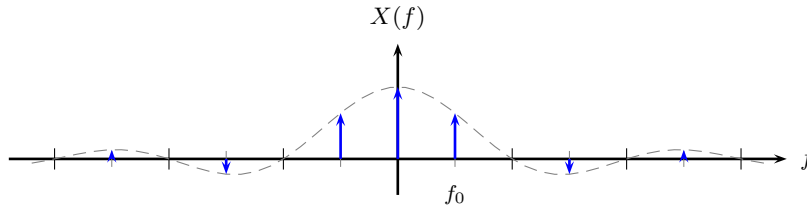


Figura 2.13: Transformada de Fourier de un tren de pulsos $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-kT_0}{T_0}\right)$

E 2.5.1 (R) Un ejemplo de particular interés es el *tren de deltas*, del cuál ya habíamos buscado su desarrollo en serie de Fourier (ejercicio E 2.1.2):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k f_0 t}$$

Calcule su *transformada* de Fourier,

■ **Solución:** El desarrollo es un caso particular, para $c_k = 1/T_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)\right\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k f_0 t}\right\} \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{e^{j2\pi k f_0 t}\} \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k f_0) \end{aligned}$$

Por tanto, la transformada de un tren de deltas es un tren de deltas:

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \longleftrightarrow \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k f_0)} \quad (2.43)$$

2.5.2. De la transformada de Fourier a las series de Fourier.

El par transformado anterior nos proporciona un método alternativo para el cálculo de los coeficientes de Fourier, o equivalentemente de la transformada de Fourier de una señal periódica $x(t)$, mediante la transformada de Fourier de la señal básica, $x_b(t)$, que consiste en un periodo de $x(t)$:

$$x_b(t) = x(t)\Pi\left(\frac{t-t_0}{T_0}\right)$$

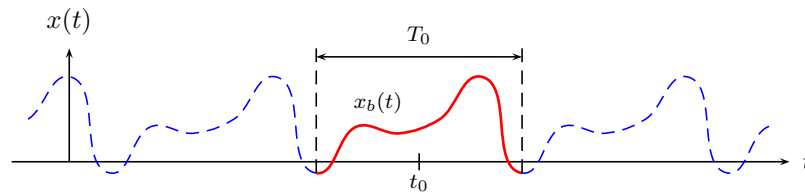


Figura 2.14: Representación de señal periódica a partir de una básica, $x_b(t)$

Tal y como se muestra en la figura 2.14 $x_b(t)$ es $x(t)$ durante un periodo T_0 centrado en un instante arbitrario t_0 . Podemos reconstruir la señal $x(t)$ a partir de $x_b(t)$ sumando versiones desplazadas $x_b(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \dots + x_b(t+T_0) + x_b(t) + x_b(t-T_0) + x_b(t-2T_0) + \dots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b(t-kT_0) \end{aligned}$$

Nótese que de hecho no es necesario que $x_b(t)$ sea estrictamente un periodo de la señal, sino que puede ser cualquier señal básica que nos permita reconstruir $x(t)$. En el ejercicio E 2.5.3 se utilizará como señal básica $x_b(t) = e^{-\alpha t} u(t)$.

Para calcular la transformada de Fourier de $x(t)$, expresamos los retardos como convolución con funciones $\delta(\cdot)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b(t-kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b(t) * \delta(t-kT_0) \\ &= x_b(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0) \end{aligned}$$

La transformada de Fourier de la convolución, es el producto de las transformadas (2.27),

$$\begin{aligned}
 X(f) &= X_b(f) \cdot \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \right\} = \\
 &= X_b(f) \cdot \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_0) = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X_b(f) \cdot \delta(f - kf_0) = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X_b(kf_0) \cdot \delta(f - kf_0)
 \end{aligned}$$

Comparando este resultado con la expresión (2.42), vemos que podemos expresar los coeficientes de la serie de Fourier c_k , en función de la transformada de Fourier de la señal *básica*:

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - kf_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X_b(kf_0) \cdot \delta(f - kf_0) \\
 c_k &= \frac{1}{T_0} X_b(kf_0)
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Por tanto,

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X_b \left(\frac{k}{T_0} \right) \cdot e^{j2\pi k \frac{t}{T_0}}} \tag{2.45}$$

E 2.5.2 (R) Calcular el desarrollo en serie de Fourier de un tren de pulsos de anchura T_1 , con periodo T_0 ($T_1 < T_0$).

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi \left(\frac{t - kT_0}{T_1} \right)$$

■ **Solución:** Este ejemplo ya lo habíamos resuelto mediante las fórmulas de series de Fourier ejercicio E 2.1.1). Ahora vamos a resolverlo utilizando la transformada de Fourier de un pulso, evitando resolver integrales.

Tomando como señal básica $x_b(t) = \Pi \left(\frac{t}{T_1} \right)$, de la que sabemos su transformada de Fourier (2.20),

$$\Pi \left(\frac{t}{T_1} \right) \longleftrightarrow T_1 \operatorname{sinc}(T_1 f)$$

podemos calcular la transformada de Fourier de $x(t)$ y los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$ aplicando la expresión (2.44):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t} \\
 X(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - kf_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X_b(kf_0) \cdot \delta(f - kf_0) \\
 c_k &= \frac{1}{T_0} X_b(kf_0) = \frac{1}{T_0} \text{sinc}(T_1 k f_0) = \frac{1}{T_0} \text{sinc}\left(k \frac{T_1}{T_0}\right)
 \end{aligned}$$

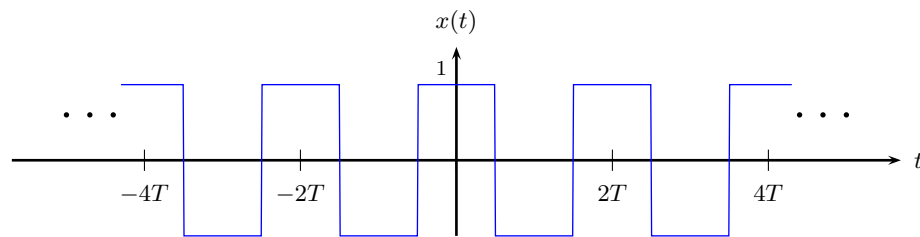
E 2.5.3 Dada la señal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t-kT_0)} u(t - kT_0)$$

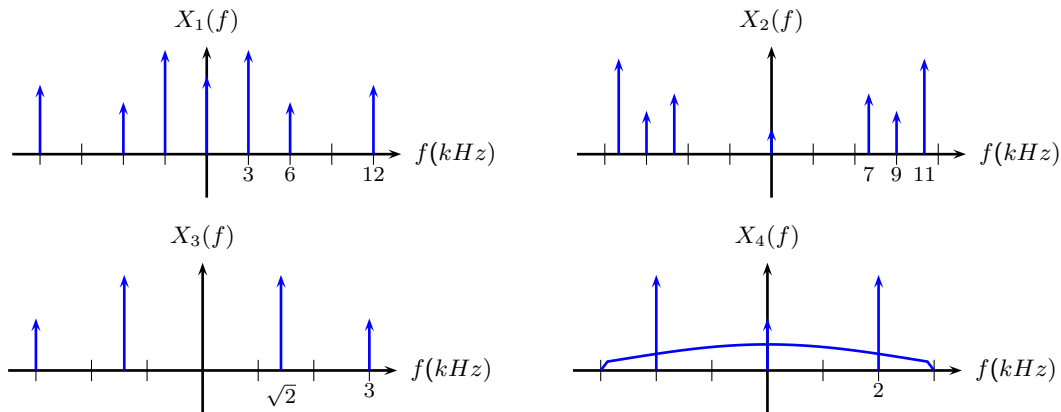
- Demuestre que $x(t)$ es periódica e indique su periodo.
- Calcule el valor de $x(t)$. ¿Cuál es el valor de $x(\frac{T_0}{2})$? Dibuje $x(t)$.
- Expresé $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}_b(t)$, donde $\hat{x}_b(t)$ está limitada a un periodo: $\hat{x}_b(t) = \hat{x}_b(t) \Pi\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right)$
- Calcular la transformada de Fourier de $x(t)$ partiendo de $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b(t - kT_0)$ y $x_b(t) = e^{-\alpha t} u(t)$
- Repita el cálculo de la transformada de Fourier, utilizando ahora $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}_b(t - kT_0)$

E 2.5.4 En el ejercicio E 2.1.3 se buscaban los coeficientes del desarrollo de Fourier de un tren de pulsos triangular utilizando las expresiones derivadas para su calculo de series de Fourier. Encuentre ahora el desarrollo en serie de Fourier utilizando la transformada de Fourier de una señal base.

E 2.5.5 Calcule la transformada de Fourier de la señal de la figura.



E 2.5.6 (R) Cada una de las siguientes figuras muestra la transformada de Fourier de una señal. Indique si son periódicas y en caso afirmativo, su periodo.



■ **Solución:** La transformada de Fourier de una señal periódica es un tren de deltas situadas en las frecuencias kf_0 . Obviamente la señal $x_4(t)$ no es periódica, ya que su transformada no está formada únicamente por deltas. Para el resto, si lo son, hemos de encontrar el mayor valor de f_0 tal que kf_0 se corresponda con las frecuencias de las distintas deltas.

- Para $x_1(t)$, $f_0 = 3$ kHz. El coeficiente c_3 y los coeficientes c_k con $k > 4$ son nulos. El periodo es por tanto de 0,33 ms.
- En cuanto a $x_2(t)$, $f_0 = 1$ kHz y el periodo 1 ms. Nótese que el valor $f_0 = 2$ kHz no es correcto ya que no existe k tal que $k \cdot f_0$ sea 7 kHz.
- $x_3(t)$ no es periódica, ya que la relación entre las frecuencias no es racional. No podemos encontrar f_0 tal que $mf_0 = \sqrt{2}$ y $nf_0 = 3$, ya que dividiendo ambas expresiones tendríamos

$$\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

y no hay ningún par de enteros para los que se cumpla la expresión.

2.5.3. Fórmula de Poisson

La fórmula de la suma de Poisson, relacionan sumas temporales con las transformada de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \Phi\left(\frac{k}{T_0}\right) \quad (2.46)$$

Una versión alternativa de esta fórmula se basa en la extensión periódica de una función, tal y como hemos utilizado en el apartado anterior:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \Phi\left(\frac{k}{T_0}\right) \cdot e^{j2\pi k \frac{t}{T_0}} \quad (2.47)$$

Esta segunda ecuación no es más que la ecuación (2.45), llamando $x_b(t) = \phi(t)$ y sin asumir que $\phi(t)$ dure un periodo. Particularizando para $t = 0$ obtenemos la expresión (2.46).

E 2.5.7 (R) Calcule la suma de la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(nT)$

■ **Solución:**

Si T es un número natural, la suma es la unidad ya que todos los sumandos son nulos salvo $\text{sinc}(0) = 1$. Asimismo, si $T \rightarrow \infty$, la suma también será la unidad.

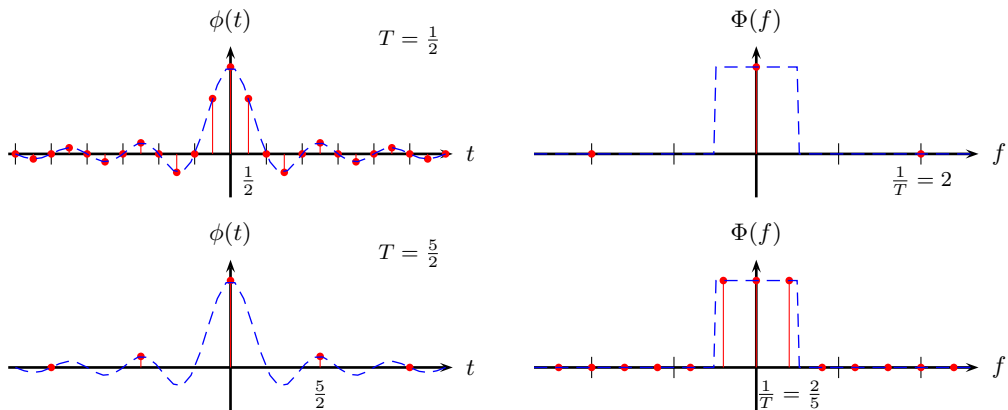
Para buscar la suma para un valor arbitrario de T podemos utilizar la fórmula de Poisson, con $\phi(t) = \text{sinc}(t)$ y $\Phi(f) = \Pi(f)$. Por tanto,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{k}{T}\right) \cdot e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$$

En $t = 0$;

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{k}{T}\right)$$

La figura muestra dos casos, para $T = \frac{1}{2}$ y para $T = \frac{5}{2}$



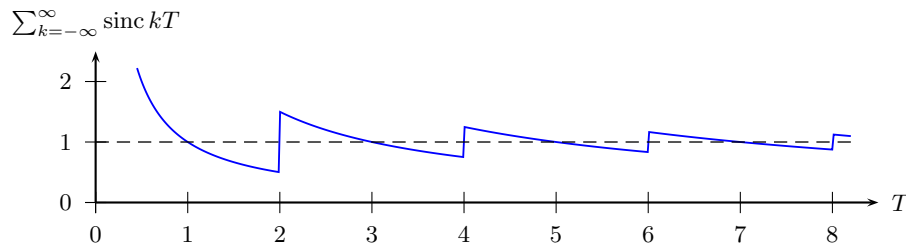
En el primer caso, el único término no nulo del sumatorio en frecuencia es el del origen; el valor de la serie es $2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{k}{T}\right) = 2$

En el segundo caso, hay tres términos no nulos en frecuencia, por lo que el resultado es $\frac{2}{5} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{6}{5}$

En general, el valor de la suma se deduce a partir del número de coeficientes espaciados $\frac{1}{T}$ que hay en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(kT) = \frac{1 + 2 \cdot \lfloor \frac{T}{2} \rfloor}{T}$$

siendo $\lfloor x \rfloor$ la función de *truncado*, cuyo valor es el mayor entero menor o igual que x . La suma presenta discontinuidades en valores pares de T , ya que se añaden nuevos términos en frecuencia.



2.6. Muestreo

Muestrear una señal $x(t)$ consiste en tomar *muestras* de ella, es decir, seleccionar algunos de sus valores, $x(t_k)$. En nuestra disciplina, nos interesa que las muestras representen lo más fideligamente posible la señal de forma que sea posible reconstruir la señal $x(t)$ a partir de las muestras tomadas. Habitualmente se utiliza muestreo *uniforme*, caracterizado porque las muestras se toman regularmente: $t_k = kT$. Al intervalo de muestreo T se le llama periodo de muestreo y a su inversa, $f_m = \frac{1}{T}$, frecuencia de muestreo. Por tanto, muestrear una señal $x(t)$ consiste en representarla mediante sus muestreas, $x(kT)$ ².

La utilidad de muestrear las señales es que se puede representar digitalmente, es decir, mediante una serie de números. Esto tiene varias ventajas. Por ejemplo, pueden almacenarse señales sin degradación. Un sistema de almacenamiento de señales de audio analógico es el disco de vinilo, en el que la información de una señal se representa mediante la profundidad del surco en el disco. El cabezal del tocadiscos cambia su altura en función de la profundidad del surco, induciendo una corriente en la bobina del cabezal. Sin embargo, cada vez que se reproduce el disco, la aguja que pasa por el surco lo modifica, “lo suaviza”, afectando las altas frecuencias. Cualquier modificación en el surco, por pequeña que sea, produce un efecto irreversible sobre la señal. En cambio, un sistema de almacenamiento digital, como un CD, representa la señal digitalmente, en definitiva mediante *bits* o señales binarias. Cada *bit* se almacena mediante un agujero diminuto, cuya profundidad es una u otra dependiendo de que se almacene un ‘1’ o un ‘0’. Aunque el disco se deteriore ligeramente, la profundidad debe cambiar significativamente para que la interpretación del bit cambie.

Lo mismo ocurre al transmitir la información: si la señal se representa mediante bits, de forma que se asocia una señal $x_0(t)$ para transmitir el bit 0 y otra $x_1(t)$ para enviar el bit 1, puede compensarse el efecto moderado del ruido en la transmisión mediante lo que se conoce como regeneradores, obteniéndose la señal original.

La representación digital permite también procesar la señal digitalmente, es decir, mediante sistemas informáticos y programas, lo que tiene algunas ventajas como la facilidad de generar varios sistemas (copias del programa). También se pueden utilizar técnicas de detección o corrección de errores, o de encriptado, y se puede utilizar la misma red y equipos para transmisión de señales analógicas (por ejemplo voz, audio, imagen, video) y datos, etc.

²Cuando se trabaja con señales y sistemas discretos, la muestra k de la señal, $x(kT)$, se suele representar como $x[k]$

¿Es posible representar una señal por sus muestras? A primera vista no lo es. A partir de unas muestras de $x(t)$, no parece que haya forma de saber cuál es la señal de la que provienen. Por ejemplo las tres gráficas de la figura 2.15, pasan por los mismos puntos, $x(nT)$, por lo que el valor de estas muestras no es suficiente para representar exactamente cada señal.

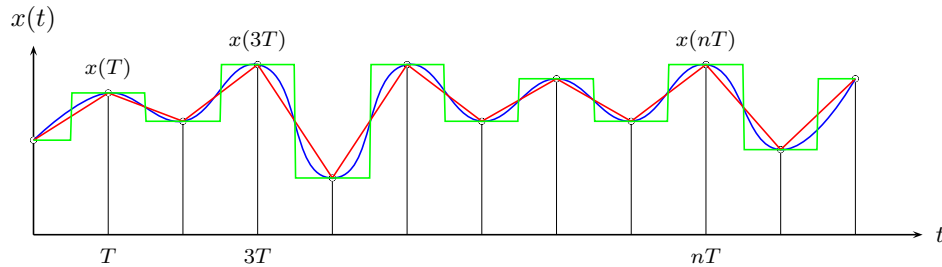


Figura 2.15: Varias señales pueden compartir los mismos valores en las muestras.

Sin embargo, dada una función continua, cuanto más próximas tomemos las muestras, es decir, cuanto mayor sea f_m , parece que representamos mejor la señal. El teorema del muestreo nos indicará que es posible recuperar *exactamente* $x(t)$ si las muestras se toman a una frecuencia suficientemente elevada y $x(t)$ es *limitada en banda*:

Propiedad 13 (Teorema de Nyquist o del muestreo) Sea $x(t)$ una señal limitada en banda, ($X(f) = 0$ si $|f| > B$). Entonces, es posible recuperar $x(t)$ a partir de sus muestras si estas se toman a una frecuencia $f_m > 2B$.

2.6.1. Muestreo ideal

Para demostrarlo vamos a intentar recuperar $x(t)$ mediante lo que se denomina *muestreo ideal* o, más precisamente, *reconstrucción ideal*.

Dadas las muestras de $x(t)$, $x(nT_m)$, construimos la señal

$$x_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_m)\delta(t - nT_m)$$

donde T_m y $f_m = 1/T_m$ se denominan *periodo de muestreo* y *frecuencia de muestreo*. Vamos a representar frecuencialmente $x_m(t)$, para ver si es factible recuperar $x(t)$. Podemos expresar $x_m(t)$ como

$$\begin{aligned} x_m(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_m)\delta(t - nT_m) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_m) \\ &= x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_m) \end{aligned}$$

Esto nos facilita buscar la transformada de Fourier de $x_m(t)$ en función de la de $x(t)$. Sabiendo la transformada de Fourier de un tren de deltas (ecuación (2.43)),

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x_m(t)\} &= X(f) * f_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_m) \\ &= f_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f - nf_m) \\ &= f_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_m)\end{aligned}$$

Vemos que $X_m(f)$ consiste en $X(f)$ más copias desplazadas de $X(f)$, como, $X(f \pm f_m)$, $X(f \pm 2f_m)$, etc. La figura 2.16 muestra la señal $X(f)$ y dos versiones de $X_m(f)$, para dos valores distintos de frecuencia de muestreo.

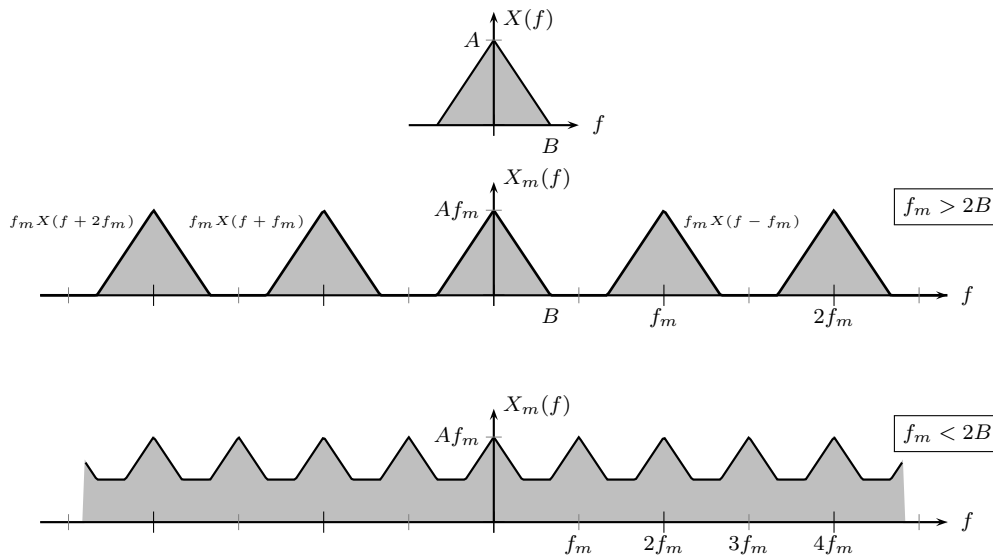


Figura 2.16: Transformada de Fourier de la señal $\sum_{-\infty}^{\infty} x(nT_m)\delta(t - nT_m)$

En la primera versión (la gráfica central), vemos que podríamos recuperar la señal $x(t)$ con un filtro paso bajo ideal que seleccionara únicamente $X(f)$. Esto es así porque las distintas copias (llamadas *alias*) no se solapan. La condición para que no haya solape, y podamos recuperar $X(f)$, es:

$$\boxed{f_m - B > B \Rightarrow f_m > 2B} \quad (2.48)$$

Éste es el *criterio de Nyquist*, y si se cumple, permite recuperar la señal $x(t)$ con un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte f_c mayor que B y menor que $f_m - B$. Para compensar el factor multiplicativo f_m , se deberá amplificar por T_m .

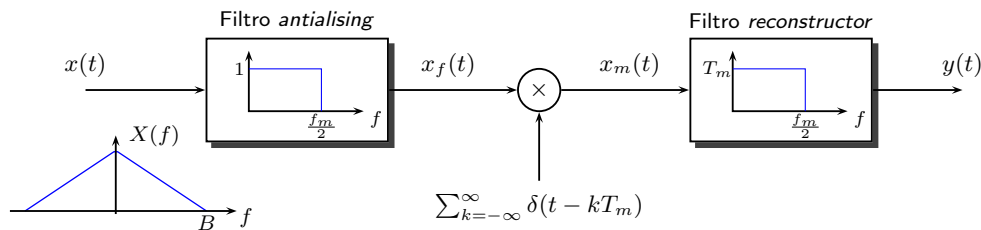
En cambio, en la gráfica inferior, en la que se ha utilizado $f_m < 2B$, los distintos *alias* están solapados. Si se aplica un filtro paso bajo, las altas frecuencias de $X(f)$, interfieren con las bajas frecuencias (las altas frecuencias de $X(f)$, al representarla desplazada, $X(f - f_m)$, interfieren en las frecuencias bajas). Es lo que se conoce como *aliasing*.

Esto justifica el *Teorema de muestreo* o *Teorema de Nyquist*: para recuperar una señal limitada en banda B , a partir de sus muestras, estas han de tomarse con una frecuencia superior al doble del ancho de banda: $f_m > 2B$.

E 2.6.1 Para representar digitalmente las señales telefónicas se muestrea la señal de voz con una frecuencia de muestreo $f_m = 8$ kHz. Por el teorema del muestreo, con este sistema se puede representar perfectamente señales limitadas en banda, $B_x < 4$ kHz.

Los sistemas de muestreo siempre van precedidos por un filtro real $h(t)$, llamado *antialiasing*. Es un filtro paso bajo, de frecuencia de corte $f_c < f_m/2$, que asegura que se cumplirá el teorema del muestreo y que a partir de las muestras se podrá recuperar la señal filtrada. El ancho de banda real de la señal de voz es mayor que 4 kHz pero con un ancho de banda de 4 kHz la calidad de la voz se considera aceptable para telefonía.

En el siguiente esquema, estudie cuál es la señal de salida, $Y(f)$, según se utilice o no el filtro antialiasing. Utilice ancho de banda de la señal de entrada, $B = 5$ kHz y $f_m = \frac{1}{T_m} = 8$ kHz. ¿Qué conclusiones pueden obtenerse?



2.6.2. Interpolación en el muestreo ideal

Mediante el esquema anterior podemos recuperar $x(t)$ a partir de sus muestras, es decir, *interpolamos*, buscando valores $x(t)$ con t entre $(n - 1)T$ y nT . Es interesante analizar como se realiza esta interpolación, en el dominio temporal.

La señal recuperada tras el filtro paso bajo de frecuencia de corte f_c , comprendida entre B y $f_m - B$ es

$$X_r(f) = X_m(f) \cdot T_m \Pi\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

por lo que la señal temporal es:

$$\begin{aligned}
x_r(t) &= x_m(t) * 2f_c T_m \operatorname{sinc}(2f_c t) \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_m) \delta(t - nT_m) \right) * 2f_c T_m \operatorname{sinc}(2f_c t) \\
&= 2f_c T_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_m) \operatorname{sinc}((2f_c(t - nT_m)))
\end{aligned}$$

Por tanto, la interpolación de los valores de $x(t)$ se realiza mediante suma de funciones sinc, de *altura* el valor de las muestras.

Un caso especialmente gráfico es si se toma la frecuencia del filtro como la mitad de la frecuencia de muestreo, $f_c = f_m/2$, en cuyo caso:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_m) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_m}{T_m}\right)$$

Podemos comprobar como la señal recuperada en los instantes de muestreo toma el valor de las muestras. En este caso, las otras funciones sinc se anulan ($\operatorname{sinc}(k - m)$ se anula salvo si $k = m$).

$$\begin{aligned}
x_r(kT_m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_m) \operatorname{sinc}\left(\frac{kT_m - nT_m}{T_m}\right) \\
&= x(kT_m) \operatorname{sinc}\left(\frac{kT_m - kT_m}{T_m}\right) = x(kT_m)
\end{aligned}$$

La figura 2.17 muestra la interpolación mediante sinc de las muestras presentadas en la figura 2.15. Ésta es la única señal que puede pasar por las muestras y que cumple el criterio de Nyquist, es decir, señal de banda limitada y con $B < f_m/2$. Se ha impuesto además que las muestras no representadas son nulas, ya que como vemos en las ecuaciones anteriores, el valor de $x(t)$, viene influido por los valores de todas las muestras, por lo que es necesario conocer su valor para realizar la interpolación.

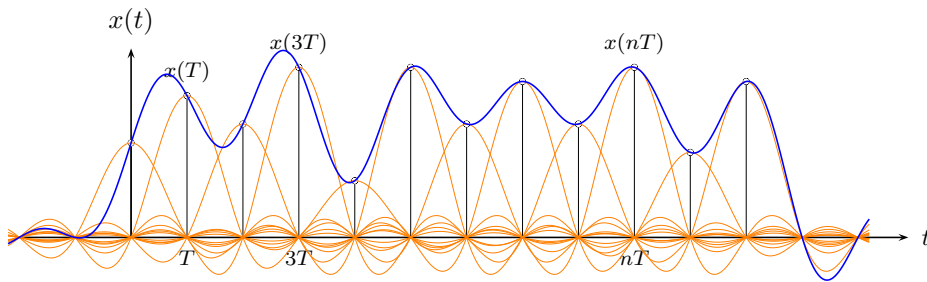


Figura 2.17: Señal $x(t)$ que originó las muestras mostradas en la figura 2.15, sabiendo que era de banda limitada, $B < f_m/2$.

2.6.3. Muestreo real

La reconstrucción *ideal* tiene algunos problemas prácticos: ¿cómo podemos generar en la práctica, una señal que contiene *deltas*? Vamos a estudiar en este apartado si es posible recuperar la señal mediante una reconstrucción conocida como *sample & hold* o de primer orden y que nombraremos $x_{sh}(t)$. Consiste en mantener la señal constante, al valor de la muestra, durante un periodo de muestreo. De hecho, esta sería la gráfica escalonada que se representaba en 2.15.

¿Es posible recuperar la señal original (asumiendo que cumple el criterio de Nyquist) a partir de esta reconstrucción.

La figura 2.18 representa una señal limitada en banda, las muestras de esta señal, y la reconstrucción mediante pulsos rectangulares que estamos proponiendo. Y se desea estudiar si podemos recuperar la señal original a partir de la versión escalonada.

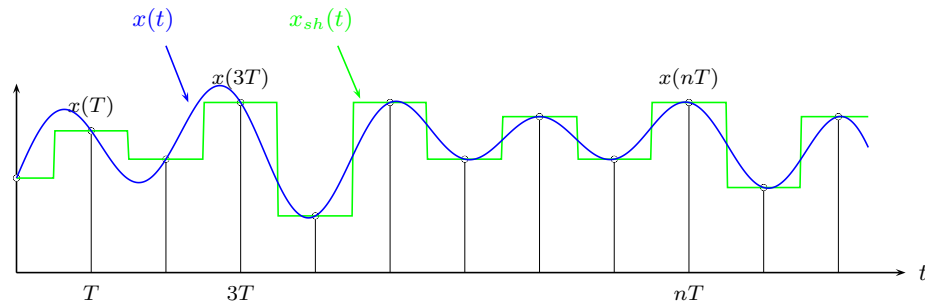


Figura 2.18: Señal $x(t)$ y su aproximación, $x_{sh}(t)$, mediante interpolación de primer orden de sus muestras.

La expresión de $x_{sh}(t)$ es:

$$x_{sh}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_m) p(t - nT_m) \quad (2.49)$$

donde $p(t)$, es el pulso interpolador, en este caso, $p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_m}\right)$.

$$x_{sh}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_m) (p(t) * \delta(t - nT_m))$$

Como las constantes $x(nT)$ podemos aplicarlas a cualquiera de las funciones a convolucionar, se obtiene:

$$\begin{aligned}
x_{sh}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t) * (x(nT_m)\delta(t - nT_m)) \\
&= p(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_m)\delta(t - nT_m) \\
&= p(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_m) \\
&= p(t) * \left(x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_m) \right) \\
&= p(t) * x_m(t)
\end{aligned}$$

Es decir, la señal obtenida mediante reconstrucción real, es la que obteniamos mediante interpolación ideal, convolucionada por un pulso de interpolación.

En el dominio frecuencial:

$$X_{sh}(f) = P(f) \cdot X_m(f)$$

La señal es como la anterior, pero afectada por un filtro $P(f)$ que distorsiona el comportamiento frecuencial. Para el interpolador de primer orden, $P(f) = T_m \operatorname{sinc}(f/f_m)$.

La figura muestra la representación de la señal $X_m(f)$ y el factor $P(f)$ que afecta a la señal en la reconstrucción real.

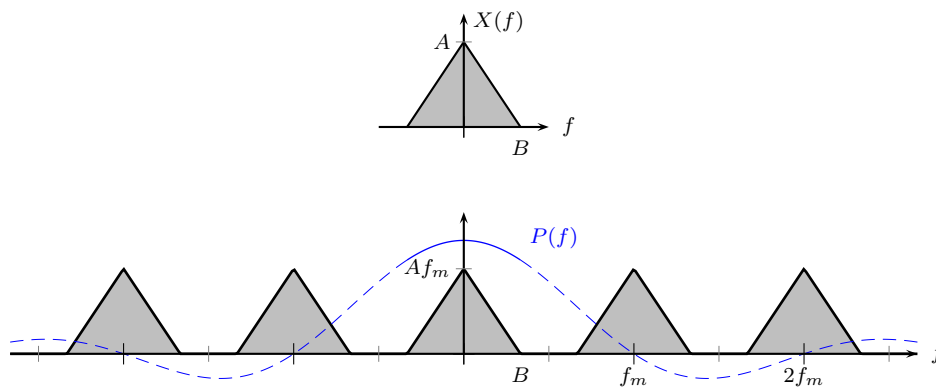


Figura 2.19: Efecto de utilizar una reconstrucción *real* de la señal a partir de sus muestras

Como vemos, en la banda de interés, $|f| < B$, no se pierde información, pero quedará distorsionada. Si aplicamos un filtro paso bajo ideal, para eliminar los alias, la señal que se recuperaría sería $X(f) \cdot P(f)$. Para compensar este efecto, el filtro reconstructor debería ser, en la banda de interés, $H(f) = \frac{1}{P(f)}$

Podemos observar, además, que cuanto mayor sea la frecuencia de muestreo, menor será la distorsión de la sinc y no sería tan crucial introducir el filtro de corrección.

Como conclusión podemos afirmar que una reconstrucción mediante *sample and hold*, permite recuperar la señal deseada, si el filtro paso bajo que elimina los *alias* incorpora un factor de corrección, tal y como se muestra en la figura 2.20.

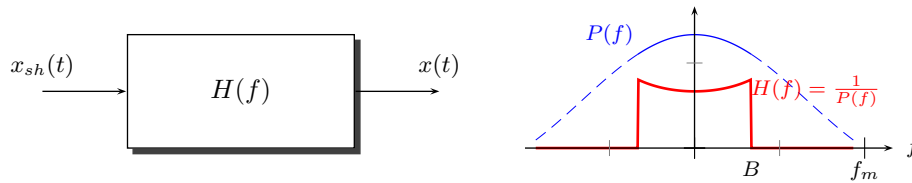


Figura 2.20: Recuperación de $x(t)$ mediante *sample & hold*

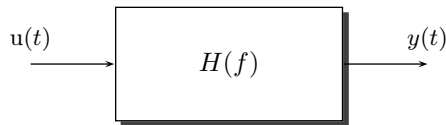
E 2.6.2 Una de las gráficas representadas en 2.15 corresponde a una interpolación lineal: los valores de $x(t)$ se obtienen mediante una línea recta que une las muestras. Parece una aproximación más adecuada que la interpolación por pulsos: $x(t)$ está limitada en banda, y las discontinuidades de la interpolación mediante pulsos introduce discontinuidades, es decir, altas frecuencias. Estudie como recuperar la señal $x(t)$ a partir de la señal interpolada linealmente, asumiendo que se cumple el teorema de Nyquist.

Sugerencia: exprese la interpolación mediante la expresión (2.49), con una elección conveniente de $p(t)$.

2.7. Limitación en tiempo y en frecuencia

2.7.1. Limitación en banda: efecto en las discontinuidades

Vamos a estudiar el efecto que se produce en las proximidades de una discontinuidad cuando la señal discontinua se limita en banda. Para ello estudiaremos el caso de una señal discontinua, el escalón $u(t)$, cuando pasa a través de un filtro paso bajo. El esquema se muestra a continuación:



Limitación en banda con un filtro paso bajo ideal.

En primer lugar, sea $h(t)$ es un filtro paso bajo ideal entre $-B$ y B Hz. Su respuesta impulsional es:

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \longleftrightarrow h(t) = 2B \operatorname{sinc}(2Bt)$$

La señal de salida es:

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2B \operatorname{sinc}(2B\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t 2B \operatorname{sinc}(2B\tau) d\tau$$

Haciendo el cambio de variable $\alpha = 2B\tau$,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2Bt} \operatorname{sinc}(\alpha) d\alpha$$

En las gráfica 2.21 se muestra la respuesta impulsional $h(\tau)$ y su relación con el ancho de banda, así como la representación gráfica de la ecuación de la convolución para $t = -\frac{1}{2B}$ y $t = 0$. En la figura figura 2.22 se muestra el resultado de la convolución. Destaca lo siguiente:

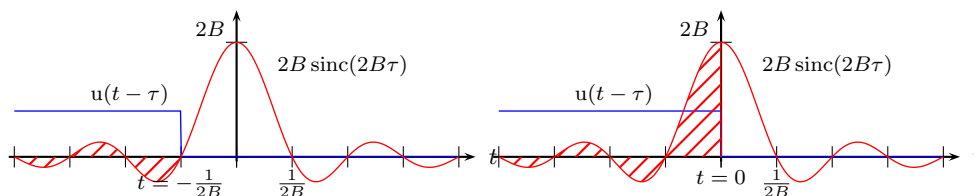


Figura 2.21: Convolución de la función escalón y la sinc(.).

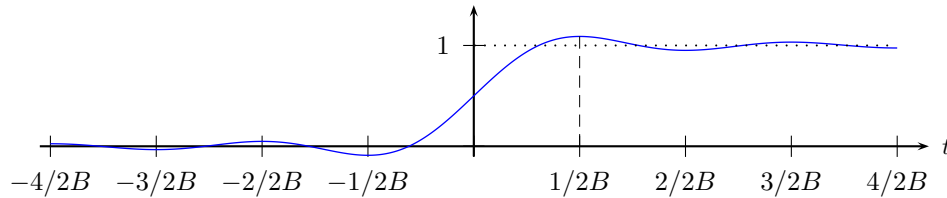


Figura 2.22: Resultado de limitar el ancho de banda de un escalón.

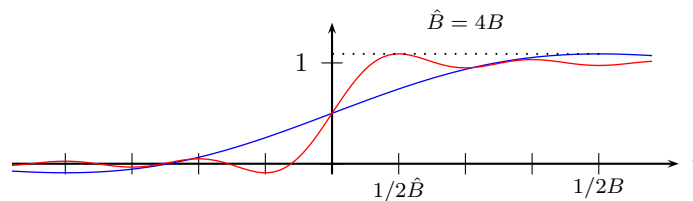


Figura 2.23: Efecto del ancho de banda en la discontinuidad.

- a) Aparece un rizado en las zonas donde la señal era constante. Es debido a que el área al hacer la convolución va cambiando de signo debido al cambio de signo de los lóbulos secundarios de la sinc(.). El valor mínimo se obtiene en $t = -\frac{1}{2B}$. En este instante de tiempo, la integral abarca (como se muestra en la figura 2.21) la totalidad del primer

lóbulo secundario de la $\text{sinc}(\cdot)$ que es negativo y de valor absoluto mayor que todos los demás. Para $-\frac{1}{2B} < t < 0$, el intervalo de integración empieza a incluir el lóbulo principal de la $\text{sinc}(\cdot)$ y el resultado empieza a crecer hasta que la integral abarca todo el lóbulo principal ($t = \frac{1}{2B}$). En este instante se alcanza el valor máximo. Conforme aumenta t , el área de integración incluye lóbulos secundarios que van alternándose en signo y por esta razón aparece el rizado alrededor del valor 1 que es el área total de la $\text{sinc}(\cdot)$.

Observamos que el flanco de subida es más lento. Como se ha visto es debido al lóbulo principal de la $\text{sinc}(\cdot)$. Definiendo "tiempo de subida" como el tiempo que tarda en pasar del 10% al 90% del valor de la discontinuidad, el tiempo de subida es $t_s \approx \frac{1}{2B}$.

b) Si calculamos el valor de la salida en el origen:

$$y(0) = \int_{-\infty}^0 \text{sinc}(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}$$

Este valor es independiente de B . Si hacemos $B \rightarrow \infty$, $y(0) = \frac{1}{2}$. La conclusión es que la transformada de Fourier siempre devuelve el punto medio en una discontinuidad.

c) Aumentando B el valor de los máximos y mínimos no varían aunque sus posiciones cada vez son más próximas al origen. El primer máximo de la salida está en $t = \frac{1}{2B}$

$$y\left(\frac{1}{2B}\right) = \int_{-\infty}^1 \text{sinc}(\alpha) d\alpha \approx 1,09$$

que es un valor que no depende del ancho de banda. La figura 2.23 muestra el resultado de la convolución para dos filtros, uno de ancho de banda B y otro de ancho de banda mayor, $\hat{B} = 4B$. Como vemos, la oscilación se concentra en el origen, pero el valor del máximo es el mismo. Como conclusión de este efecto diremos que siempre que hay una limitación en banda en una señal discontinua, aparece rizado en sus proximidades. El rizado no disminuye aumentando B excepto si $B = \infty$. Este fenómeno se denomina fenómeno de Gibbs.

Limitación en banda con un filtro triangular.

Supongamos que limitamos en banda el escalón pero ahora el filtro es paso bajo triangular. La respuesta impulsional del filtro será (figura 2.24):

$$H_{\Delta}(f) = \Delta\left(\frac{f}{B}\right) \longleftrightarrow h_{\Delta}(t) = B \text{sinc}^2(Bt)$$

La señal de salida es:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) * h_{\Delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B \text{sinc}^2(B\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t B \text{sinc}^2(B\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{Bt} \text{sinc}^2(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

La señal de salida se muestra en la figura 2.25.

Respecto a la salida del caso anterior se observan las siguientes diferencias:

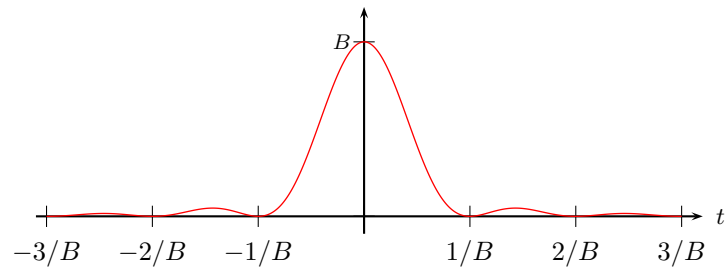


Figura 2.24: Respuesta impulsional de un filtro triangular de ancho de banda B .

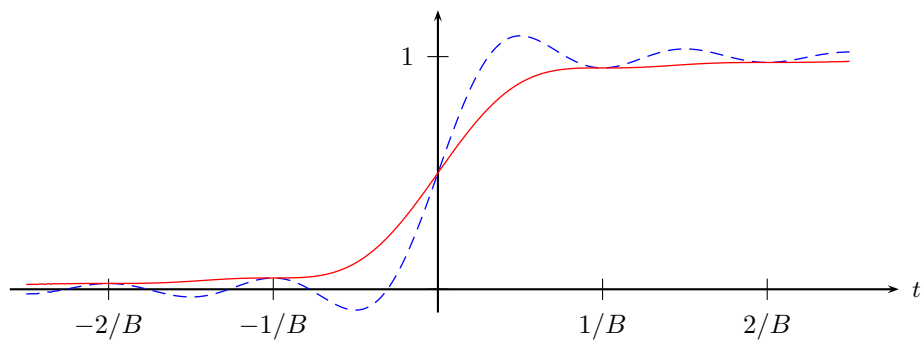


Figura 2.25: Resultado de limitar en banda un escalón mediante filtro triangular (trazo continuo) respecto limitar con un filtro rectangular (trazo discontinuo).

- a) No aparece rizado. Es debido a que $h_{\Delta}(t)$ es positiva y al realizar la integral de convolución no se producen cancelaciones de área. La señal de salida es monótona creciente
- b) El flanco de subida es menos abrupto. El *tiempo de subida* es $t_s \approx 1/B$. Esto es debido a que el lóbulo principal de la respuesta impulsional dura el doble que en el caso anterior.

No hay una regla general para determinar cuál de los dos sistemas es mejor para limitar en banda una señal. Por un lado tenemos una respuesta más rápida ya que el lóbulo principal de la respuesta impulsional del filtro rectangular es más estrecha, mientras que por otro lado la limitación con filtro triangular no presenta rizado, ni sobrepasa el nivel máximo de la señal.

Para cada aplicación se deberá determinar cuál de las dos características es más ventajosa.

Criterios de Error

En ocasiones se dispone de un criterio de error que se puede expresar de forma analítica. Supongamos que queremos aproximar una señal $x(t)$ por otra señal $\hat{x}(t)$. El error cometido será:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Una medida de error global es

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) dt$$

Esta medida de error tiene el inconveniente de que se producen cancelaciones por cambios de signos de $e(t)$ pudiendo dar una medida de error cero. Por tanto es más conveniente:

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |e(t)| dt$$

En ocasiones es conveniente tener una medida de error que penalice más los errores mayores en valor absoluto. La medida de error E_1 trata por igual un error pequeño que un error grande ya que todos contribuyen por igual en la integral. El error:

$$E_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

penaliza más los errores grandes ya que están elevados al cuadrado. La raíz cuadrada es para normalizar las unidades con el anterior.

Generalizando, se puede hablar de un error :

$$E_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

que todavía penaliza más los errores mayores. El caso límite sería $p = \infty$. En este caso el error mayor sería el que contribuye más a la integral pudiéndose hablar de

$$E_\infty \approx \text{máx}(e(t))$$

Visto de otra manera, si lo que buscamos es hallar la señal $\hat{x}(t)$ que mejor se aproxime a una señal $x(t)$ dada, y definimos la *mejor* aproximación como la que minimiza uno de los criterios de error anteriormente explicados, tendremos que conforme p aumenta, la cota del error disminuye (su valor máximo).

Aproximación de una señal por otra de banda limitada.

Supongamos que tenemos una señal $x(t)$ y queremos aproximarla por otra señal $x_B(t)$ de banda limitada de manera que minimice el siguiente criterio de error:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_B(t)|^2 dt$$

Es el criterio de error que hemos denominado E_2 , donde hemos prescindido de la raíz ya que si E es máximo, $E_2 = \sqrt{E}$ también lo será.

Aplicando el teorema de Parseval tenemos en el dominio frecuencial:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f) - X_B(f)|^2 df \\ &= \int_{-B}^B |X(f) - X_B(f)|^2 df \\ &\quad + \int_{-\infty}^{-B} |X(f) - X_B(f)|^2 df + \int_B^{\infty} |X(f) - X_B(f)|^2 df \end{aligned}$$

Aplicando la condición de que $X_B(f) = 0$ $|f| > B$, ya que es de banda limitada.

$$E = \int_{-B}^B |X(f) - X_B(f)|^2 df + \int_{|f|>B} |X(f)|^2 df + \int_B^{\infty} |X(f) - X_B(f)|^2 df$$

Estos dos términos son siempre positivos o cero por ser la integral de términos siempre positivos, por tanto el valor mínimo es cero. El segundo sumando no depende de la elección de $x_B(t)$. La solución es:

$$X_B(f) = X(f) \quad |f| < B$$

ya que minimiza el error al forzar que el primer sumando tome el valor cero.

El error cometido al hacer esta aproximación es:

$$E = \int_{|f|>B} |X(f)|^2 df$$

La conclusión es que si el criterio de error es la minimización del error cuadrático, la mejor aproximación de banda limitada es filtrar con un filtro rectangular. La aproximación al escalón con el filtro rectangular es mejor que con el filtro triangular bajo un criterio de minimización de error cuadrático.

2.7.2. Enventanado

Para este tema puede consultarse el libro de laboratorio, “Senyals i Sistemes Analògics: una introducció experimental”, E. Sayrol et al., Edicions UPC, págs. 79–80.

2.8. Resumen de Transformadas de Fourier y Propiedades

Este apartado se recogen los principales pares transformados y propiedades de las transformada de Fourier estudiados en este capítulo.

Ecuación	$x(t)$	$X(f)$
Ec. (2.20)	$\Pi(t)$	$\text{sinc}(f)$
Ec. (2.34)	$\text{sinc}(t)$	$\Pi(f)$
Ec. (2.28)	$\Delta(t)$	$\text{sinc}^2(t)$
Ec. (2.29)	1	$\delta(f)$
Ec. (2.30)	$e^{j2\pi f_s t}$	$\delta(f - f_s)$
Ec. (2.37)	$\delta(t)$	1
Ec. (2.36)	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi t_0 f}$
Ec. (2.43)	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$	$\frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_0)$
Ec. (2.21)	$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j2\pi f}$
Ec. (2.40)	$e^{-\alpha t }$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$
Ec. (2.23)	$\frac{1}{\pi t}$	$-j \text{sgn}(f)$
Ec. (2.24)	$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
Ec. (2.32)	$u(t)$	$\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}$
Ec. (2.39)	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$
	$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2j} \delta(f + f_0)$
Ec. (2.25)	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$

Tabla 2.1: Resumen de pares transformados

Propiedad		$x(t)$	$X(f)$
	definición	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$	$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$
linealidad	Prop. 1	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\alpha X(f) + \beta Y(f)$
simetría	Prop. 2.1	$x(t)$ par	$X(f)$ par
	Prop. 2.1	$x(t)$ impar	$X(f)$ impar
	Prop. 2.3	$x(t)$ real y par	$X(f)$ real (y par)
	Prop. 2.3	$x(t)$ real e impar	$X(f)$ imaginaria (e impar)
hermicidad	Prop. 2.2	$x(t)$ real	$X(f) = X^*(-f)$ (hermítica)
		$x^*(t)$	$X^*(-f)$
convolución	Prop. 3	$x(t) * h(t)$	$X(f) \cdot H(f)$
dualidad	Prop. 4	$x(t) \longleftrightarrow X(f)$	$X(t) \longleftrightarrow x(-f)$
retardo	Prop. 5	$x(t - t_0)$	$e^{-j2\pi t_0 f} X(f)$
producto	Prop. 6	$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$X_1(f) * X_2(f)$
modulación	Prop. 7.1	$x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f - f_0)$
	Prop. 7.2	$x(t) \cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)$
		$x(t) \sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}X(f - f_0) - \frac{1}{2j}X(f + f_0)$
escalado	Prop. 8	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{f}{a}\right)$
derivación	Prop. 9	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
multiplicación por t	Prop. 10	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f)$
integración	Prop. 11	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(0)}{2} \delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}$
Parseval	Prop. 12	$\langle x(t), y(t) \rangle = \langle X(f), Y(f) \rangle$ $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df$ $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$	

Tabla 2.2: Resumen de las propiedades de la Transformada de Fourier

Propiedad		
DSF y T.F.	Ec. (2.5)	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b(t - kT_0)$
	Ec. (2.42)	$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - kf_0)$
	Ec. (2.11)	$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$
	Ec. (2.44)	$c_k = f_0 \cdot X_b(kf_0)$
Parseval	Prop. 12.1	$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k ^2$
S.L.I.	Ec. (2.26)	$x(t) * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(kf_0) e^{j2\pi k f_0 t}$
Poisson	Ec. (2.47)	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \Phi\left(\frac{k}{T}\right)$

Tabla 2.3: Propiedades para una señal $x(t)$ periódica, con periodo $T_0 = \frac{1}{f_0}$

2.9. Problemas propuestos

P2.1 Sea $X(f)$ la transformada de Fourier de la señal $x(t) = e^{-t} u(t)$. Responda a las siguientes preguntas sin hallar de forma explícita $X(f)$

a) Encuentre los valores numéricos de:

- a.1. $X(0)$
- a.2. $\int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$
- a.3. $\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$
- a.4. $\int_{-\infty}^{\infty} X(f) 2 \operatorname{sinc}(2f) e^{j4\pi f} df$

b) Compruebe que $y(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ es periódica.

c) Compruebe que en el intervalo $0 < t < T$ la señal $y(t) = ke^{-t}$. Especifique el valor de k si $T = 1$ s.

■ Resultado:

$$\frac{1-X^2}{X^2} = y \quad \text{e}^{-t} - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \operatorname{sinc}(k) \quad (e$$

P2.2 La transformada de Fourier $X(f)$ de una señal se muestra en la figura P2.2. Encuentre $x(t)$ utilizando la definición de la transformada inversa de Fourier

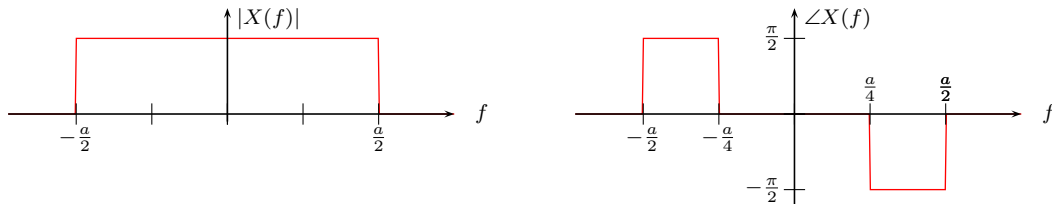


Figura P2.2

■ Resultado:

$$\frac{1}{4\pi a} \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{4} \right) \cos \left(\frac{t}{4} \right) + \frac{1}{4} \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{2} \right) \sin \left(\frac{t}{2} \right)$$

P2.3 Suponga que $x(t)$ es una señal real y par.

- a) Demuestre que $X(f) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt$
- b) Demuestre que $X(f)$ es una función real y par.

P2.4 Si $x(t)$ tiene como transformada $X(f)$ halle, en función de $X(f)$:

- a) La transformada de Fourier de $x^*(t)$
- b) $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 x(t) dt$
- c) $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt$
- d) La transformada de Fourier de $x(t) * x^*(-t)$
- e) La transformada de Fourier de $\operatorname{Par}\{x(t)\}$. Si además $x(t)$ es real, pruebe que $\operatorname{Par}\{x(t)\} \longleftrightarrow \operatorname{Real}\{X(f)\}$

■ Resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{|(f)X|\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{fz^p}{(f)Xz^p} \frac{z(z^p-1)}{z^p-1}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{fz^p}{(f)Xz^p} \frac{z(z^p-1)}{z^p-1}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{fz^p}{(f)Xz^p} \frac{z(z^p-1)}{z^p-1}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{fz^p}{(f)Xz^p} \frac{z(z^p-1)}{z^p-1}\right\} \\ &= \mathcal{Z}\left\{\frac{fz^p}{(f)Xz^p} \frac{z(z^p-1)}{z^p-1}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{fz^p}{(f)Xz^p} \frac{z(z^p-1)}{z^p-1}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{fz^p}{(f)Xz^p} \frac{z(z^p-1)}{z^p-1}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{fz^p}{(f)Xz^p} \frac{z(z^p-1)}{z^p-1}\right\} \end{aligned}$$

P2.5 Si $x(t)$ tiene como transformada $X(f)$, halle la transformada de Fourier de las siguientes señales:

- a) $y(t) = x(t)u(t)$
- b) $y(t) = x(t)\delta(t - t_0) + x(t) * \delta(t - t_0)$
- c) $y(t) = x(t) + x(t - t_0)$. Dibuje el módulo y la fase de $Y(f)$.
- d) $y(t) = x(t) * u(t)$

■ Resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} \\ \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} \end{aligned}$$

P2.6 Si $x(t)$ tiene como transformada $X(f)$, halle la transformada inversa de Fourier de las siguientes transformadas:

- a) $Y(f) = X(f)u(f)$
- b) $Y(f) = X(f) * u(f)$
- c) $Y(f) = 2X(f) \cos(\pi ft_0)e^{-j\pi ft_0}$
- d) $Y(f) = X(f) \cos(2\pi ft_0)$
- e) $Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_0)$

■ Resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} \\ \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} \end{aligned}$$

P2.7 Halle la T.F. de las siguientes señales utilizando la definición y propiedades de la T.F.

- a) $x(t) = \text{sgn}(t)$
- b) $x(t) = A \text{sinc}^2(t/4)$
- c) $x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$, con $\alpha > 0$
- d) $x(t) = t e^{-\alpha t} u(t)$, con $\alpha > 0$
- e) $x(t) = (1 + k\Delta(t)) \cos(10\pi t)$
- f) $x(t) = \delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)$

■ Resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} \\ \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{fz^p}{(f)X} + \frac{z}{(f)g}(0)X\right\} \end{aligned}$$

P2.8 Halle la transformada inversa de Fourier de las siguientes funciones

- a) $X(f) = \text{sinc}(f - f_0) + \text{sinc}(f + f_0)$
- b) $X(f) = \Delta(20f)$
- c) $X(f) = \delta(f) + 2\Pi\left(\frac{f}{2}\right)$
- d) $X(f) = \Pi\left(\frac{f}{B}\right) e^{-j2\pi f t_0}$
- e) $X(f) = \delta(f + 5) + \delta(f - 5) + \Delta(f + 5) + \Delta(f - 5)$

■ Resultado:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{T} \right) \cos(2\pi f_0 t) \text{ sinc} \left(\frac{f}{T} \right) + \left(\frac{1}{T} \right) \cos(2\pi f_0 t) \text{ sinc} \left(\frac{f}{T} \right) \approx \left(\frac{2}{T} \right) \cos(2\pi f_0 t) \text{ sinc} \left(\frac{f}{T} \right) \quad (p) \\ & \left(\frac{1}{T} \right) \cos(2\pi f_0 t) \text{ sinc} \left(\frac{f}{T} \right) + \left(\frac{1}{T} \right) \cos(2\pi f_0 t) \text{ sinc} \left(\frac{f}{T} \right) \approx \left(\frac{2}{T} \right) \cos(2\pi f_0 t) \text{ sinc} \left(\frac{f}{T} \right) \quad (q) \end{aligned}$$

P2.9 Sea el sistema de la figura P2.9 donde los bloques rectangulares son dos sistemas L.I. con respuesta impulsional $h_1(t)$ y $h_2(t)$ respectivamente:

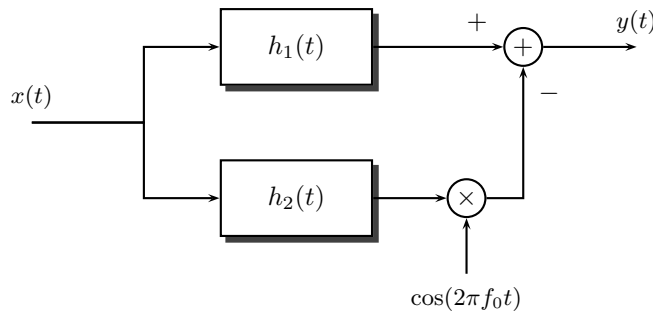


Figura P2.9

- a) Halle la relación entrada-salida del sistema global $T[x(t)] = y(t)$.
- b) Analice las propiedades de linealidad, invarianza, causalidad y estabilidad, indicando, si es necesario, qué condiciones deben cumplir $h_1(t)$ o $h_2(t)$ en cada caso.

Considere a partir de aquí $h_1(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t)$, con $f_0 \gg 1/T$ y $h_2(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$.

- c) Operando en el dominio temporal halle $y(t)$ en los siguientes casos:
 - c.1. $x_1(t) = \delta(t)$
 - c.2. $x_2(t) = \delta(t - t_0)$
 - c.3. $x_3(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t)$. En este apartado deje las integrales perfectamente indicadas, con especial atención a los límites de integración y los márgenes de validez de las expresiones.
- d) Halle la respuesta a $x_3(t)$ haciendo los cálculos en el dominio frecuencial. ¿Qué simplificación le permite realizar la condición $f_0 \gg 1/T$?

■ Resultado:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{T} \right) \cos(2\pi f_0 t) \text{ sinc} \left(\frac{f}{T} \right) \approx \left(\frac{1}{T} \right) \cos(2\pi f_0 t) \text{ sinc} \left(\frac{f}{T} \right) \quad (p) \\ & \left(\frac{1}{T} \right) \cos(2\pi f_0 t) \text{ sinc} \left(\frac{f}{T} \right) \approx \left(\frac{1}{T} \right) \cos(2\pi f_0 t) \text{ sinc} \left(\frac{f}{T} \right) \quad (q) \\ & \left(\frac{1}{T} \right) \cos(2\pi f_0 t) \text{ sinc} \left(\frac{f}{T} \right) \approx \left(\frac{1}{T} \right) \cos(2\pi f_0 t) \text{ sinc} \left(\frac{f}{T} \right) \quad (e) \end{aligned}$$

P2.10 Sean la señal real $x(t)$ de ancho de banda B_x ($|X(f)| = 0$ para $|f| > B_x$) que se desea modular y transmitir a la frecuencia f_1 . Para ello se forma la señal

$$x_M(t) = x(t) \cos(2\pi f_1 t + \phi)$$

- a) Calcule y dibuje la transformada de Fourier de $x_M(t)$. ¿Cuál es el ancho de banda de $x_M(t)$?

Se propone el receptor de la figura P2.10, siendo $H(f)$ un filtro paso bajo ideal de ancho de banda B_x y ganancia 2 y $v(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

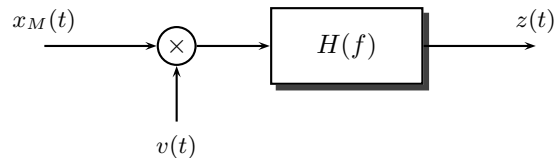


Figura P2.10

- b) Compruebe que si $f_0 = f_1$ y $\phi = \varphi$, entonces $z(t)$ es exactamente $x(t)$.
 c) Calcule $z(t)$ si el oscilador tiene una deriva de fase: $f_0 = f_1$ y $\varphi = \phi + \Delta\phi$
 d) Calcule $z(t)$ si el oscilador tiene una deriva en frecuencia: $f_0 = f_1 + \Delta f$ y $\varphi = \phi$. En particular, ¿cuál sería la salida $z(t)$ si $x(t) = A \cos(2\pi f_m t)$?

■ Resultado:

$$((f_0 \nabla - \omega_f) \cos(\phi \nabla)) \cos(\varphi \nabla) = (t)z \quad (p) \qquad (t_0 f \cos(\phi \nabla)) \cos(\varphi \nabla) = (t)z \quad (c)$$

P2.11 Sean las señales reales $x(t)$ e $y(t)$ de ancho de banda B ($|X(f)| = |Y(f)| = 0$ para $|f| > B$) que se desean modular y transmitir a las frecuencias f_1 y f_2 respectivamente ($f_1 \gg B$ y $f_2 \gg B$). Para ello se forma la señal

$$x_M(t) = x(t) \cos(2\pi f_1 t) + y(t) \sin(2\pi f_2 t)$$

Se propone el receptor de la figura P2.11 siendo $H_1(f)$ y $H_2(f)$ dos filtros paso bajo ideales de ancho de banda B_x y ganancia 2.

- a) Calcule la transformada de Fourier de $x_M(t)$
 b) Calcule las salidas $z_1(t)$ y $z_2(t)$ ¿Qué condición se debe cumplir para que $z_1(t)$ y $z_2(t)$ sean iguales a $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente?

En el resto del problema estudiaremos el caso en que las dos frecuencias portadoras sean iguales ($f_1 = f_2$).

- c) ¿cuál es el ancho de banda de $x_M(t)$? Demuestre que pese a que las señales se solapan en tiempo y frecuencia, es posible recuperar $x(t)$ e $y(t)$ con el receptor de la figura P2.11.
 d) Calcule $z_1(t)$ y $z_2(t)$ si el oscilador del receptor, a partir del cual se generan el seno y el coseno de la figura, tiene una deriva de frecuencia y oscila a $f_1 + \Delta f$ Hz en lugar de oscilar a la frecuencia f_1 .

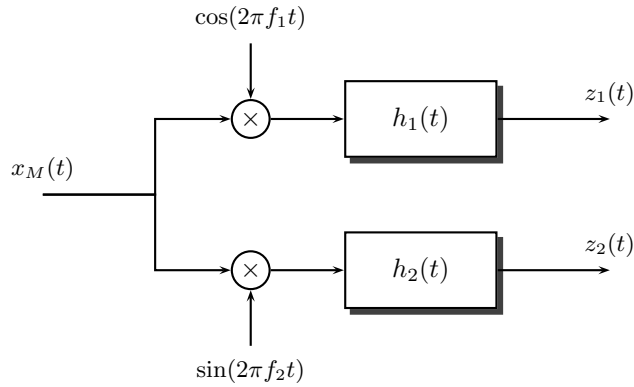


Figura P2.11

■ Resultado:

$X_M(f) = X(f) \cos(2\pi f_1 f) + \left(X(f) * \frac{1}{\pi t} \right) \sin(2\pi f_1 f)$

P2.12 Se desea transmitir una señal $x(t)$, de ancho de banda B_x , a través de un canal de comunicaciones. Para ello se transmite la señal

$$x_M(t) = x(t) \cos(2\pi f_1 t) + \left(x(t) * \frac{1}{\pi t} \right) \sin(2\pi f_1 t)$$

- a) Calcule $X_M(f)$
- b) Calcule el ancho de banda de $X_M(f)$
- c) Compruebe que el esquema de la Figura P2.11 le permite recuperar $x(t)$ en la salida $z_1(t)$

■ Resultado:

$$X_M(f) = X(f) \cos(2\pi f_1 f) + \left(X(f) * \frac{1}{\pi t} \right) \sin(2\pi f_1 f)$$

P2.13 . Suponga la señal $x(t)$, de duración infinita, representada en la Figura P2.13 La onda sinusoidal tiene frecuencia constante f_c excepto en el intervalo $-1/f_c < t < 1/f_c$, donde la frecuencia salta a $2f_c$. Esta señal podría ser el resultado de una modulación de frecuencia FM. Calcule la transformada de Fourier de $x(t)$. Compruebe que tiene elementos impulsivos y no impulsivos.

■ Resultado:

$$X(f) = \frac{1}{2} \left[X(f - f_c) + X(f + f_c) \right] + \frac{j}{2} \left[X(f - 2f_c) - X(f + 2f_c) \right]$$

P2.14 Dada la señal periódica de la figura P2.14, demuestre que su desarrollo en serie de Fourier (DSF) es

$$x(t) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{2}{j\pi m} \left(1 - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) \right) e^{j\frac{m\pi}{2}t}$$

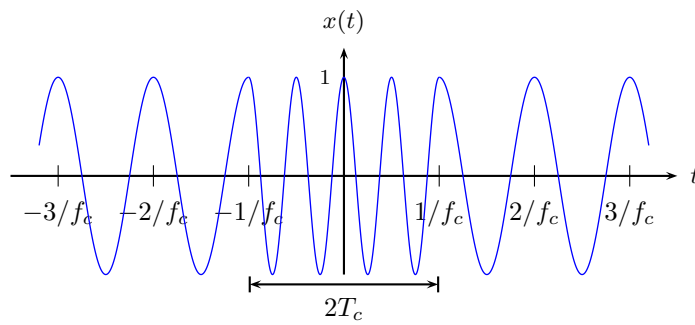


Figura P2.13

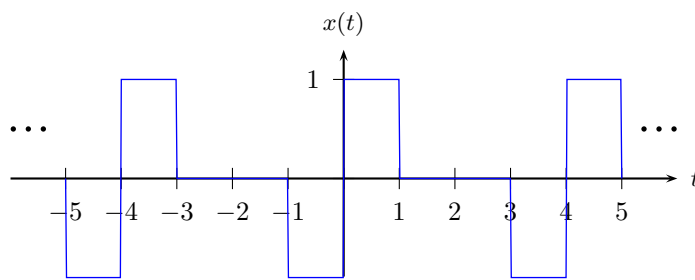


Figura P2.14

P2.15 Considere la señal $x(t) = e^{-|t|}\Pi\left(\frac{t}{2}\right)$. Defina $y(t)$ como la extensión periódica de $x(t)$, $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT)$.

- a) Dibuje $x(t)$
- b) Dibuje $y(t)$ para $T = 2$ y para $T = 4$
- c) Halle el DSF de $y(t)$

P2.16 Halle el DSF de la señal periódica $x(t)$ de la figura P2.16

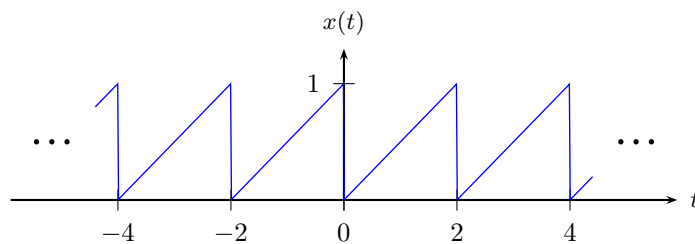


Figura P2.16

■ Resultado:

$$\frac{y(t)}{t} = \dots \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

P2.17 La figura P2.17 muestra un esquema para modular un mensaje $x(t)$ de ancho de banda B_x generando $x_M(t)$ según:

$$x_M(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad \text{con } f_0 \gg B_x$$

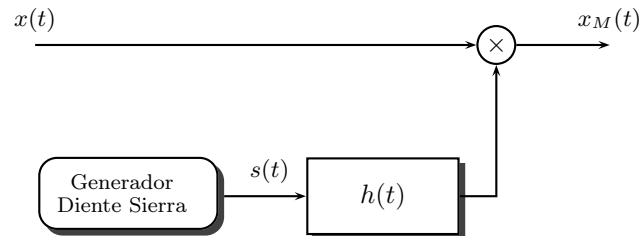


Figura P2.17

Suponga que dispone de un generador de onda en diente de sierra:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (t - nT) \cdot \Pi\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$

A partir de $s(t)$ se desea seleccionar el coseno mencionado mediante el sistema $h(t)$, según muestra la figura P2.17.

- Calcule la transformada de Fourier de $x_M(t)$ a partir de la de $x(t)$. Dibuje $|X_M(f)|$
- Si $x(t)$ tiene como T.F. $X(f)$, ¿cuál es la transformada inversa de $\frac{dX(f)}{df}$? Demuéstrelo.
- Calcule la T.F. de $s(t)$
- Dibuje $S(f)$ (Elija la representación que desee: partes real e imaginaria o módulo y fase)
- Especifique el periodo T y el filtro $H(f)$ para generar a su salida el coseno especificado en la figura P2.17.
- ¿Cuánto vale ϕ ?

P2.18

- Halle y dibuje la transformada de Fourier de $x(t) = \cos(\pi \frac{t}{T_0}) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T_0/2}\right)$
- Calcule y dibuje la T.F. de la señal $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - 2nT_0)$
- Si $T_0 = 50$ ms., halle la expresión de la señal de salida $y(t)$ cuando $x_p(t)$ se filtra con un filtro paso banda real ideal de ancho de banda 4 Hz centrado en 20 Hz: $H(f) = \Pi\left(\frac{f-20}{4}\right) + \Pi\left(\frac{f+20}{4}\right)$

P2.19

- Sea la señal $x_1(t) = \cos(2\pi f_c t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta\left(\frac{t - mT_0}{T_0/2}\right)$. Determine su transformada de Fourier. ¿Bajo qué condiciones es $x_1(t)$ periódica, y de qué periodo?

b) Sea la señal $x_2(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(t-mT_0)$, con $p(t) = \Delta\left(\frac{t}{T_0/2}\right) \cdot \cos(2\pi f_c t)$. Determine su transformada de Fourier. ¿Bajo qué condiciones es $x_2(t)$ periódica, y de qué periodo?

c) Supóngase un filtro

$$H(f) = \begin{cases} 1 & f_c - 1/2T_0 < |f| < f_c + 1/2T_0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Considerando $f_c \gg 1/T_0$ halle las señales de salida $y_1(t)$ e $y_2(t)$ si a su entrada se aplica $x_1(t)$ o $x_2(t)$ respectivamente.

P2.20 Sea la señal periódica $x(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)$.

Se pide:

- a) Calcule su desarrollo en serie de Fourier y su transformada de Fourier.
- b) Dibuje la transformada de Fourier. Suponga $\tau = 25$ ms., $T = 50$ ms. y $A = 1$. Muestre con total claridad los datos que crea significativos en su dibujo.
- c) Si la señal anterior es filtrada con un filtro paso banda ideal, $H(f) = \Pi\left(\frac{f-f_0}{B_h}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_0}{B_h}\right)$, calcule la salida. Suponga $B_h = 40$ Hz y $f_0 = 50$ Hz. Expresé la salida en la forma más simple posible, preferiblemente como suma de cosenos.

■ Resultado:

$$X(f) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{f-f_0}{B_h}\right) + \text{sinc}\left(\frac{f+f_0}{B_h}\right)$$

P2.21 Sea $x(t)$ periódica de periodo $T = 1$ ms. con $X(0) = 0$. La señal se aplica a un sistema no lineal y la salida del sistema no lineal a un filtro paso banda centrado en $f_0 = 3,5$ KHz y ancho de banda $B_h = 2$ KHz. La relación entrada salida del sistema no lineal es $y(t) = \text{sgn}(x(t))$.

- a) ¿Puede asegurar si la señal de salida es periódica?
- b) Si $x(t) = \sin(2\pi t/T)$ compruebe que $y(t)$ (salida del sistema no lineal) está compuesta por infinitos armónicos porque es discontinua.
- c) Si $x(t) = \sin(2\pi t/T)$, calcule la potencia a la salida del filtro paso banda.

■ Resultado:

$$P_{\text{salida}} = 0,09 \text{ Watt}$$

P2.22 Sea el sistema de la figura P2.22

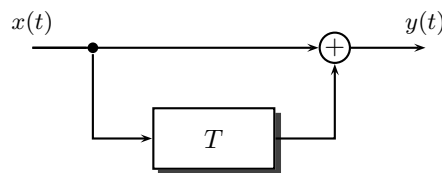


Figura P2.22

a) Halle la respuesta impulsional y la respuesta frecuencial. Dibuje el módulo de la respuesta frecuencial.

Si a la entrada del sistema de la figura se introduce una señal periódica $x(t)$, de periodo T_0 ,

b) Si $T = \frac{T_0}{2}$, calcule el DSF de $y(t)$. ¿Cuál es el periodo de la señal de salida $y(t)$? Relacione los coeficientes del DSF de $y(t)$ con los de $x(t)$.

c) Sea el sistema caracterizado por $h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$. Halle y dibuje su respuesta frecuencial.

Si a la entrada del sistema se introduce una señal periódica de periodo T_0 , y $T = T_0/N$,

d) Calcule el DSF de la señal de salida.

e) Demuestre que la señal de salida es periódica de periodo T_0/N . Relacione los coeficientes del DSF de $y(t)$ con los de $x(t)$.

f) Demuestre que una señal periódica real y par admite un DSF en términos de cosenos

$$x(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right)$$

■ Resultado:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{L}\{\cos(2\pi n t/T_0)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{1}{2} \left(\delta(f - n/T_0) + \delta(f + n/T_0) \right) \right]$$

P2.23 Halle la transformada de Fourier de la señal $x(t) = |\text{sinc}(3t)|$.

Para resolver el ejercicio descomponga la señal en el producto de otras tres más simples teniendo en cuenta la descomposición siguiente:

$$|\text{sinc}(t)| = \text{sinc}(t) \text{sgn}(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT)$$

Con $T = 2$ segundos y

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t - T/4}{T/2}\right) - \Pi\left(\frac{t - 3T/4}{T/2}\right)$$

■ Resultado:

$$\left(\left| \frac{\omega}{1+\omega} - \frac{\omega}{1-\omega} \right| \right) \Pi\left(\frac{\omega}{2}\right) - \left(\left| \frac{\omega}{1-\omega} - \frac{\omega}{1+\omega} \right| \right) \Pi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

P2.24 Suponga que dispone de un oscilador cosenoidal a la frecuencia f_0 , un filtro paso banda cuya frecuencia central y ancho de banda son ajustables y un sistema no lineal con la siguiente relación entrada salida:

$$y(t) = A \text{sgn}[x(t)]$$

a) Proponga un sistema para generar una senoide a la frecuencia $3f_0$. ¿Cuál es la amplitud de la senoide generada?

b) ¿Puede generar una senoide a la frecuencia $2f_0$?

c) Responda a las preguntas anteriores si el sistema no lineal es

$$y(t) = A \text{sgn}[x(t) + 0,5]$$

■ Resultado:

- (c) La amplitud es 0,55A
 (b) No
 (a) Se pasa la salida del generador por el sistema no lineal y la salida de este por el filtro de la amplitud de la sinusoides es 0,55A.

P2.25 Sea la señal $x(t)$ de banda limitada a B_x Hz.

- a) Calcule y dibuje la transformada de Fourier de la señal $x_m(t) = x(t) \cdot s(t)$, donde $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT)$ y $p(t) = \Pi(t/T)$
 b) Indique cómo y bajo qué condiciones es posible recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_m(t)$.

■ Resultado:

- (a) $X_m(f) = X(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(f - n/T)$
 (b) Se recupera pasando $x_m(t)$ por un filtro $H(f) = \Pi(f/T)$. Es necesario que $B_x < |f| \leq 0$

P2.26 Sea el esquema de la figura P2.26 donde las N señales $x_i(t)$ reales tienen igual ancho de banda B_x . El oscilador genera un seno a la frecuencia $f_0 > B_x$. El seno pasa por un sistema no lineal caracterizado por la relación $y(t) = \text{sgn}(x(t))$ y se aplica a un derivador. Los filtros $H_i(f)$ tienen un ancho de banda $2B_x$ y están centrados en $f_i = i \cdot f_0$. Se pide:

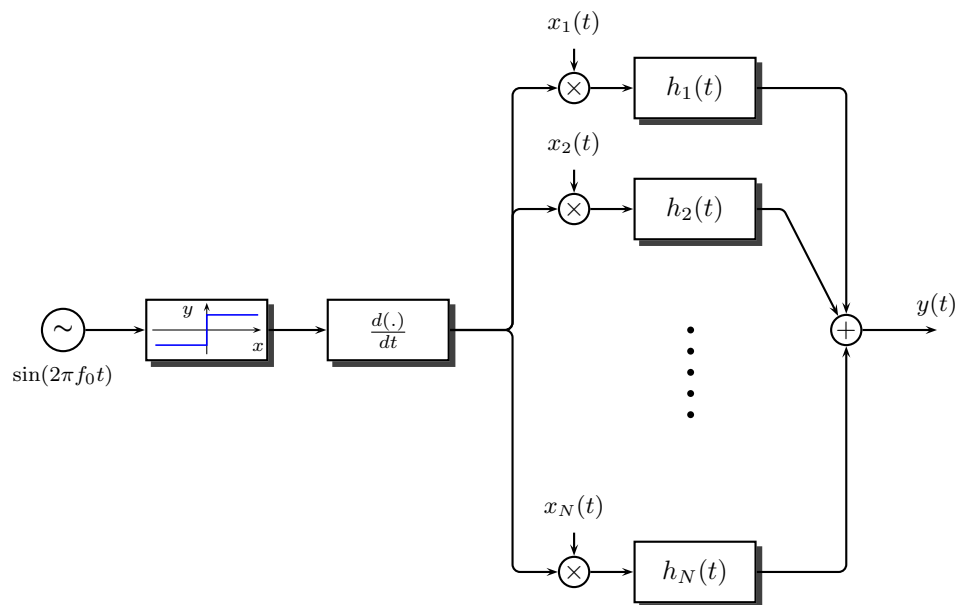


Figura P2.26

- a) Dibuje la señal a la salida del derivador.

b) Demuestre que la señal a la salida del derivador se puede expresar como

$$x(t) = K \sum_{\forall m \text{ impar}} \cos(2\pi m f_0 t)$$

- c) Expresión exacta de $y(t)$. Dibuje su transformada de Fourier (suponga los $X_i(f)$ cualesquiera para hacer el dibujo, p.ej. triángulos, rectángulos, etc.)
- d) Especifique un sistema para recuperar la señal $x_r(t)$ a partir de $y(t)$. Indique claramente las frecuencias de los osciladores y las ganancias y anchos de banda de los filtros que utilice. ¿Se pueden recuperar todas las señales?

Nota:

$$2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

$$2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a - b) + \cos(a + b)$$

$$2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a - b) + \sin(a + b)$$

$$\left| \int uv^* \right|^2 \leq \int |u|^2 \cdot \int |v|^2, \text{ con igualdad si } u \propto v$$

■ **Resultado:**

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= G \text{ Multiplicar por } \cos(2\pi f_0 t) \text{ y filtro paso bajo, } B_H, B_x \\ (c) \quad \hat{x}(t) &= \sum_{\forall m \text{ impar}} K x_m \cos(2\pi m f_0 t) \\ (b) \quad K &= \frac{T}{8} \end{aligned}$$

P2.27 Se desea transmitir una señal $x(t)$ de banda limitada a B_x Hz ($X(f) = 0, |f| > B_x$) por un canal de comunicaciones. Se desea estudiar los efectos que produce el canal si se transmite la señal muestreada en lugar de la señal original. Para ello responda a las

siguientes preguntas. (Suponga en todos los casos que la frecuencia de muestreo es siempre la mínima posible, la frecuencia de Nyquist).

- a) Calcule y dibuje la transformada de Fourier de la señal muestreada idealmente $v(t)$. ¿Cuál es el ancho de banda de la señal muestreada?
- b) Demuestre que si la señal muestreada $v(t)$ se transmite por un canal ideal con respuesta frecuencial $H(f) = g \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B_c}\right)$ es posible recuperar directamente $x(t)$ a su salida. Halle g y B_c .
- c) Suponga ahora que el canal de ancho de banda B_c no es ideal. Por ser $x(t)$ de banda limitada bastaría obtener las muestras $x(nT)$ para poder recuperarla exactamente. ¿Qué condición tiene que cumplir $h_c(t)$ para que si a su entrada se aplica la señal muestreada idealmente $v(t)$, a su salida se obtenga una señal $y(t)$ cuyos valores cumplen $y(nT) = x(nT)$?
- d) Demuestre que basta que $\sum_{m=-\infty}^{\infty} H_c\left(f - \frac{m}{T}\right) = T$ para que $y(nT) = x(nT)$, independientemente de B_c .

P2.28 La *multiplexación en tiempo* permite transmitir varias señales simultáneamente por el mismo canal, asignando ciertos intervalos temporales a cada señal.

El esquema P2.28 ilustra la multiplexación temporal. Cada T segundos, la señal que se transmite, $x_m(t)$, está compuesta por Q intervalos, de duración $\frac{T}{Q}$.

En la figura se ha tomado $Q = 3$. En cada uno de los intervalos se transmite información de una de las señales. En la figura, se muestran tres señales: las líneas continuas de $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_Q(t)$ son las señales de interés. La parte de las gráficas que se han *rellenado* es lo que pasa a formar parte de la señal $x_m(t)$. Estas partes son las que se recuperan a través del segundo conmutador y pasan a ser $\hat{x}_i(t)$.

Por el teorema del muestreo sabemos que si las señales son de un ancho de banda limitado B , podemos recuperar la señal a partir de las muestras; con más razón, podremos recuperar $x_i(t)$ a partir de *segmentos* de la señal, \hat{x}_i .

a) Demuestre que cada una de las señales \hat{x}_i puede expresarse mediante la expresión

$$\hat{x}_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_i(t) p_i(t - nT)$$

Indique el valor de $p_i(t)$.

b) Demuestre el siguiente par transformado:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) p(t - kT) \longleftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(\frac{k}{T}\right) \cdot X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

c) Calcule la transformada de Fourier de $\hat{x}_1(t)$.

d) Diseñe un sistema para obtener $x_1(t)$ a partir de $\hat{x}_1(t)$. Especifique la condición que ha de cumplir T en función del ancho de banda de las señales B .

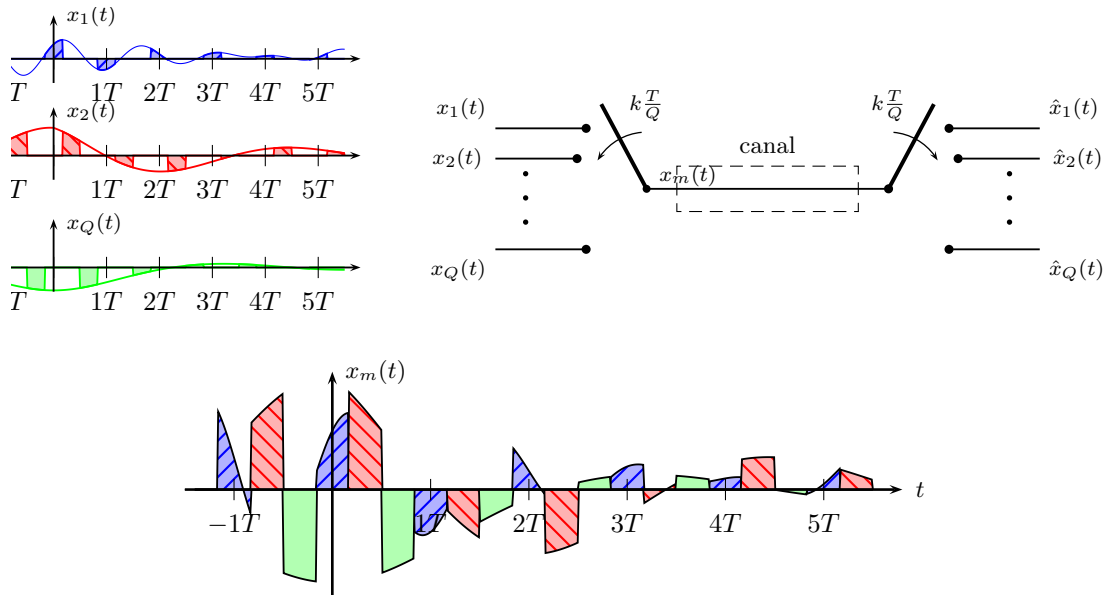


Figura P2.28