Comunicaciones II

Tema 1
Introducción a las comunicaciones digitales

Javier Rodríguez Fonollosa

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

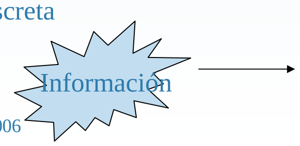
Indice del Tema 1
Introducción a las comunicaciones digitales

- *Fuentes de información y codificación de fuente*
- *Medidas de información: Fuente discreta sin memoria:*
- *Entropía conjunta (generalizada a N v.a.) y condicional*
- *Teoría de la codificación de fuente (Shannon 1948)*
- *Información Mutua*
- *Entropia de v.a. continuas*
- *Función de medida de distorsión*
- *Compromiso entre distorsión y tasa de transmisión*
- *Cuantificación escalar uniforme*

Fuentes de información y codificación de fuente

- Ejemplos de fuentes de información: Voz, música, vídeo, FAX, acceso a Internet, CD, DVD, ….
- Definición de información: Se partirá de una noción intuitiva para pasar a un modelado matemático que nos permita la compactación de la información (con y sin pérdidas) y la transmisión de exclusivamente los nuevos conocimientos

- Si la fuente original es analógica (voz, imagen, …) consideraremos que ha sido muestreada cumpliendo las condiciones impuestas por el teorema de muestreo de forma que la fuente de información será discreta



$$\cdots x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], \cdots$$

Medidas de información: Fuente discreta sin memoria

- Propiedades intuitivas de la función de medida de *autoinformación*:
  - Sea *a*1 el suceso más probable, *a*2 el siguiente, … *aN*: el menos probable
  - La función de medida debe ser *decreciente con la probabilidad* (independiente del valor del suceso)
  - Variaciones pequeñas de probabilidad deberán producir variaciones pequeñas de la medida: *Función continua en la prob.*
  - Si un suceso se puede descomponer en dos sucesos independientes, *aN*= {*aN*1, *aN*2} entonces la medida de la información conjunta debe ser la suma de las medidas aplicadas a cada uno de ellos.
- Formalmente:

$$\left.\begin{array}{c} \textit{Auto Información}(a_i) = I(p_{a_i}) = I(p_i) \\ I(p_i): \text{continua y decreciente} \\ \text{Si } p_i = p_{i1} p_{i2} \Rightarrow I(p_i) = I(p_{i1}) + I(p_{i2}) \end{array}\right\} \Rightarrow I(x) = -\log(x)$$

Medidas de información: Fuente discreta sin memoria (II)

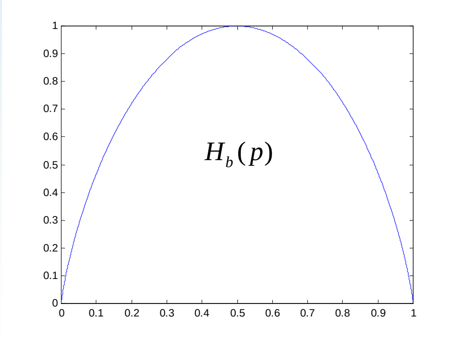
- Mediremos información que proporciona una fuente de sucesos: *promedio de la autoinformación de sus sucesos*

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i = \sum_{i=1}^{N} p_i \log\left(\frac{1}{p_i}\right)$$

- Fuente binaria:

$$X \begin{cases} a_1 : \text{con probabilidad } p_1 = p \\ a_2 : \text{con probabilidad } p_2 = 1-p \end{cases}$$

$$H(X) =$$
$$= -p\log p - (1-p)\log(1-p) \triangleq H_b(p)$$



Medidas de información: Fuente discreta sin memoria (III)

- **Ejemplo**: Fuente de información analógica con un ancho de banda de 4000Hz y muestras pertenecientes al alfabeto {-2, -1, 0, 1, 2} con probabilidades {1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/16} resulta:

$$f_m = 2B_{MAX} = 8000 \text{ muestras/s}$$

$$H(X) = \tfrac{1}{2}\log 2 + \tfrac{1}{4}\log 4 + \tfrac{1}{8}\log 8 + 2\times\tfrac{1}{16}\log 16 = \tfrac{15}{8}\text{bits}$$

$$H(X) = \frac{15}{8}\text{bits/muestra} \Rightarrow \text{Tasa de información: 15000 bits/seg}$$

Entropía conjunta (generalizada a N v.a.) y condicional

- Entropía conjunta de dos v.a. discretas:

$$H(X,Y) = -\sum_x \sum_y p(x,y)\log p(x,y)$$

- Si se conoce el valor de y se puede definir (es la información que queda en x cuando se conoce y):

$$H(X \mid Y=y) = -\sum_x p(x \mid y)\log p(x \mid y)$$

- Promediando entre los posibles valores de y:

$$\left.\begin{aligned} &H(X \mid Y) = -\sum_x \sum_y p(x,y)\log p(x \mid y) \\ &\text{Recordando: } p(x,y) = p(y)p(x \mid y) = p(x)p(y \mid x) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} H(X,Y) &= H(Y) + H(X \mid Y) = \\ &H(X) + H(Y \mid X) \end{aligned}$$

- Este resultado indica que la misma información se transfiere conociendo x e y que primero revelando y y luego la información remanente en x una vez y es conocido.

Entropía conjunta (generalizada a N v.a.) y condicional (II)

- Demostración:

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= -\sum_x \sum_y p(x,y)\log p(x,y) = -\sum_x \sum_y p(x,y)\log\left[p(y)p(x \mid y)\right] = \\ &= -\sum_x \sum_y p(x,y)\log p(y) - \sum_x \sum_y p(x,y)\log p(x \mid y) \\ &= -\sum_y p(y)\log p(y) - \sum_x \sum_y p(x,y)\log p(x \mid y) = H(Y) + H(X \mid Y) \end{aligned}$$

- Para procesos estocásticos estacionarios se define la tasa de entropía

$$H \triangleq \lim_{n\to\infty} H(X_n \mid X_1, X_2, \cdots X_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, \cdots X_n)$$

que en el caso de v.a. independientes e idénticamente distribuidas resulta:

$$H(\mathbf{X}) = H(X_1, X_2, \cdots X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i) = nH(X)$$

$$H = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, \cdots X_n) = H(X)$$

Teoría de la codificación de fuente (Shannon 1948)

- Significado intuitivo de la entropía de una fuente discreta:

$$X\begin{Bmatrix}\text{Suceso } a_1 : p_1\\ \vdots \\ \text{Suceso } a_N : p_N\end{Bmatrix} \rightarrow X_1, X_2, \cdots X_n, \cdots \begin{cases}\text{Con } n \rightarrow \infty \text{ el suceso } a_i \text{ se repite con}\\ \text{una probabilidad } np_i\end{cases}$$

De entre todas las secuencias posibles existen las denominadas secuencias "típicas" en las que el suceso a_1 se repite np_1 veces, a_2 se repite np_2 veces, $\cdots$ y a_N np_N veces. Con probabilidad 1 para $n \rightarrow \infty$ (ley de los grandes números) todas las realizaciones de secuencias tienden a una secuencia "típica" cuya probabilidad es:

$$p(X_1, X_2, \cdots X_n \rightarrow \text{secuencia "típica"}) \simeq$$

$$\simeq \prod_{i=1}^{N} p_i^{np_i} = \prod_{i=1}^{N} \left[2^{\log p_i}\right]^{np_i} = \prod_{i=1}^{N} 2^{np_i \log p_i} = 2^{n\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i} = 2^{-nH(X)}$$

Teoría de la codificación de fuente (Shannon 1948) (II)

Lo que significa que para para $n \rightarrow \infty$ todas las realizaciones de secuencias tienden a una secuencia "típica" y equiprobable cuya probabilidad es:

$$2^{-nH(X)}$$

De las N^n secuencias posibles sólo las "tipicas", que son $2^{nH(X)}$, son posibles y cada una de ellas tiene una probabilidad $2^{-nH(X)}$

Si sólo existen $2^{nH(X)}$ secuencias de longitud n (el resto se producen asintóticamente con probabilidad cero) tan solo se necesitan $nH(X)$ bits para codificarlas.

- Esta propiedad se utiliza en los algoritmos de compresión de fuente sin pérdidas (*Transmissió de dades - 3B*): Códigos de Huffman (1952) y aritméticos para fuentes sin memoria y Huffman adaptativo o Lempel-Ziv para fuentes con memoria.

Teoría de la codificación de fuente (Shannon 1948) (III)

- En el caso de fuentes sin memoria y además **equiprobables** entonces:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log\left(\frac{1}{N}\right) = \log N$$

$$2^{nH(X)} = 2^{n\log N} = N^n$$

- Todas las secuencias posibles son “típicas” y no admite compresión

- En el caso general:

$$R \geq H(X) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i$$

Información Mutua

- En esta sección se estudiará el compromiso entre tasa de transmisión y distorsión (*Rate-distorsion Theory)*
- Se ha visto que una fuente sin memoria (pero no equiprobable) puede codificarse a una tasa arbitrariamente cercana a su entropía y recuperarse sin error (a medida que el tamaño del bloque de codificación tiende a infinito)
- En muchos casos esta tasa resulta excesiva (muestreo de señales analógicas requiere un número infinito de bits) por lo que se permite cierta distorsión en su modelado
- ¿Existe una función que nos permita relacionar la distorsión con la tasa de transmisión?
- Recordamos el concepto de entropía condicionada como la información adicional contenida en *x* que *y* no revela:

$$H(X|Y)$$

Información Mutua (II)

- Definimos Información Mutua:

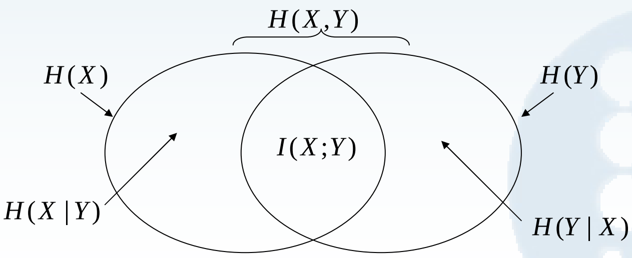
$$I(X;Y) \triangleq H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

- Casos extremos:
  - Cuando *x* e *y* son independientes:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) - H(X) = 0$$

  - Cuando contienen la misma información:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X)$$



Entropía de v.a. continuas

- La definición de entropía vista hasta ahora sólo es válida para v.a. discretas. Por analogía (aunque perdiendo su interpretación intuitiva) se puede definir para v.a. continuas:

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \log f_x(x) dx$$

- Ejemplos:
  - Para una v.a. continua uniformemente distribuida

$$h(X) = -\int_{0}^{a} \frac{1}{a} \log \frac{1}{a} dx = \log a \qquad \text{(puede ser negativa)}$$

  - Para una v.a gaussiana de media cero $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) f(x) dx =$$

$$= \ln\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right) + \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2}\ln\left(2\pi e\sigma^2\right) \text{ nats} = \frac{1}{2}\log\left(2\pi e\sigma^2\right) \text{bits}$$

Función de medida de distorsión

- Análogamente se pueden extender los conceptos de entropía diferencial conjunta y condicionada:

$$h(X,Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\log f(x,y)dxdy$$

$$h(X,Y) = h(X) + h(Y \mid X) = h(Y) + h(X \mid Y)$$

- La definición de información mutua es la misma y mantiene su interpretación intuitiva, la información aportada por una v.a. sobre la otra v.a.

$$I(X;Y) \triangleq h(X) - h(X \mid Y) = h(Y) - h(Y \mid X)$$

- Para poder considerar compresión con pérdidas se debe definir en primer lugar una medida de distorsión. Resulta difícil de definir de forma única para procesos naturales analógicos como voz, audio, imagen, aunque debe cumplir dos requisitos básicos:
  - Ser una buena aproximación al proceso de percepción de la aplicación
  - Sencilla matemáticamente

Función de medida de distorsión (II)

- Con v.a. discretas se suele utilizar la medida de distorsión de Hamming:

$$d_H(x,\hat{x}) = \begin{cases} 1, & x \neq \hat{x} \\ 0, & x = \hat{x} \end{cases}$$

- Para señales continuas la distorsión de error cuadrático es una de las más utilizadas: $d(x,\hat{x}) = (x-\hat{x})^2$
- Que puede generalizarse para secuencias o múltiples componentes como:

$$d(x,\hat{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i,\hat{x}_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{x}_i)^2 ; x \in \mathbb{R}^n$$

- En el caso de v.a. continuas se define la distorsión cuadrática como:

$$D \triangleq E\left[d(X,\hat{X})\right] = E\left[d(x,\hat{x})\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[(x_i-\hat{x}_i)^2\right]$$

Compromiso entre distorsión y tasa de transmisión

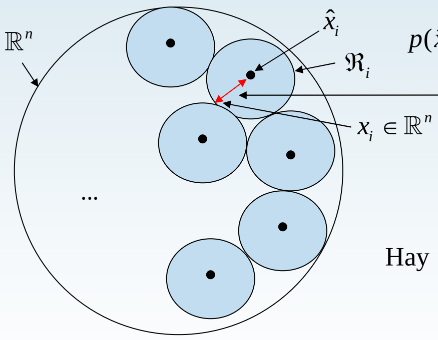
- Una vez definida la medida de distorsión el problema a resolver consiste en: *Dada una fuente de información discreta sin memoria con función densidad de probabilidad f(x) y medida de distorsión d( ) ¿cuál es el mínimo número de bits por muestra que se requieren para garantizar que la distorsión media entre las muestras de entrada y su reproducción no supera un valor dado D?*
- Teorema de la tasa-distorsión (*rate-distorsíon*) nos da la respuesta:

$$\boxed{R(D) = \min_{p(\hat{x}|x)} I(X,\hat{X});\ \text{para } E\left[d(X,\hat{X})\right] \le D}$$

La tasa mínima a la que se puede comprimir un proceso X mediante su aproximación $\hat{X}$ con una distorsión inferior o igual a D resulta de buscar de entre todas las funciones de partición o cuantificación $p(\hat{x} \mid x)$ la que minimice la información mutua entre la entrada y la salida cuantificada

Compromiso entre distorsión y tasa de transmisión (II)

- Interpretación gráfica:



$$p(\hat{x} \mid x) = \hat{x}_i \Leftrightarrow x_i \in \Re_i$$

$$\|x_i - \hat{x}_i\| = \sqrt{d(x_i,\hat{x}_i)}$$

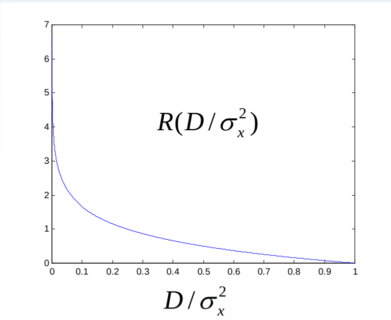
Hay 2^{nR} regiones $\Re_i \Rightarrow R$ bits por muestra

Compromiso entre distorsión y tasa de transmisión (II)

- Sea x un proceso gaussiano de media 0:

$$x \sim N(0,\sigma_x^2)$$

$$R(D) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log\frac{\sigma_x^2}{D}; & \text{para } 0 \le D \le \sigma_x^2 \\ 0; & \text{para } D > \sigma_x^2 \end{cases}$$ o mediante la función inversa D(R)=$\sigma_x^2 2^{-2R}$



- Si R aumenta en un bit por muestra (R+1) la distorsión disminuye por 4

$$\mathrm{SNR}(R) \triangleq \frac{P_x}{D} = \frac{E[x^2]}{D} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 2^{-2R}} = 2^{2R}$$

$\boxed{\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}}(R) = 6R}$;la SNR aumenta 6dB por bit

Cuantificación escalar uniforme

- Es el caso más sencillo y consiste en cuantificar las muestras de un proceso estocástico (señal analógica) de forma individual

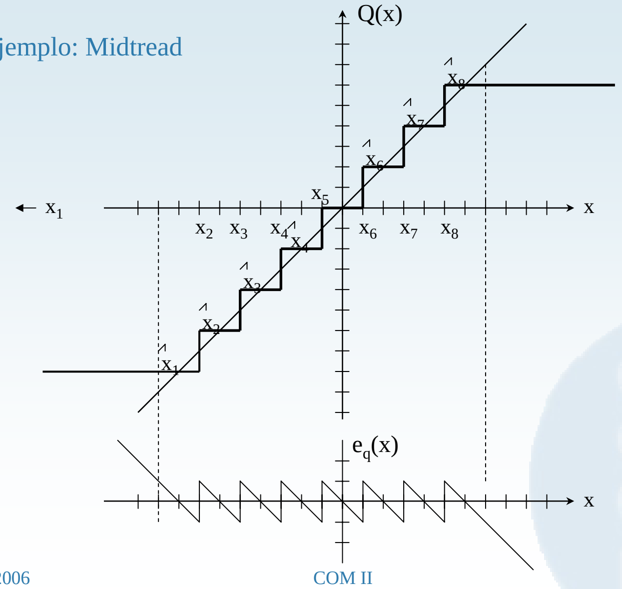
$$x(t) \xrightarrow{\text{muestreo}} x_n \xrightarrow{\text{cuantificación}} p(\hat{x}_n \mid x_n) = Q[x_n] = \hat{x}_n$$

- La función de partición o cuantificación es en general no invertible
- Cálculo de la distorsión:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} d(x,\hat{x}) f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\hat{x})^2 f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-Q[x])^2 f_x(x)dx$$

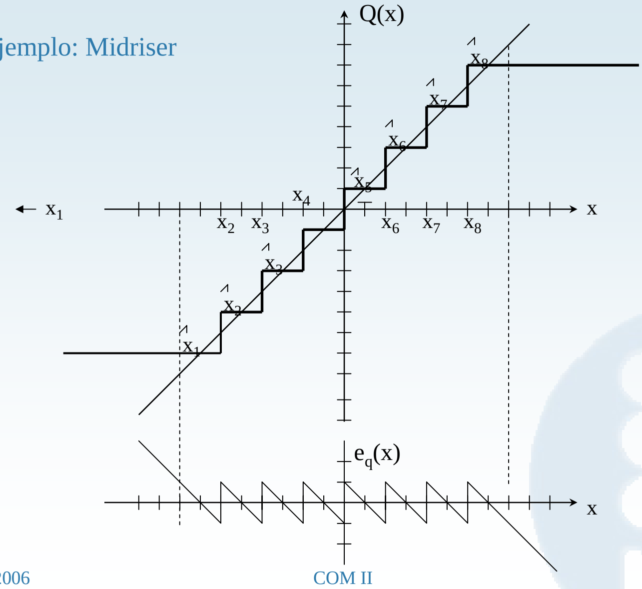
Cuantificación escalar uniforme (II)

- Ejemplo: Midtread



Cuantificación escalar uniforme (III)

- Ejemplo: Midriser



Cuantificación escalar uniforme (IV)

- Cálculo de la distorsión:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} d(x,\hat{x}) f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\hat{x})^2 f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-Q[x])^2 f_x(x)dx =$$

$$\int_{-\infty}^{x_2} (x-\hat{x}_1)^2 f_x(x)dx + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} (x-\hat{x}_{i+1})^2 f_x(x)dx + \int_{x_N}^{\infty} (x-\hat{x}_N)^2 f_x(x)dx$$

$$x_{i+1} - x_i = \Delta \text{ para } 2 \le i \le N$$

- Midriser:

$$x_{MAX}^{+} = \frac{N}{2}\Delta$$

$$x_{MAX}^{-} = -\frac{N}{2}\Delta$$

$$\Delta = \frac{2x_{MAX}^{+}}{N}$$

- Midtread

$$x_{MAX}^{+} = \frac{N-1}{2}\Delta$$

$$x_{MAX}^{-} = -\frac{N+1}{2}\Delta$$

$$\Delta = \frac{2x_{MAX}^{+}}{N-1} \simeq \frac{2x_{MAX}^{+}}{N}$$

Cuantificación escalar uniforme (V)

- Cálculo de la distorsión: SNR de cuantificación

$$Q[x] = \hat{x} = x + e_g + e_s \begin{cases} |e_g| \le \dfrac{\Delta}{2}; \text{ ruido granular, es el único ruido con } x_{MAX}^{-} < x < x_{MAX}^{+} \\ |e_s| > \dfrac{\Delta}{2}; \text{ ruido de sobrecarga, se produce con } |x| > x_{MAX}^{+} \end{cases}$$

$$\boxed{D = D_g + D_s}$$

- Distorsión granular:

$$D_g = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} (x-\hat{x}_i)^2 f_x(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{N} f_x(x_i) \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} (x-\hat{x}_i)^2 dx = \sum_{i=1}^{N} f_x(x_i) \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} e^2 de =$$

$$\sum_{i=1}^{N} f_x(x_i) \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} e^2 de = \sum_{i=1}^{N} f_x(x_i) \frac{\Delta^3}{12} \simeq \frac{\Delta^2}{12} \quad ; \quad \Delta = \frac{2x_{MAX}^{+}}{N} = \frac{2x_{MAX}^{+}}{2^R}$$

Se ha tenido en cuenta:

$$f_x(x) \simeq f_x(x_i) \quad ; \quad x_i - \Delta/2 < x < x_i - \Delta/2 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{N} f_x(x_i)\Delta \simeq 1$$

Cuantificación escalar uniforme (VI)

- Distorsión de sobrecarga

$$D_s = \int_{-\infty}^{x_1-\Delta/2} (x-\hat{x}_i)^2 f_x(x)dx + \int_{x_N+\Delta/2}^{\infty} (x-\hat{x}_i)^2 f_x(x)dx = 2\int_{x_N+\Delta/2}^{\infty} (x-\hat{x}_i)^2 f_x(x)dx$$

Se ha supuesto $f_x(x) = f_x(-x)$ y $x_1 = -x_N$

- Suele definirse la probabilidad de sobrecarga

$$\Pr_s = 2\int_{x_N}^{\infty} f_x(x)dx; \text{ por tanto } D_s = D_s(\Pr_s)$$

- Cálculo de la SNR

$$SNR = \frac{\sigma_x^2}{D_g + D_s} = \frac{1}{D_g/\sigma_x^2 + D_s/\sigma_x^2} = \frac{1}{\frac{1}{SNR_g} + \frac{1}{SNR_s}} \simeq SNR_g; \text{si } \Pr_s \ll$$

$$\boxed{SNR_g = \frac{\sigma_x^2}{D_g} = \frac{12\sigma_x^2}{\Delta^2} = 3\cdot 2^{2R}\frac{\sigma_x^2}{{x_{MAX}^{+}}^2}}$$

Cuantificación escalar uniforme (VII)

- Cálculo de la SNR en dB

$$SNR_{dB} \simeq 4,8 + 6R - 20\log\frac{x_{MAX}^{+}}{\sigma_x}$$

- Se mantiene la tendencia de 6dB por bit
- Requiere un ajuste de la dinámica para asegurar un valor pequeño de la $\Pr_s$
- En la práctica se toma:

$$x_{MAX}^{+} \simeq 4\sigma_x \Rightarrow \Pr_s \simeq 6,3\cdot 10^{-5} \text{ para procesos gaussianos}$$

resultando

$$\boxed{SNR_{dB} \simeq 6R - 7,24}$$

- En el CD, R=16 con lo que la SNR es 90 dB aprox.
- El cuantificador uniforme pierde 7,24 dB frente al ideal para procesos gaussianos
- Algoritmos de compresión de fuente con pérdidas (*Processament del Senyal - 3B*): PCM, DPCM, ADPCM, Delta