Comunicaciones II

Ejemplos Tema 2
Transmisión digital a través de canales AWGN

Javier Rodríguez Fonollosa y Margarita Cabrera Beán

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Probabilidad de Error de modulaciones M-Ortogonales

- Cálculo exacto (símbolos equiprobables):

$$\mathbf{s}_1=\begin{pmatrix}\sqrt{E_s}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\quad;\quad \mathbf{s}_2=\begin{pmatrix}0\\\sqrt{E_s}\\\vdots\\0\end{pmatrix}\quad;\quad \mathbf{s}_M=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\\sqrt{E_s}\end{pmatrix}$$

- Recordando el criterio MAP (Todos tienen la misma energía media):

$$\hat{\mathbf{s}}=\underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmin}}\left[\tfrac{\|\mathbf{y}-\mathbf{s}_m\|^2}{N_0}-\ln\left(\Pr\{\mathbf{s}_m\}\right)\right]=\underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmax}}\left[\langle\mathbf{y},\mathbf{s}_m\rangle-\tfrac{E_m}{2}+\tfrac{N_0}{2}\ln\left(\Pr\{\mathbf{s}_m\}\right)\right]=$$

$$=\underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmin}}\|\mathbf{y}-\mathbf{s}_m\|^2=\underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmax}}\langle\mathbf{y},\mathbf{s}_m\rangle=\underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmax}}\,\mathbf{y}^T\mathbf{s}_m$$

- En receptores MAP la señal recibida condicionada a un símbolo se expresa como:

$$\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_1=\mathbf{s}_1+\mathbf{n}\sim N\left(\mathbf{s}_1,\tfrac{N_0}{2}\mathbf{I}_L\right)\quad;\quad f(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_1)=\tfrac{1}{(\pi N_0)^{L/2}}\exp\left(-\tfrac{\|\mathbf{y}-\mathbf{s}_1\|^2}{N_0}\right)$$

Probabilidad de Error de modulaciones M-Ortogonales (II)

- Si el primer símbolo ha sido transmitido:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^T\mathbf{s}_m = (\mathbf{s}_1+\mathbf{n})^T\mathbf{s}_m = \mathbf{s}_1{}^T\mathbf{s}_m + \mathbf{n}^T\mathbf{s}_m =$$

$$\begin{pmatrix}\sqrt{E_s} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sqrt{E_s} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_L\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sqrt{E_s} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\tfrac{1}{\sqrt{E_s}}\langle \mathbf{y},\mathbf{s}_1\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{E_s}}\mathbf{y}^T\mathbf{s}_1 = \sqrt{E_s}+\beta_1 = y_1 \quad ; \quad y_1 \sim N\left(\sqrt{E_s}, \tfrac{N_0}{2}\right)$$

$$\tfrac{1}{\sqrt{E_s}}\langle \mathbf{y},\mathbf{s}_m\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{E_s}}\mathbf{y}^T\mathbf{s}_m = \beta_m = y_m \quad ; \quad y_m \sim N\left(0, \tfrac{N_0}{2}\right) (\text{para } m \neq 1)$$

- La decisión se toma a partir del máximo de las correlaciones:

$$\underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmax}} \langle \mathbf{y},\mathbf{s}_m\rangle = \underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmax}}\, y_m$$

Probabilidad de Error de modulaciones M-Ortogonales (III)

- De esta forma la prob. de decisión correcta en el primer símbolo es:

$$1-\Pr(e\,|\,\mathbf{s}_1) = \Pr(\overline{e}\,|\,\mathbf{s}_1) = \int_{\mathbf{y}\in\Re_1 \Leftrightarrow \mathbf{s}_1 = \underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmax}}\langle \mathbf{y},\mathbf{s}_m\rangle} f(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_1)dy =$$

La región de integración se define por $y_2 < y_1, y_3 < y_1 \cdots, y_M < y_1$

$$\int_{y_1=-\infty}^{\infty}\int_{y_2=-\infty}^{y_1}\cdots\int_{y_M=-\infty}^{y_1} f(y_1,y_2,\cdots,y_M\,|\,\mathbf{s}_1)dy_1dy_2\cdots dy_M =$$

$$\int_{y_1=-\infty}^{\infty}\int_{y_2=-\infty}^{y_1}\cdots\int_{y_M=-\infty}^{y_1} f(y_1\,|\,\mathbf{s}_1)f(y_2\,|\,\mathbf{s}_1)f(y_M\,|\,\mathbf{s}_1)dy_1dy_2\cdots dy_M =$$

$$\int_{y_1=-\infty}^{\infty}\left[\int_{y_2=-\infty}^{y_1} f(y_2\,|\,\mathbf{s}_1)dy_2\cdots\int_{y_M=-\infty}^{y_1} f(y_M\,|\,\mathbf{s}_1)dy_M\right] f(y_1\,|\,\mathbf{s}_1)dy_1 =$$

$$\int_{y_1=-\infty}^{\infty}\left[1-\int_{y_2=y_1}^{\infty} f(y_2\,|\,\mathbf{s}_1)dy_2\right]^{M-1} f(y_1\,|\,\mathbf{s}_1)dy_1$$

Probabilidad de Error de modulaciones M-Ortogonales (IV)

- Continuando resulta:

$$1-\Pr(e\,|\,\mathbf{s}_1)=\Pr(\bar{e}\,|\,\mathbf{s}_1)=\int_{y_1=-\infty}^{\infty}\left[1-\int_{y_2=y_1}^{\infty} f(y_2\,|\,\mathbf{s}_1)dy_2\right]^{M-1} f(y_1\,|\,\mathbf{s}_1)dy_1=$$

$$\int_{y_1=-\infty}^{\infty}\left[1-Q(\tfrac{y_1}{\sigma})\right]^{M-1} f(y_1\,|\,\mathbf{s}_1)dy_1=\int_{y_1=-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[1-Q(\tfrac{y_1}{\sigma})\right]^{M-1}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\frac{\left(y_1-\sqrt{E_s}\right)^2}{\sigma^2}\right)dy_1=$$

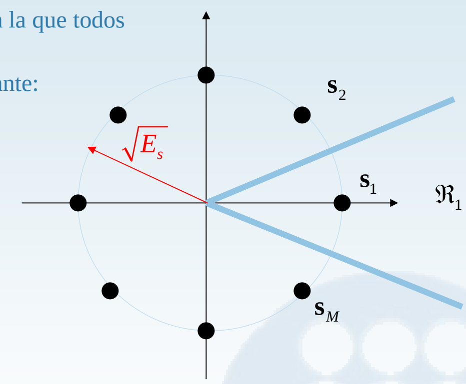
$$=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty}\left[1-Q(x)\right]^{M-1}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\left(x-\sqrt{2E_s/N_0}\right)^2\right)dx$$

- La expresión exacta resulta demasiado complicada y se recurre a la cota de la unión.

$$\boxed{P(e)\le(M-1)Q\left(\tfrac{d_{MIN}}{\sqrt{2N_0}}\right)=(M-1)Q\left(\sqrt{b\tfrac{E_b}{N_0}}\right)=(M-1)Q\left(\sqrt{\tfrac{E_b\log_2 M}{N_0}}\right)}$$

Probabilidad de Error de modulaciones de fase

- Supongamos una distribución de símbolos en el espacio de la señal de dimensión L=2 en la que todos ellos tienen la misma energía.
- La distancia mínima se maximiza mediante:



$$\mathbf{s}_m=\begin{pmatrix}\sqrt{E_s}\cos\left(\frac{(m-1)2\pi}{M}\right)\\ \sqrt{E_s}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(m-1)2\pi}{M}\right)\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}\in\Re_1\Leftrightarrow\left|\arctan\left(\tfrac{y_2}{y_1}\right)\right|<\frac{\pi}{M}$$

$$P(e)=P(e\,|\,s_1)=1-P(\bar{e}\,|\,s_1)=$$

$$=1-\int_{\mathbf{y}\in\Re_1} f(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_1)d\mathbf{y}=$$

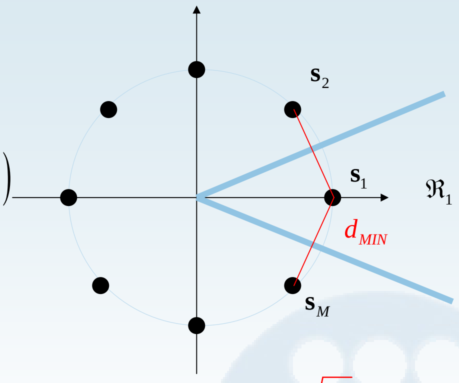
$$=\begin{bmatrix} r=\sqrt{y_1^2+y_2^2} & y_1=r\cos(\theta)\\ \theta=\arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right) & y_2=r\,\mathrm{sen}(\theta)\end{bmatrix}=1-\int_{-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}}\int_0^{\infty}\frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2+E_s-2\sqrt{E_s}\,r\cos(\theta)}{2\sigma^2}\right)drd\theta=\cdots$$

Probabilidad de Error de modulaciones de fase (II)

- Expresión aproximada (no es una cota):

$$P(e) = P(e \mid s_1) \approx 2Q\left(\tfrac{d_{MIN}}{2\sigma}\right) =$$

$$2Q\left(\frac{2\sqrt{E_s}\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{M})}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}}\,\mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{M})\right)$$



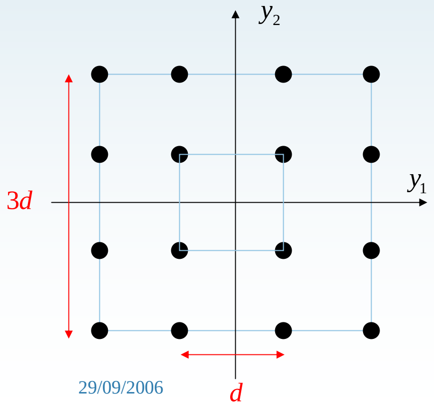
$$d_{MIN} = 2\sqrt{E_s}\,\mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{M})$$

- Utilizando codificación Gray:

$$BER \approx \frac{2}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}}\,\mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{M})\right)$$

Probabilidad de Error de M-QAM (cuadradas)

- Se utiliza una distribución de símbolos en el espacio de la señal de dimensión L=2 donde los bits se distribuyen de forma independiente en cada dimensión: $b = 2b' \;\;;\;\; M = 2^b = 2^{2b'} = (M')^2$
- De esta forma en cada dimensión se tiene el equivalente a una modulación PAM de dimensión $M' = \sqrt{M}$



$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_1[n]\varphi_1(t-nT) + \alpha_2[n]\varphi_2(t-nT)$$

Ejemplo con:

$$M = 16 = 2^4 = 2^{2\times 2}; M' = \sqrt{M} = 4$$

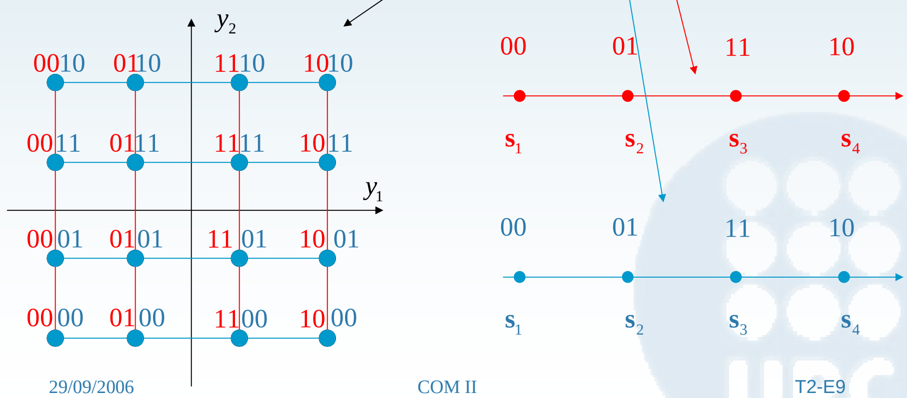
$$b = 4 = 2b'$$

Probabilidad de Error de M-QAM (cuadradas)(II)

- La expresión de los símbolos resulta:

$$M = 16 = 2^4 = 2^{2\times 2}; M' = \sqrt{M} = 4$$
$$b = 4 = 2b'$$

$$\mathbf{s}_m^{16-QAM} = \begin{pmatrix} s_{m_1}^{4-PAM} \\ s_{m_2}^{4-PAM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$



Probabilidad de Error de M-QAM (cuadradas) (III)

- Cálculo de la energía por símbolo:

$$\mathbf{s}_m^{16-QAM} = \begin{pmatrix} s_{m_1}^{4-PAM} \\ s_{m_2}^{4-PAM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
E_{s^{16-QAM}} &= \sum_{m=1}^{16} \Pr(\mathbf{s}_m^{16-QAM}) \left\| \mathbf{s}_m^{16-QAM} \right\|^2 = \frac{1}{16} \sum_{m=1}^{16} \left\| \mathbf{s}_m^{16-QAM} \right\|^2 = \\
&= \frac{1}{16} \sum_{m_1=1}^{4} \sum_{m_2=1}^{4} \left(s_{m_1}^{4-PAM} \right)^2 + \left(s_{m_2}^{4-PAM} \right)^2 = \\
&= \frac{1}{16} \left[\sum_{m_1=1}^{4} \sum_{m_2=1}^{4} \left(s_{m_1}^{4-PAM} \right)^2 + \sum_{m_1=1}^{4} \sum_{m_2=1}^{4} \left(s_{m_2}^{4-PAM} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{16} \left[4 \sum_{m_1=1}^{4} \left(s_{m_1}^{4-PAM} \right)^2 + 4 \sum_{m_2=1}^{4} \left(s_{m_2}^{4-PAM} \right)^2 \right] = \\
&= \frac{1}{4} \sum_{m_1=1}^{4} \left(s_{m_1}^{4-PAM} \right)^2 + \frac{1}{4} \sum_{m_2=1}^{4} \left(s_{m_2}^{4-PAM} \right)^2 = 2E_{s^{4-PAM}}
\end{aligned}$$

Probabilidad de Error de M-QAM (cuadradas) (IV)

- Cálculo de energía de bit:

$$E_{\mathbf{s}_m^{16-QAM}} = 2E_{s_{m_1}^{4-PAM}}$$

$$E_b^{16-QAM} = \frac{1}{4}E_{\mathbf{s}_m^{M-QAM}} = \frac{2}{4}E_{s_{m1}^{4-PAM}} = \frac{1}{2}E_{s_{m1}^{4-PAM}} = E_{b'}^{4-PAM} = E_b$$

- Recordando la BER para 4-PAM:

$$BER^{4-PAM} \simeq \tfrac{3}{4}Q\left(\sqrt{\tfrac{4E_b}{5N_0}}\right)$$

- Puesto que los 4 bits de 16-QAM se reparten en dos 4-PAM de 2 bits:

$$BER^{16-QAM} = \frac{1}{2}BER^{4-PAM} + \frac{1}{2}BER^{4-PAM} = BER^{4-PAM} \simeq \tfrac{3}{4}Q\left(\sqrt{\tfrac{4E_b}{5N_0}}\right)$$

Probabilidad de Error de M-QAM (cuadradas) (V)

- Relación entre las energías de símbolo y bit

$$\mathbf{s}_m^{M-QAM} = \begin{pmatrix} s_{m1}^{M'-PAM} \\ s_{m2}^{M'-PAM} \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\mathbf{s}_m^{M-QAM}} = E_{s_{m_1}^{M'-PAM}} + E_{s_{m_1}^{M'-PAM}} = 2E_{s_{m_1}^{M'-PAM}}$$

$$E_b^{M-QAM} = \frac{1}{b}E_{\mathbf{s}_m^{M-QAM}} = \frac{2}{b}E_{s_{m1}^{M'-PAM}} = \frac{1}{b'}E_{s_{m1}^{M'-PAM}} = E_{b'}^{M'-PAM} = E_b$$

- Cálculo de la BER. Vimos que el el caso de PAM con codificación Gray:

$$BER \approx \tfrac{2M'-2}{M'\log_2 M'}Q\left(\sqrt{\tfrac{6b'}{M'^2-1}\tfrac{E_{b'}^{M'-PAM}}{N_0}}\right) = \tfrac{2M'-2}{M'\log_2 M'}Q\left(\sqrt{\tfrac{6\log_2 M'}{M'^2-1}\tfrac{E_b}{N_0}}\right) =$$

$$= 4\tfrac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}\log_2 M}Q\left(\sqrt{\tfrac{3\log_2 M}{M-1}\tfrac{E_b}{N_0}}\right) = \tfrac{4}{\log_2 M}\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\tfrac{3\log_2 M}{M-1}\tfrac{E_b}{N_0}}\right)$$

- La expresión de la BER para cada componente coincide con la BER total

Control 23/11/01: Sistema de transmisión en el que la varianza del ruido depende del símbolo

- Primer caso: L=1

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha[k]\varphi(t-kT)\quad ;\quad \alpha[k]=\pm\frac{d}{2}\quad ;\quad p=1/2$$

$$\mathbf{y}[k]\,|\,s_1=\mathbf{y}\,|\,s_1=-\tfrac{d}{2}+\beta\,|\,s_1\sim N(-\tfrac{d}{2},\sigma_0^2)$$

$$\mathbf{y}[k]\,|\,s_2=\mathbf{y}\,|\,s_2=\tfrac{d}{2}+\beta\,|\,s_2\sim N(\tfrac{d}{2},\sigma_1^2)$$

$$2\sigma_1^2=\sigma_0^2$$

  – 1) Regla de decisión MAP

$$\underset{s_m}{\operatorname{argmax}}\ f(\mathbf{y}\,|\,s_m)\Pr(s_m)=\underset{s_m}{\operatorname{argmax}}\ f(\mathbf{y}\,|\,s_m)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_1+d/2)^2}{\sigma_0^2}\right)\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_1-d/2)^2}{\sigma_1^2}\right)\end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_1+d/2)^2}{\sigma_0^2}\right)\underset{<\,\mathbf{s}_2}{\overset{>\,\mathbf{s}_1}{}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_1-d/2)^2}{\sigma_1^2}\right)$$

Control 23/11/01 (II)

  – 2) Cálculo de los umbrales para: $\sigma_0^2=2\sigma_1^2=d^2$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\gamma+d/2)^2}{d^2}\right)=\sqrt{2}\exp\left(-\frac{(\gamma-d/2)^2}{d^2}\right)$$

$$-\frac{(\gamma+d/2)^2}{2d^2}=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{(\gamma-d/2)^2}{d^2}$$

$$-\left(\gamma^2+d\gamma+\frac{d^2}{4}\right)=d^2\ln 2-2\left(\gamma^2-d\gamma+\frac{d^2}{4}\right)$$

$$\gamma^2-3d\gamma+\frac{d^2}{4}-d^2\ln 2=0$$

Ecuación de segundo grado

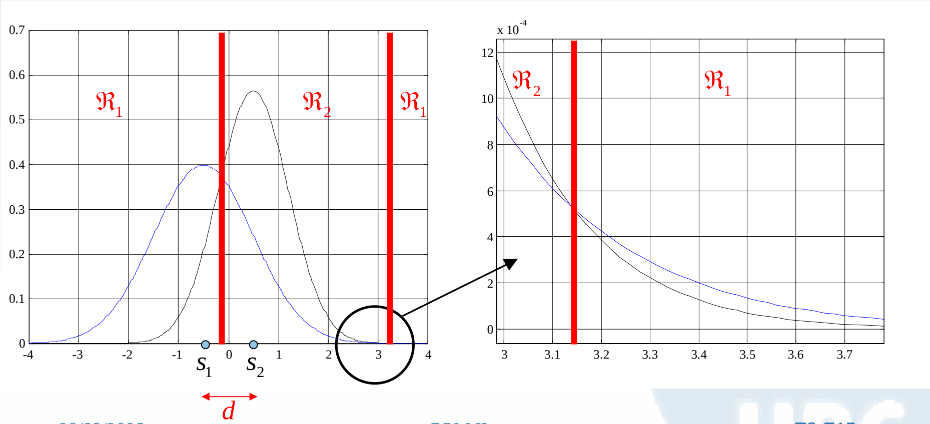
$$\gamma_1=-0.1411d$$

$$\gamma_2=3.1411d$$

Control 23/11/01 (III)

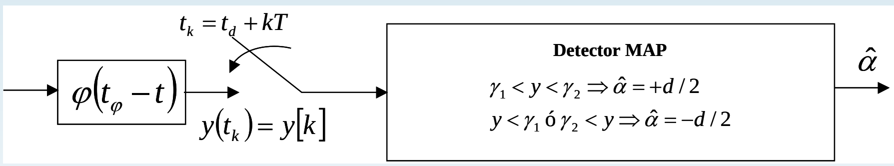
Representación gráfica e interpretación de la probabilidad de error:

$$\gamma_1 = -0.1411d$$
$$\gamma_2 = 3.1411d$$



Control 23/11/01 (IV)

– Diseño resultante:



– 3) Cálculo de la probabilidad de error:

$$BER = P(e) = \tfrac{1}{2}P(e \mid s_1) + \tfrac{1}{2}P(e \mid s_2) =$$
$$= \tfrac{1}{2}P(\gamma_1 < y < \gamma_2 \mid s_1) + \tfrac{1}{2}\left[P(y < \gamma_1 \mid s_2) + P(\gamma_2 < y \mid s_2)\right]$$

Control 23/11/01 (V)

– Cálculo de la probabilidad de error

$$\frac{1}{2}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\exp\left(-\frac{(y+d/2)^2}{2\sigma_0^2}\right)dy+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\gamma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp\left(-\frac{(y-d/2)^2}{2\sigma_1^2}\right)dy+\frac{1}{2}\int_{\gamma_2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp\left(-\frac{(y-d/2)^2}{2\sigma_1^2}\right)dy=$$

$$\tfrac{1}{2}\left(Q\left(\frac{\gamma_1+d/2}{\sigma_0}\right)-Q\left(\frac{\gamma_2+d/2}{\sigma_0}\right)+Q\left(\frac{d/2-\gamma_1}{\sigma_1}\right)+Q\left(\frac{\gamma_2-d/2}{\sigma_1}\right)\right)=$$

$$\tfrac{1}{2}\left(Q\left(\frac{0.359d}{d}\right)-Q\left(\frac{3.641d}{d}\right)+Q\left(\frac{0.641\sqrt{2}d}{d}\right)+Q\left(\frac{2.6411\sqrt{2}d}{d}\right)\right)$$

– Aproximándolo por los dos términos más significativos:

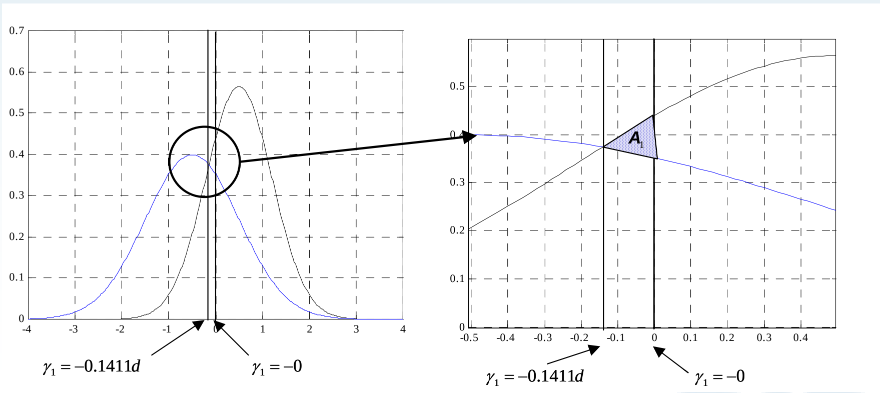
$$BER\cong\tfrac{1}{2}\left(Q(0.359)+Q(0.905)\right)=\tfrac{1}{2}\left(0.3594+0.1841\right)=0.2717$$

Control 23/11/01 (VI)

– 4) Comparación con la BER resultante de situar un único umbral en el origen:

$$BER_{\gamma=0}=\tfrac{1}{2}P(0<y\,|\,s_1)+\tfrac{1}{2}P(y<0\,|\,s_2)=\tfrac{1}{2}\left[Q\left(\frac{d/2}{\sigma_0}\right)+Q\left(\frac{d/2}{\sigma_1}\right)\right]=$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[Q(0,5)+Q(0,7071)\right]=0,2737\text{ (inferior al 2\%)}$$



Control 23/11/01 (VII)

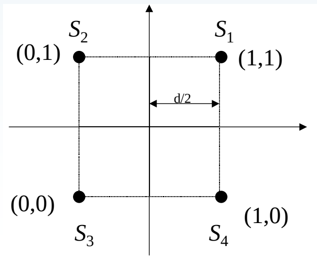
- Segundo caso: L=2

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_1[n]\varphi_1(t-nT)+\alpha_2[n]\varphi_2(t-nT)\quad ;\quad \mathbf{s}_m=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\frac{d}{2}\\ \pm\frac{d}{2}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_m=\mathbf{s}_m+\mathbf{n}\,|\,s_m$$

$$\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_1=\mathbf{s}_1+\mathbf{n}\,|\,\mathbf{s}_1\sim N\left(\mathbf{s}_1,\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0\\ 0 & \sigma_1^2\end{pmatrix}\right)\quad ;\quad \mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_2=\mathbf{s}_2+\mathbf{n}\,|\,\mathbf{s}_2\sim N\left(\mathbf{s}_2,\begin{pmatrix}\sigma_0^2 & 0\\ 0 & \sigma_1^2\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_3=\mathbf{s}_3+\mathbf{n}\,|\,\mathbf{s}_3\sim N\left(\mathbf{s}_3,\begin{pmatrix}\sigma_0^2 & 0\\ 0 & \sigma_0^2\end{pmatrix}\right)\quad ;\quad \mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_4=\mathbf{s}_4+\mathbf{n}\,|\,\mathbf{s}_4\sim N\left(\mathbf{s}_4,\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0\\ 0 & \sigma_0^2\end{pmatrix}\right)$$

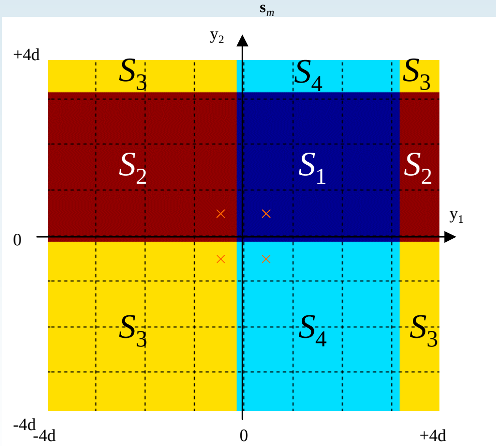


Control 23/11/01 (VIII)

- Ante la dificultad de su cálculo se proporciona: $\underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmax}}\, f(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_m)\Pr(\mathbf{s}_m)$

Que determina la partición

$$\underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmax}}\, f(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_m)\Pr(\mathbf{s}_m)=\mathbf{s}_i \Leftrightarrow \mathbf{y}\in\Re_i$$

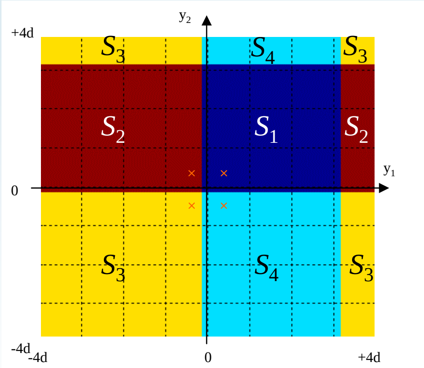


El cuadrado cuyo máximo viene dado por S1, se halla delimitado por los puntos: (-0.14d, -0.14d), (-0.14d, +3.14d), (+3.14d, -0.14d), (+3.14d, +3.14d).

Control 23/11/01 (IX)

- Cálculo de la prob. de error exacta condicionada a $\mathbf{s}_2$:

$$\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_2 + \mathbf{n}\,|\,\mathbf{s}_2 \sim N\left(\mathbf{s}_2, \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}\right)$$



$$P(e\,|\,\mathbf{s}_2) = P(\mathbf{y} \in \Re_3 \bigcup \Re_4 \,|\, \mathbf{s}_2) + P(\mathbf{y} \in \Re_1 \,|\, \mathbf{s}_2) =$$
$$= P(y_2 > 3{,}14d \,|\, \mathbf{s}_2) + P(y_2 < -0{,}14d \,|\, \mathbf{s}_2) +$$
$$+ P(-0{,}14d < y_1 < 3{,}14d; -0{,}14d < y_2 < 3{,}14d \,|\, \mathbf{s}_2)$$

Control 23/11/01 (X)

- Resulta:

$$P(e\,|\,\mathbf{s}_2) = P(\mathbf{y} \in \Re_3 \bigcup \Re_4 \,|\, \mathbf{s}_2) + P(\mathbf{y} \in \Re_1 \,|\, \mathbf{s}_2) =$$

$$= Q\left(\frac{2.64d}{\sigma_1}\right) + Q\left(\frac{0.64d}{\sigma_1}\right) + \left(Q\left(\frac{0.36d}{\sigma_0}\right) - Q\left(\frac{3.64d}{\sigma_0}\right)\right)\left(1 - Q\left(\frac{2.64d}{\sigma_1}\right) - Q\left(\frac{0.64d}{\sigma_1}\right)\right) \approx$$

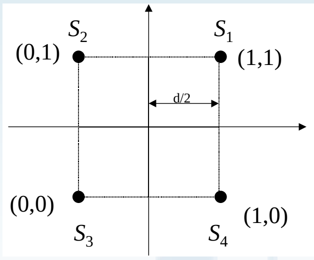
- Considerando $\quad E_b = \frac{E_s}{2} = \frac{d^2}{4} \quad ; \quad \sigma_1^2 = \frac{N_0}{2} \quad ; \quad \sigma_0^2 = N_0$

$$= Q\left(\sqrt{55.76\frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{3.277\frac{E_b}{N_0}}\right) + \left(Q\left(\sqrt{0.5184\frac{E_b}{N_0}}\right) - Q\left(\sqrt{53\frac{E_b}{N_0}}\right)\right)$$

Control 23/11/01 (XI)

- Cálculo de la prob. de error aproximada condicionada a $\mathbf{s}_2$:

$$\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_2 + \mathbf{n}\,|\,\mathbf{s}_2 \sim N\left(\mathbf{s}_2, \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}\right)$$



$$P(e\,|\,\mathbf{s}_2) =$$
$$= P(y_1 > 0\,|\,\mathbf{s}_2) + P(y_2 < 0\,|\,\mathbf{s}_2) - P(y_1 > 0; y_2 < 0\,|\,\mathbf{s}_2) =$$
$$= Q\left(\frac{d/2}{\sigma_0}\right) + Q\left(\frac{d/2}{\sigma_1}\right) - Q\left(\frac{d/2}{\sigma_0}\right) Q\left(\frac{d/2}{\sigma_1}\right)$$

Control 23/11/01 (XII)

- Considerando $$E_b = \frac{E_s}{2} = \frac{d^2}{4} \quad ; \quad \sigma_1^2 = \frac{N_0}{2} \quad ; \quad \sigma_0^2 = N_0$$

Resulta $$BER \approx Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- Tabla resumen

$\sqrt{\ }$ (Argumento Q)	MAP	Sub-óptimo	Pérdida de $\frac{E_b}{N_0}$ en lineal	Pérdida de $\frac{E_b}{N_0}$ en dB
Mayor área	$0.5184\frac{E_b}{N_0}$	$\frac{E_b}{N_0}$	$10\log_{10}(0.5185)$	-2.8 dB
Menor área	$3.277\frac{E_b}{N_0}$	$2\frac{E_b}{N_0}$	$10\log_{10}\left(\frac{3.277}{2}\right)$	+2.14 dB

Ejercicio 4 (Colección de problemas)

- Transmisión del mismo bit mediante los dos elementos de la base (redundancia) con bits equiprobables:

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\alpha_1[n]\varphi_1(t-nT)+\alpha_1[n]\varphi_2(t-nT)\right)\quad ;\quad \mathbf{s}_m=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_1\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

Caso ruido gaussiano:

$$\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_m=\mathbf{s}_m+\mathbf{n}$$

$$\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_1=\mathbf{s}_1+\mathbf{n}\,|\,\mathbf{s}_1\sim N\left(\mathbf{s}_1,\frac{N_0}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\quad ;\quad \mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_2=\mathbf{s}_2+\mathbf{n}\,|\,\mathbf{s}_2\sim N\left(\mathbf{s}_2,\frac{N_0}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$f(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_m)=\frac{1}{(\pi N_0)^{L/2}}\exp\left(-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{s}_m\|^2}{N_0}\right)\Rightarrow\begin{cases}f(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_1)=\frac{1}{\pi N_0}\exp\left(-\frac{(y_1-1)^2+(y_2-1)^2}{N_0}\right)\\ f(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_2)=\frac{1}{\pi N_0}\exp\left(-\frac{(y_1+1)^2+(y_2+1)^2}{N_0}\right)\end{cases}$$

Ejercicio 4 (Colección de problemas) (II)

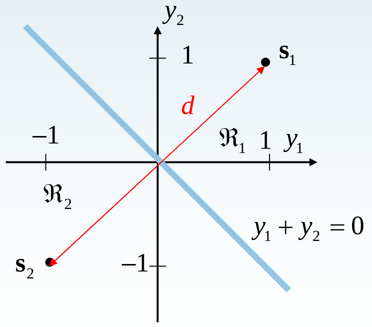
- Cálculo de las regiones de decisión:

$$f(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_1)=f(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_2)\Rightarrow\frac{1}{\pi N_0}\exp\left(-\frac{(y_1-1)^2+(y_2-1)^2}{N_0}\right)=\frac{1}{\pi N_0}\exp\left(-\frac{(y_1+1)^2+(y_2+1)^2}{N_0}\right)$$

$$(y_1-1)^2+(y_2-1)^2=(y_1+1)^2+(y_2+1)^2$$

$$-2y_1-2y_2=2y_1+2y_2$$

$$y_1+y_2=0$$



$$BER=P(e)=Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right)=Q\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right)$$

Comparándolo con el caso sin redundancia (equivalente a considerar tan sólo una dimensión):

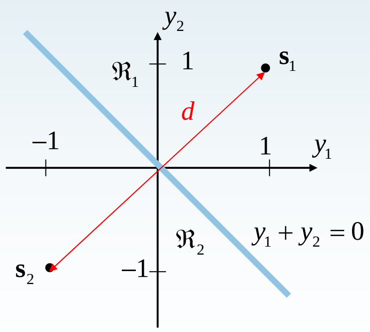
$$BER=P(e)=Q\left(\frac{d_1/2}{\sigma}\right)=Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

Ejercicio 4 (Colección de problemas) (III)

- Expresando la probabilidad de error en función de le energía por bit:

$$E_s = E_b = \frac{d^2}{4} \quad ; \quad \sigma^2 = \frac{N_0}{2}$$

$$BER = P(e) = Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$



Sin redundancia

$$E_b = E_s = \frac{d_1^2}{4}$$

$$BER_1 = Q\left(\frac{d_1/2}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Ejercicio 4 (Colección de problemas) (IV)

- Sin embargo en el problema el ruido es **Laplaciano** y se nos proporciona la función densidad de probabilidad en el espacio de la señal para cada componente:

$$y = \mathbf{s}_m + \mathbf{n} = \pm\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}$$

$$f(\beta_1) = \frac{1}{2}e^{-|\beta_1|} \quad ; \quad f(\beta_2) = \frac{1}{2}e^{-|\beta_2|}$$

- Además se indica que son independientes entre si. Se pide en primer lugar la función densidad de probabilidad del vector de ruido **n:**

$$f(\mathbf{n}) = f(\beta_1, \beta_1) = f(\beta_1)\,f(\beta_2) = \frac{1}{2}e^{-|\beta_1|}\ \frac{1}{2}e^{-|\beta_2|} = \frac{1}{4}e^{-(|\beta_1|+|\beta_2|)}$$

Ejercicio 4 (Colección de problemas) (V)

- A continuación se pide la función densidad de probabilidad de la señal recibida **y** condicionada a cada uno de los posibles símbolos transmitidos:

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_1 + \mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}\\ \mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_2 + \mathbf{n} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}\\ f_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) = f_{\beta_1,\beta_1}(\beta_1,\beta_1) = \frac{1}{4}e^{-(|\beta_1|+|\beta_2|)}\end{array}\right\} \begin{array}{l} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_1) = \frac{1}{4}e^{-(|y_1-1|+|y_2-1|)}\\ f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_2) = \frac{1}{4}e^{-(|y_1+1|+|y_2+1|)}\end{array}$$

Ejercicio 4 (Colección de problemas) (VI)

- En el apartado c) se pide una demostración vista en la teoría (definición del criterio MAP).

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmax}}\ \Pr\{\mathbf{s}_m\,|\,\mathbf{y}\} = \underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmax}}\left[\frac{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_m)}{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})}\Pr\{\mathbf{s}_m\}\right] = \underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmax}}\left[f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_m)\Pr\{\mathbf{s}_m\}\right]$$

en donde $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_m)$ el la función de máxima verosimilitud (ML) y $\Pr\{\mathbf{s}_m\}$ es la probabilidad "a priori" de cada símbolo $\mathbf{s}_m$

- Cálculo de las regiones de decisión:

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_1) = \frac{1}{4}e^{-(|y_1-1|+|y_2-1|)} \underset{<_{\mathbf{s}_2}}{\overset{>^{\mathbf{s}_1}}{}} \frac{1}{4}e^{-(|y_1+1|+|y_2+1|)} = f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{s}_2)$$

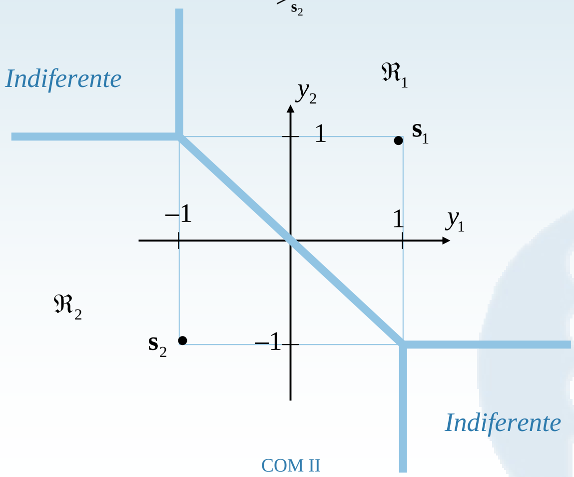
$$-\left(|y_1-1|+|y_2-1|\right) \underset{<_{\mathbf{s}_2}}{\overset{>^{\mathbf{s}_1}}{}} -\left(|y_1+1|+|y_2+1|\right)$$

$$|y_1-1|+|y_2-1| \underset{>_{\mathbf{s}_2}}{\overset{<^{\mathbf{s}_1}}{}} |y_1+1|+|y_2+1|$$

Ejercicio 4 (Colección de problemas) (VII)

- Representación de las regiones:

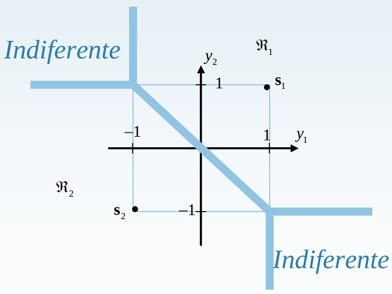
$$|y_1-1|+|y_2-1| \underset{s_2}{\overset{s_1}{\lessgtr}} |y_1+1|+|y_2+1|$$



Ejercicio 4 (Colección de problemas) (VIII)

- Deducción de la región indiferente:

$$\text{Para el caso: } \left.\begin{array}{r} y_1>1 \\ y_2<-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} |y_1-1|=(y_1-1)=y_1-1 \\ |y_2-1|=-(y_2-1)=-y_2+1 \\ |y_1+1|=(y_1+1)=y_1+1 \\ |y_2+1|=-(y_2+1)=-y_2-1 \end{array}\right\}$$



la condición:

$$|y_1-1|+|y_2-1| \underset{s_2}{\overset{s_1}{\lesseqgtr}} |y_1+1|+|y_2+1|$$

equivale a:

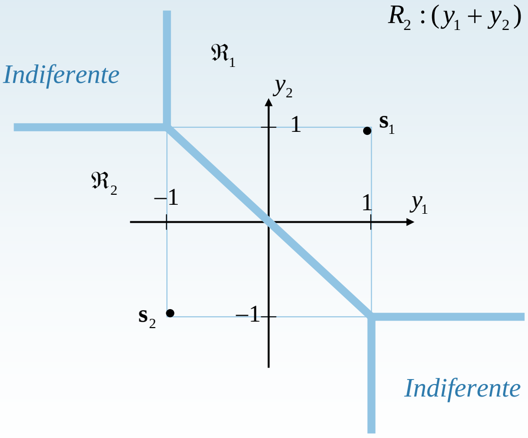
$$y_1-1-y_2+1 \underset{s_2}{\overset{s_1}{\lesseqgtr}} y_1+1-y_2-1$$

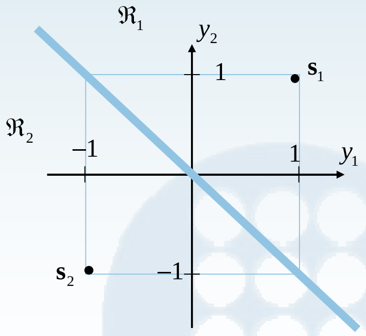
$$0 \underset{s_2}{\overset{s_1}{\lesseqgtr}} 0$$

Ejercicio 4 (Colección de problemas) (IX)

- Se propone simplificar la división de regiones a la expresada por las ecuaciones:

$$R_1 : (y_1 + y_2) > 0$$
$$R_2 : (y_1 + y_2) < 0$$





Ejercicio 4 (Colección de problemas) (X)

- Puesto que la nueva regla de decisión es igualmente óptima se define la variable de decisión:

$$r = y_1 + y_2$$

- En ausencia de ruido:

$$r = y_1 + y_2 = \begin{cases} 1+1=2 \\ -1-1=-2 \end{cases}$$

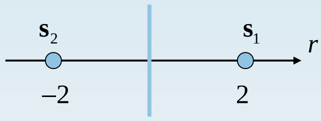
- El umbral se sitúa en 0 y por tanto:

$$BER = P(e) = \Pr(\mathbf{s}_1)P(e \mid \mathbf{s}_1) + \Pr(\mathbf{s}_2)P(e \mid \mathbf{s}_2) = \tfrac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} f(r \mid \mathbf{s}_1)dr + \int_{0}^{\infty} f(r \mid \mathbf{s}_2)dr\right]$$

Ejercicio 4 (Colección de problemas) (XI)

- Cálculo de la función densidad de probabilidad condicionada:
  - Hemos visto:

$$r = y_1 + y_2 = \pm 2 + \beta_1 + \beta_2$$



  - Por tanto:

$$r \mid \mathbf{s}_1 = 2 + \beta_1 + \beta_2 = 2 + \beta$$
$$r \mid \mathbf{s}_2 = -2 + \beta_1 + \beta_2 = -2 + \beta$$

  - Como es habitual una vez se condiciona al símbolo transmitido, la única componente aleatoria de *y* es la componente de ruido, suma de las componentes de ruido originales. Además (tal y como se indica en el enunciado) dado que las componentes originales de ruido son independientes:

$$f_\beta(\beta) = f_{\beta_1}(\beta) * f_{\beta_2}(\beta) = \frac{1}{2} e^{-|\beta|} * \frac{1}{2} e^{-|\beta|}$$

Ejercicio 4 (Colección de problemas) (XII)

- Cálculo de la convolución:

$$f_\beta(\beta) = f_{\beta_1}(\beta) * f_{\beta_2}(\beta) = \frac{1}{2} e^{-|\beta|} * \frac{1}{2} e^{-|\beta|} = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-|\beta - x|} dx =$$

$$\frac{1}{4}\left[\int_0^\infty e^{-x} e^{-|\beta - x|} dx + \int_0^\infty e^{-x} e^{-|\beta + x|} dx\right] \underset{\beta>0}{=}$$

$$\frac{1}{4}\left[\int_0^\beta e^{-x} e^{-\beta} e^{x} dx + \int_\beta^\infty e^{-x} e^{\beta} e^{-x} dx + \int_0^\infty e^{-x} e^{-\beta} e^{-x} dx\right] =$$

$$\frac{1}{4}\left[\beta e^{-\beta} + e^{\beta}\,\tfrac{1}{2} e^{-2\beta} + e^{-\beta}\,\tfrac{1}{2}\right] = \tfrac{(\beta+1)}{4} e^{-\beta}$$

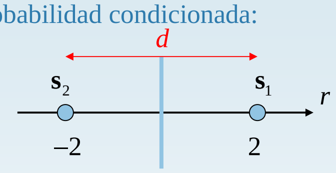
- Considerando que la autoconvolución es par:

$$f_\beta(\beta) = \tfrac{(|\beta|+1)}{4} e^{-|\beta|}$$

Ejercicio 4 (Colección de problemas) (XIII)

- Cálculo de la función densidad de probabilidad condicionada:
  - Hemos visto:

$$f_\beta(\beta) = \tfrac{(|\beta|+1)}{4} e^{-|\beta|}$$



$$r \mid \mathbf{s}_1 = 2 + \beta_1 + \beta_2 = 2 + \beta \quad ; \quad f(r \mid \mathbf{s}_1) = \tfrac{(|r-2|+1)}{4} e^{-|r-2|} = \tfrac{(|r-d/2|+1)}{4} e^{-|r-d/2|}$$

$$r \mid \mathbf{s}_2 = -2 + \beta_1 + \beta_2 = -2 + \beta \quad ; \quad f(r \mid \mathbf{s}_2) = \tfrac{(|r+2|+1)}{4} e^{-|r+2|} = \tfrac{(|r+d/2|+1)}{4} e^{-|r+d/2|}$$

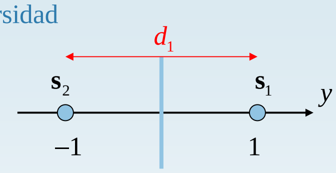
$$P(e) = \frac{1}{2}\left[P(e \mid s_1) + P(e \mid s_2)\right] = P(e \mid s_2) = \int_0^\infty f(r \mid \mathbf{s}_2) dr =$$

$$= \int_0^\infty \tfrac{(|r+d/2|+1)}{4} e^{-|r+d/2|} dr = \tfrac{d/2+2}{4} e^{-d/2}$$

Ejercicio 4 (Colección de problemas) (XIV)

- Cálculo en el caso de no utilizar diversidad
  - En este caso:

$$f_\beta(\beta) = \tfrac{1}{2} e^{-|\beta|}$$



$$y \mid \mathbf{s}_1 = 1 + \beta \quad ; \quad f(y \mid \mathbf{s}_1) = \tfrac{1}{2} e^{-|y-1|} = \tfrac{1}{2} e^{-|y-d_1/2|}$$

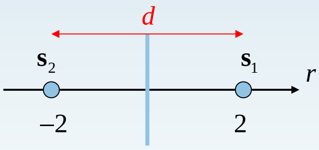
$$y \mid \mathbf{s}_2 = -1 + \beta \quad ; \quad f(y \mid \mathbf{s}_2) = \tfrac{1}{2} e^{-|y+d_1/2|}$$

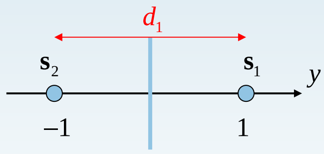
$$P(e) = \frac{1}{2}\left[P(e \mid s_1) + P(e \mid s_2)\right] = P(e \mid s_2) = \int_0^\infty f(y \mid \mathbf{s}_2) dy =$$

$$= \int_0^\infty \tfrac{1}{2} e^{-|y+d_1/2|} dy = \frac{1}{2} e^{-d_1/2}$$

Ejercicio 4 (Colección de problemas) (XV)

- Comparación entre ambos casos:





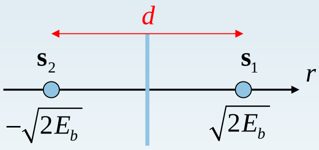
$$P(e) = \frac{d/2+2}{4} e^{-d/2} = e^{-2} \approx 0.1353$$

$$P_1(e) = \frac{1}{2} e^{-d_1/2} = \frac{1}{2} e^{-1} \approx 0.1839$$

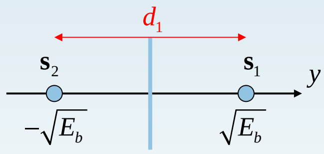
Ejercicio 4 (Colección de problemas) (XVI)

- Comparación entre ambos casos normalizando con respecto a la energía por bit :

Con redundancia



Sin redundancia



- Cuando no se transmite con redundancia:

$$E_{1b} = \frac{d_1^2}{4} \Rightarrow P_1(e) = \frac{1}{2} e^{-d_1/2} = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{E_b}}$$

- Cuando se utiliza redundancia se dobla la energía por bit:

$$E_b = \frac{d^2}{8} \Rightarrow P(e) = \frac{d/2+2}{4} e^{-d/2} = \frac{\sqrt{2E_b}+2}{4} e^{-\sqrt{2E_b}}$$

Ejercicio 4 (Colección de problemas) (XVII)

- Representación gráfica de la prob de error normalizada

$$P_1(e) = BER_1 = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{E_b}} \qquad P(e) = BER = \frac{\sqrt{2E_b}+2}{4} e^{-\sqrt{2E_b}}$$