

## *Comunicaciones II*

### *Tema 2*

#### *Transmisión digital a través de canales AWGN*

*Javier Rodríguez Fonollosa y Margarita Cabrera Beán*



Departament de Teoria  
del Senyal i Comunicacions



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

### *Índice del Tema 2*

#### *Transmisión digital a través de canales AWGN*

- 2.1 Modelo de Transmisión digital
  - Definición
  - Modulaciones PAM (Pulse Amplitude Modulation)
  - Modulaciones PPM (Pulse Position Modulation)
  - Modulaciones biortogonales
- 2.2 Representación Geométrica
  - Definición
  - Propiedades de la Representación Geométrica
  - Representación Temporal
  - Modulaciones PAM en espacio de señal
  - Modulaciones PPM en espacio de señal
  - Modulaciones Biortogonales en espacio de señal
  - Determinación sistemática de una base: Gram-Schmidt
  - Aplicación de Gram-Schmidt para modulaciones biortogonales

15/09/2006

COM II

T2-2

*Indice del Tema 2*  
*Transmisión digital a través de canales AWGN (II)*

- 2.3 Receptor óptimo para PM en AWGN
  - Consideraciones previas
  - Receptor MAP
  - Expresión vectorial
  - Caracterización estadística del vector de ruido
  - Detector óptimo: Criterio MAP (Maximum a Posteriori)
  - Detector óptimo: Expresión alternativa
  - Comparación entre las implementaciones alternativas
  - Elección de las zonas de decisión
  - Zona de decisión para 2PAM
  - Zona de decisión para 2PPM
  - Zona de decisión para señales biortogonales
  - Consideraciones sobre la dependencia temporal de los símbolos

15/09/2006

COM II

T2-3

*Indice del Tema 2*  
*Transmisión digital a través de canales AWGN (III)*

- 2.4 Cálculo de la probabilidad de error
  - El criterio MAP minimiza la probabilidad de error
  - Expresión general de la Probabilidad de error
  - Probabilidad de error de 2PAM
  - Probabilidad de error de 2PAM (símbolos equiprobables)
  - Probabilidad de error de MPAM
  - Probabilidad de error de 2PPM
  - Comparación entre 2PAM y 2PPM
  - Probabilidad de error de la modulación biortogonal
  - Aproximaciones de la Probabilidad de Error
  - Probabilidad de Error de modulaciones M-Ortogonales
  - Comparación de BER en modulaciones PM

15/09/2006

COM II

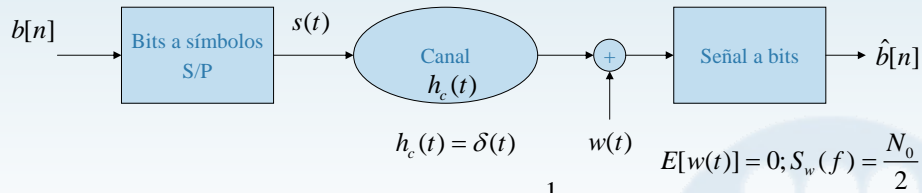
T2-4

## 2.1 Modelo de Transmisión digital:

### Definición

- En este tema se considerará la transmisión digital en canales ideales en presencia de ruido gaussiano blanco y aditivo (Additive White Gaussian Noise - AWGN). Todas las señales son reales.

$$b[n] \in \{1, 0\}; \quad \Pr\{b[n] = 0\} = p; \quad \Pr\{b[n] = 1\} = 1 - p$$



- La velocidad de entrada de bits es:  $r_b = \frac{1}{T_b}$
- Mientras que en la señal  $s(t)$  se transmiten símbolos que agrupan  $b$  bits:

$$r = \frac{r_b}{b} \quad T = bT_b$$

15/09/2006

COM II

T2-5

### Definición (II)

- Las diferentes modulaciones digitales diferirán en la función de asignación de bits. Agrupando bits en bloques de  $b$  se generarán al menos:

$$M = 2^b \text{ símbolos}$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_m(t - kT) \quad s_m(t) \in \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}$$

$$\text{con probabilidad } \Pr\{s_m(t)\} = \Pr\{s_m\}$$

- Se define la energía media por símbolo como:

$$E_s = E[E_m] = \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} E_m; \quad E_m = \int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t) dt$$

$$E_b = \frac{E_s}{b}$$

15/09/2006

COM II

T2-6

### Modulaciones PAM (Pulse Amplitude Modulation)

- Se entiende por modulaciones PAM aquellas en las que los símbolos se obtienen como:

$$s_m(t) = a_m \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

- Caso binario:  $b=1$   $M = 2^b = 2$

$$b[n] = 0, a_1 = -A \Rightarrow s_1(t) = -A \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right); b[n] = 1, a_2 = A \Rightarrow s_2(t) = A \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

$$E_s = E[E_m] = \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} E_m = pA^2T + (1-p)A^2T = A^2T$$

BITS	Símbolo $m$	$\Pr\{s_m(t)\}$	$s_m(t)$
0	1	$p$	$-A \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$
1	2	$(1-p)$	$A \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

15/09/2006

COM II

T2-7

### Modulaciones PAM (Pulse Amplitude Modulation) (II)

- Caso de cuatro niveles:  $b=2$

$$M = 2^2 = 4$$

$$E_s = E[E_m] = \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} E_m = (9p^2 + p(1-p) + (1-p)^2 + 9(1-p)p)A^2T = (1+8p)A^2T$$

$$E_b = \frac{1}{2} E_s$$

BITS	Símbolo $m$	$\Pr\{s_m(t)\}$	$s_m(t)$
0 0	1	$pp$	$-3A \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$
0 1	2	$p(1-p)$	$-A \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$
1 1	3	$(1-p)(1-p)$	$A \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$
1 0	4	$(1-p)p$	$3A \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

15/09/2006

COM II

T2-8

### Modulaciones PPM (Pulse Position Modulation)

- En este caso:

$$s_m(t) = A\Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2M} - (m-1)\frac{T}{M}}{\frac{T}{M}}\right)$$

- Caso binario:  $b=1$

$$M = 2^1 = 2$$

$$E_s = E[E_m] = \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} E_m = (p + (1-p))\frac{1}{2}A^2T = \frac{1}{2}A^2T = E_b$$

BITS	Símbolo $m$	$\Pr\{s_m(t)\}$	$s_m(t)$
0	1	$p$	$A\Pi\left(\frac{t - T/4}{T/2}\right)$
1	2	$(1-p)$	$A\Pi\left(\frac{t - 3T/4}{T/2}\right)$

15/09/2006

COM II

T2-9

### Modulaciones PPM (Pulse Position Modulation) (II)

- Caso de cuatro niveles:  $b=2$

$$M = 2^2 = 4$$

$$E_s = E[E_m] = \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} E_m = (p^2 + p(1-p) + (1-p)^2 + (1-p)p)\frac{1}{4}A^2T = \frac{1}{4}A^2T$$

$$E_b = \frac{1}{2}E_s = \frac{1}{8}A^2T$$

BITS	Símbolo $m$	$\Pr\{s_m(t)\}$	$s_m(t)$
00	1	$pp$	$A\Pi\left(\frac{t - T/8}{T/4}\right)$
01	2	$p(1-p)$	$A\Pi\left(\frac{t - 3T/8}{T/4}\right)$
11	3	$(1-p)(1-p)$	$A\Pi\left(\frac{t - 5T/8}{T/4}\right)$
10	4	$(1-p)p$	$A\Pi\left(\frac{t - 7T/8}{T/4}\right)$

15/09/2006

COM II

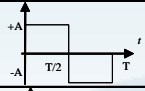
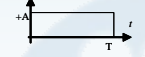
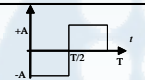

T2-10

### Modulaciones biortogonales

- Se denomina así al conjunto de señales que son ortogonales dos a dos. Ejemplo para  $M=4$  señales ( $b=2$ ).

$$M = 2^2 = 4$$

$$E_b = \frac{1}{2} E_s = \frac{1}{2} A^2 T$$

BITS	Símbolo $m$	$P(s_m(t))$	$s_m(t)$
00	1	$pp$	
01	2	$p(1-p)$	
11	3	$(1-p)(1-p)$	
10	4	$(1-p)p$	

15/09/2006

COM II

T2-11

### Comparación cualitativa entre PAM, PPM y ortogonales

- Todas estas modulaciones parecen equivalentes aunque su comportamiento frente al ruido puede no serlo.
- No se han estudiado las consecuencias de limitación en banda
- En este tema se estudiará una metodología de análisis y diseño de receptores óptimos sistemática que permite su aplicación general.
- La limitación en banda se estudia en el Tema 3

15/09/2006

COM II

T2-12

## 2.2 Representación Geométrica

### Definición

- Metodología de análisis sistemático consistente en representar las diferentes funciones  $s_m(t)$  mediante una base ortonormal generadora y sus correspondientes coeficientes
- Estos coeficientes serán representativos de todas las propiedades de la modulación
- Base ortonormal: Permite expresar las señales  $s_m(t)$  mediante los coeficientes de la base generadora

$$s_m(t) \in \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\} \longleftrightarrow \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_L(t)\}; L \leq M$$

- Condición de ortonormalidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_l(t) \varphi_j(t) dt = \delta[l-j]; l, j \in \{1, \dots, L\}$$

15/09/2006

COM II

T2-13

### Definición (II)

- Cualquier señal del alfabeto se puede expresar como:

$$s_m(t) = \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} \varphi_l(t)$$

- En donde los coeficientes se han obtenido como:

$$\alpha_{ml} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_m(t) \varphi_l(t) dt = \int_0^T s_m(t) \varphi_l(t) dt$$

- Esta transformación nos permite definir los coeficientes en representación geométrica (*Espacio de la Señal*) como:

$$s_m(t) \longleftrightarrow \mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} \alpha_{m1} \\ \alpha_{m2} \\ \vdots \\ \alpha_{mL} \end{pmatrix}$$

15/09/2006

COM II

T2-14

## Propiedades de la Representación Geométrica

- Energía Cruzada: Producto Escalar

$$E_{mn} = \langle s_m(t), s_n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s_m(t) s_n(t) dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} \varphi_l(t) \sum_{k=1}^L \alpha_{nk} \varphi_k(t) dt = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^L \alpha_{ml} \alpha_{nk} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_l(t) \varphi_k(t) dt =$$

$$\sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^L \alpha_{ml} \alpha_{nk} \delta[l-k] = \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} \alpha_{nl} \Rightarrow$$

$$E_{mn} = \begin{pmatrix} \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{n1} \\ \vdots \\ \alpha_{nL} \end{pmatrix} = \mathbf{s}_m^T \mathbf{s}_n$$

- Condición de Ortogonalidad

$$E_{mn} = \mathbf{s}_m^T \mathbf{s}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} s_m(t) s_n(t) dt = 0$$

15/09/2006

COM II

T2-15

## Propiedades de la Representación Geométrica (II)

- Norma de un vector: Energía

$$E_m = \langle s_m(t), s_m(t) \rangle = \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}^2 =$$

$$\mathbf{s}_m^T \mathbf{s}_m = \|\mathbf{s}_m\|^2$$

- Energía media

$$E_s = E[E_m] = E[\|\mathbf{s}_m\|^2] = \sum_{i=1}^M \Pr\{s_i\} \|s_i\|^2$$

- Distancia  $d$

$$d_{mn}^2 = \langle s_m(t) - s_n(t), s_m(t) - s_n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (s_m(t) - s_n(t))^2 dt =$$

$$= \|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n\|^2 = E_m + E_n - 2E_{mn}$$

15/09/2006

COM II

T2-16



## Representación Temporal

- El objetivo del *Espacio de Señal* es proporcionar una representación de la señal transmitida en función de los coeficientes de la base ortonormal. Partiendo de la representación de  $s_m(t-kT)$

$$s_m(t-kT) = \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}[k] \phi_l(t-kT) \quad \mathbf{s}_m[k] = \begin{pmatrix} \alpha_{m1}[k] \\ \alpha_{m2}[k] \\ \vdots \\ \alpha_{mL}[k] \end{pmatrix}$$

- La señal transmitida resulta:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_{m[k]}(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}[k] \phi_l(t-kT)$$

15/09/2006

COM II

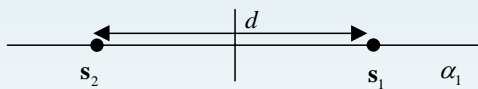
T2-17

## Modulaciones PAM en espacio de señal

- Base ortonormal:

$$\text{PAM: } \phi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right); L=1$$

- Modulaciones 2PAM

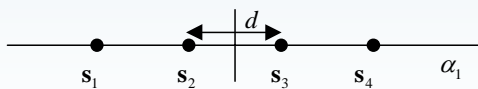


$$\mathbf{s}_1 = (A\sqrt{T}) = \sqrt{E_b} = \frac{d}{2}$$

$$\mathbf{s}_2 = -\mathbf{s}_1 = -\sqrt{E_b} = -\frac{d}{2}$$

$$E_s = E_b = \frac{1}{4}d^2$$

- Modulaciones 4PAM (bits equiprobables)



$$\mathbf{s}_4 = -\mathbf{s}_1 = (3A\sqrt{T}) = \frac{3}{2}d = \sqrt{\frac{18}{5}E_b}$$

$$\mathbf{s}_3 = -\mathbf{s}_2 = \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{2}{5}E_b}$$

$$E_s = 2E_b = \frac{5}{4}d^2$$

15/09/2006

COM II

T2-18

## Modulaciones PAM en espacio de señal (II)

- Modulaciones MPAM (bits equiprobables)

$$\text{PAM: } \varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right); L=1$$

$$\mathbf{s}_m = \left(\frac{2m-M-1}{2}d\right); d = \sqrt{\frac{12}{(M^2-1)}E_s} = \sqrt{\frac{12b}{(M^2-1)}E_b}; m \in \{1, M\}; M = 2^b$$

$$E_s = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\frac{2m-M-1}{2}d\right)^2 = \frac{M^2-1}{12}d^2; E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{M^2-1}{12b}d^2$$

Se han utilizado las igualdades:

$$\sum_{m=1}^M m = \frac{M(M+1)}{2} \quad \sum_{m=1}^{M-1} m^2 = \frac{M(M-1)(2M-1)}{6}$$

15/09/2006

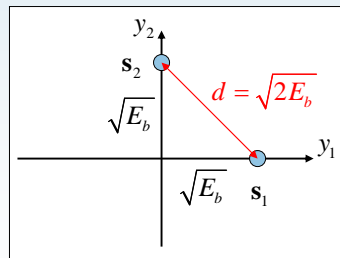
COM II

T2-19

## Modulaciones PPM en espacio de señal

- Modulaciones 2PPM

$$\text{2PPM: } \varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right), \varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right); L=2$$



$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} A\sqrt{T/2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ A\sqrt{T/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix}$$

$$E_s = E_b = \frac{1}{2}d^2$$

15/09/2006

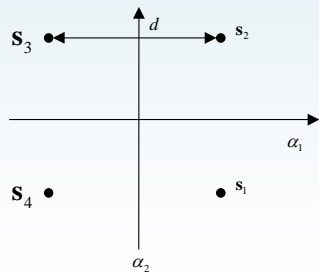
COM II

T2-20

### Modulaciones Biortogonales en espacio de señal

- Base ortonormal modulaciones biortogonales:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right), \varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right); L = 2$$



$$\mathbf{s}_1 = -\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} A\sqrt{T/2} \\ -A\sqrt{T/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ -\sqrt{E_b} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_2 = -\mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} A\sqrt{T/2} \\ A\sqrt{T/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix}$$

$$E_s = 2E_b = \frac{1}{2}d^2$$

15/09/2006

COM II

T2-21

### Determinación sistemática de una base: Gram-Schmidt

- Existe un procedimiento que permite generar una base generadora ortonormal a partir de las señales  $s_m(t)$  (en general la base generadora no es única)
- Partiendo de la definición de la modulación:  $\{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}$ 
  - Obtención del primer elemento:

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}; E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)^2 dt$$

- Obtención de los siguientes:

$$\psi_l(t) = s_l(t) - \sum_{k=1}^{l-1} \langle s_l(t), \varphi_k(t) \rangle \varphi_k(t)$$

$$\varphi_l(t) = \frac{\psi_l(t)}{\sqrt{E_{\psi_l}}}$$

- El proceso finaliza cuando los nuevos elementos resultan nulos:

$$\varphi_l(t) = 0; l > L \Rightarrow \text{La dimensión del espacio de señal es } L \leq M$$

15/09/2006

COM II

T2-22

### Aplicación de Gram-Schmidt para modulaciones biortogonales

- Obtención del primer elemento:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right) - \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right)$$

- Obtención del segundo:

$$\psi_2(t) = s_2(t) - \langle s_2(t), \varphi_1(t) \rangle \varphi_1(t) = s_2(t) \quad ; \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

- El resto de funciones resultan nulas:

$$\left. \begin{aligned} \psi_3(t) &= s_3(t) - \langle s_3(t), \varphi_1(t) \rangle \varphi_1(t) - \langle s_3(t), \varphi_2(t) \rangle \varphi_2(t) = 0 \\ \psi_4(t) &= s_4(t) - \langle s_4(t), \varphi_1(t) \rangle \varphi_1(t) - \langle s_4(t), \varphi_2(t) \rangle \varphi_2(t) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow L = 2$$

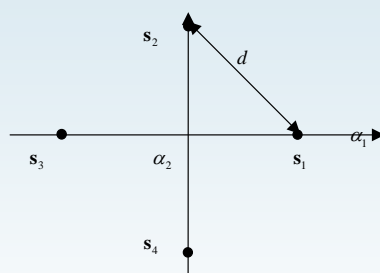
15/09/2006

COM II

T2-23

### Aplicación de Gram-Schmidt para modulaciones biortogonales (II)

- Representación geométrica en la nueva base:



$$\mathbf{s}_1 = -\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2E_b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_2 = -\mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2E_b} \end{pmatrix}$$

$$E_s = 2E_b = \frac{1}{2}d^2$$

- Este ejemplo ilustra que la base generadora no es única (comparándolo con el ejemplo de la T2-21) ni por tanto los coeficientes
- Las distancias entre símbolos se mantienen en función de las energías medias (equivale a un cambio de coordenadas)

15/09/2006

COM II

T2-24

### Resumen de la Representación Geométrica

- El análisis en el *Espacio de la Señal* permite sistematizar el análisis de las modulaciones de pulsos (PM)
- Modulaciones distintas que admitan la misma representación serán (en principio) equivalentes  $\Rightarrow$  El mismo comportamiento frente al ruido.
- Las bases de representación no son únicas aunque la distancia entre símbolos sí lo es:

$$d = f(E_s)$$

- Se pueden utilizar procedimientos habituales en álgebra lineal para estudiar las propiedades de las modulaciones y obtener una base de forma sistemática (Gram-Schmidt)

15/09/2006

COM II

T2-25

### 2.3 Receptor óptimo para PM en AWGN: Consideraciones previas

- La representación geométrica nos permite el diseño de receptores de forma general así como el análisis de sus prestaciones de probabilidad de error en función de la energía media por bit y la densidad espectral de ruido:

$$BER = f(E_b / N_0)$$

- Consideraremos que las señales que forman el alfabeto y la base generadora están definidas exclusivamente para  $t \in [0, T)$

$$s_m(t) = \varphi_l(t) = 0; t \notin [0, T), m \in \{1, \dots, M\}, l \in \{1, \dots, L\}$$

En este caso no hay solapamiento entre los distintos símbolos y la información correspondiente al símbolo  $k$ -ésimo se encuentra tan sólo en el intervalo  $t \in [kT, (k+1)T)$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m[n]}(t - nT) = s_{m[k]}(t - kT); t \in [kT, (k+1)T)$$

- **De esta forma, y sin pérdida de generalidad consideraremos exclusivamente la detección del símbolo correspondiente a  $k=0$**

$$s(t) = s_{m[0]}(t) = s_m(t) = \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} \varphi_l(t)$$

15/09/2006

T2-26

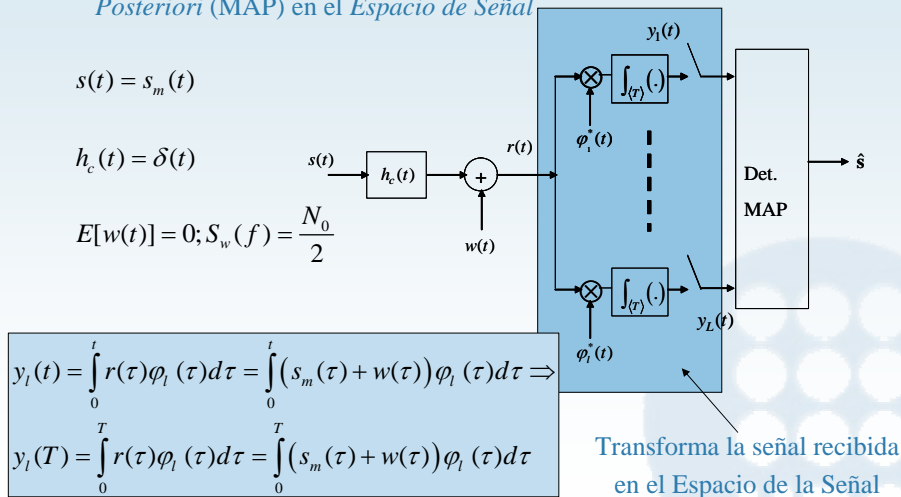
### Receptor MAP

- En primer lugar se plantea el diseño del receptor *Maximum a Posteriori* (MAP) en el *Espacio de Señal*

$$s(t) = s_m(t)$$

$$h_c(t) = \delta(t)$$

$$E[w(t)] = 0; S_w(f) = \frac{N_0}{2}$$



$$y_i(t) = \int_0^t r(\tau) \phi_i(\tau) d\tau = \int_0^t (s_m(\tau) + w(\tau)) \phi_i(\tau) d\tau \Rightarrow$$

$$y_i(T) = \int_0^T r(\tau) \phi_i(\tau) d\tau = \int_0^T (s_m(\tau) + w(\tau)) \phi_i(\tau) d\tau$$

Transforma la señal recibida en el Espacio de la Señal  
T2-27

15/09/2006

COM II

### Expresión vectorial

- Expresando la señal muestreada a la salida de los correladores (o filtros adaptados) de forma vectorial:

$$y_i = y_i(T) = \int_0^T r(\tau) \phi_i(\tau) d\tau = \int_0^T (s_m(\tau) + w(\tau)) \phi_i(\tau) d\tau = \alpha_{mi} + \beta_i \Rightarrow$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{m1} \\ \vdots \\ \alpha_{mL} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_L \end{pmatrix} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}$$

- Debe tenerse en cuenta que en esta ecuación vectorial, todos los términos son variables aleatorias:
  - $\mathbf{s}_m$  es una v.a. multidimensional (vector aleatorio) caracterizado por su probabilidad,  $\Pr\{\mathbf{s}_m\}$
  - $\mathbf{n}$  es una v.a. multidimensional (vector aleatorio) gaussiano
  - $\mathbf{y}$  es por tanto también una v.a. multidimensional

15/09/2006

COM II

T2-28

### Caracterización estadística del vector de ruido

- Recordando la definición de cada componente del vector de ruido:

$$\beta_l = \int_0^T w(t) \varphi_l(t) dt \quad ; \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_L \end{pmatrix}$$

$$E[\beta_l] = E \left[ \int_0^T w(t) \varphi_l(t) dt \right] = \int_0^T E[w(t)] \varphi_l(t) dt = 0$$

$$E[\beta_l \beta_k] = E \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \varphi_l(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} w(\lambda) \varphi_k(\lambda) d\lambda \right] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[w(t)w(\lambda)] \varphi_l(t) \varphi_k(\lambda) dt d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_w(t-\lambda) \varphi_l(t) \varphi_k(\lambda) dt d\lambda =$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\lambda) \varphi_l(t) \varphi_k(\lambda) dt d\lambda = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_l(\lambda) \varphi_k(\lambda) d\lambda = \frac{N_0}{2} \delta[l-k]$$

15/09/2006

COM II

T2-29

### Caracterización estadística del vector de ruido (II)

- De forma compacta:

$$\beta_l \sim N\left(0, \frac{N_0}{2}\right) = N(0, \sigma^2)$$

$$f_{\beta_l}(\beta_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\beta_l^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{\beta_l^2}{N_0}\right)$$

- Además se ha visto que las distintas componentes están incorreladas y (dado que son gaussianas) esto implica que son independientes:

$$f_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) = f_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L) = \prod_{l=1}^L f_{\beta_l}(\beta_l) = \left. \begin{aligned} & \prod_{l=1}^L \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{\beta_l^2}{N_0}\right) = \frac{1}{(\sqrt{\pi N_0})^L} \exp\left(-\frac{\sum_{l=1}^L \beta_l^2}{N_0}\right) = \\ & \frac{1}{(\pi N_0)^{L/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{N_0}\right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & E[\mathbf{n}] = \mathbf{0}_L = \mathbf{0} \\ & E[\mathbf{n}\mathbf{n}^T] = \frac{N_0}{2} \mathbf{I}_L \\ & \mathbf{n} \sim N(\mathbf{0}, \frac{N_0}{2} \mathbf{I}_L) \end{aligned}$$

$\mathbf{I}_L$  : Matriz cuadrada de dimensión  $L$

15/09/2006

COM II

T2-30

### Detector óptimo: Criterio MAP (Maximum a Posteriori)

- En criterio que consideramos para el diseño del receptor es el de decidir *de entre todos los posibles símbolos transmitidos*, aquel que maximiza su probabilidad “a posteriori” es decir una vez conocemos el vector  $\mathbf{y}$ :

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmax}} \Pr\{\mathbf{s}_m | \mathbf{y}\} = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmax}} \left[ \frac{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m)}{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})} \Pr\{\mathbf{s}_m\} \right] = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmax}} [f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) \Pr\{\mathbf{s}_m\}]$$

en donde  $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m)$  es la función de máxima verosimilitud (ML) y  $\Pr\{\mathbf{s}_m\}$  es la probabilidad "a priori" de cada símbolo  $\mathbf{s}_m$

- La primera igualdad se obtiene directamente de la regla de Bayes:

$$\Pr\{\mathbf{s}_m | \mathbf{y}\} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) \Pr\{\mathbf{s}_m\}$$

- La segunda igualdad se desprende del hecho que  $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$  no depende del símbolo  $\mathbf{s}_m$

$$\underset{x}{\operatorname{argmax}} f(x) = \underset{x}{\operatorname{arg}} \left( \max_x f(x) \right) \quad ; \quad \underset{x}{\operatorname{argmin}} f(x) = \underset{x}{\operatorname{arg}} \left( \min_x f(x) \right)$$

15/09/2006

COM II

T2-31

### Detector óptimo: Criterio MAP (Maximum a Posteriori) (II)

- Si los símbolos son *equiprobables* el criterio ML y el MAP coinciden:

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmax}} \Pr\{\mathbf{s}_m | \mathbf{y}\} = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmax}} f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}_m}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) : \text{Criterio ML}$$

- Cálculo del criterio de diseño:

- Se ha visto:  $\mathbf{y} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}$

- Por tanto, condicionado a que el símbolo  $\mathbf{s}_m$  ha sido transmitido, el vector  $\mathbf{y}$  resulta un vector gaussiano de media  $\mathbf{s}_m$  y covarianza igual que  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{y} | \mathbf{s}_m \sim N\left(\mathbf{s}_m, \frac{N_0}{2} \mathbf{I}_L\right) \quad ; \quad y_l \sim N\left(\alpha_{ml}, \frac{N_0}{2}\right)$$

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}_m}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) = f(y_1, \dots, y_L | \alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mL}) = \prod_{l=1}^L f(y_l | \alpha_{ml}) = \prod_{l=1}^L \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y_l - \alpha_{ml})^2}{N_0}\right) =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\pi N_0})^L} \exp\left(-\frac{\sum_{l=1}^L (y_l - \alpha_{ml})^2}{N_0}\right) = \frac{1}{(\pi N_0)^{L/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0}\right)$$

15/09/2006

COM II

T2-32



### Detector óptimo: Criterio MAP (Maximum a Posteriori) (III)

- Por tanto el diseño del receptor equivale a:

$$\hat{s} = \underset{s_m}{\operatorname{argmax}} f_{y|s_m}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) \Pr\{\mathbf{s}_m\} = \underset{s_m}{\operatorname{argmax}} \left[ \frac{1}{(\pi N_0)^{L/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{s}_m\|^2}{N_0}\right) \Pr\{\mathbf{s}_m\} \right]$$

- Puesto que la expresión a maximizar es positiva y la función logaritmo es monótonamente creciente, es equivalente maximizar el logaritmo de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \hat{s} &= \underset{s_m}{\operatorname{argmax}} \ln \left[ \frac{1}{(\pi N_0)^{L/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{s}_m\|^2}{N_0}\right) \Pr\{\mathbf{s}_m\} \right] = \underset{s_m}{\operatorname{argmax}} \left[ -\frac{L}{2} \ln(\pi N_0) - \frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{s}_m\|^2}{N_0} + \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right] \\ &= \underset{s_m}{\operatorname{argmax}} \left[ -\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{s}_m\|^2}{N_0} + \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right] = \underset{s_m}{\operatorname{argmin}} \left[ \frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{s}_m\|^2}{N_0} - \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right] \end{aligned}$$

- Partiendo del conocimiento “a priori” de las probabilidades de cada símbolo y del vector recibido en el espacio de la señal y deberá calcularse esta expresión para todos los posibles símbolos transmitidos y tomar el que la minimiza.

15/09/2006

COM II

T2-33

### Detector óptimo: Criterio MAP (Maximum a Posteriori) (IV)

- Casos particulares
  - En un entorno muy ruidoso la decisión tiende a tomar el símbolo más probable “a priori”:

$$\text{Si } N_0 \gg \text{ entonces: } \hat{s} = \underset{s_m}{\operatorname{argmin}} \left[ \frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{s}_m\|^2}{N_0} - \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right] \approx \underset{s_m}{\operatorname{argmax}} \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) = \underset{s_m}{\operatorname{argmax}} \Pr\{\mathbf{s}_m\}$$

- Si los símbolos son equiprobables:

$$\hat{s} = \underset{s_m}{\operatorname{argmin}} \left[ \frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{s}_m\|^2}{N_0} - \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right] = \underset{s_m}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2$$

- En el receptor ML se opta por el símbolo que minimiza la distancia euclídea.

15/09/2006

COM II

T2-34

### Detector óptimo: Expresión alternativa

- El criterio MAP descrito anteriormente admite una expresión alternativa teniendo en cuenta:

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{s}_m} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2 = \operatorname{argmin}_{\mathbf{s}_m} \left[ \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{s}_m\|^2 - 2\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle \right] = \operatorname{argmin}_{\mathbf{s}_m} \left[ \|\mathbf{s}_m\|^2 - 2\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle \right]$$

- Por tanto:

$$\hat{\mathbf{s}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{s}_m} \left[ \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0} - \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right] = \operatorname{argmin}_{\mathbf{s}_m} \left[ \frac{\|\mathbf{s}_m\|^2 - 2\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle}{N_0} - \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right] =$$

$$\operatorname{argmax}_{\mathbf{s}_m} \left[ \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle - \frac{\|\mathbf{s}_m\|^2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right] = \operatorname{argmax}_{\mathbf{s}_m} \left[ \int_0^T y(t) s_m(t) dt - \frac{E_m}{2} + \frac{N_0}{2} \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right]$$

- Que se puede traducir en una implementación alternativa (que no utiliza el concepto de *Espacio de la Señal*)

15/09/2006

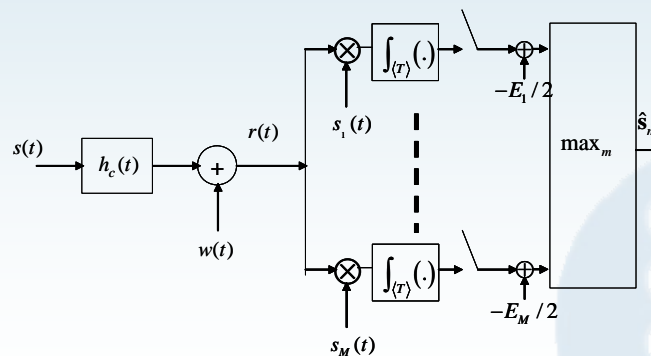
COM II

T2-35

### Detector óptimo: Expresión alternativa (II)

- En el caso de símbolos equiprobables:

$$\hat{\mathbf{s}} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{s}_m} \left[ \int_0^T y(t) s_m(t) dt - \frac{E_m}{2} + \frac{N_0}{2} \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right] = \operatorname{argmax}_{\mathbf{s}_m} \left[ \int_0^T y(t) s_m(t) dt - \frac{E_m}{2} \right]$$



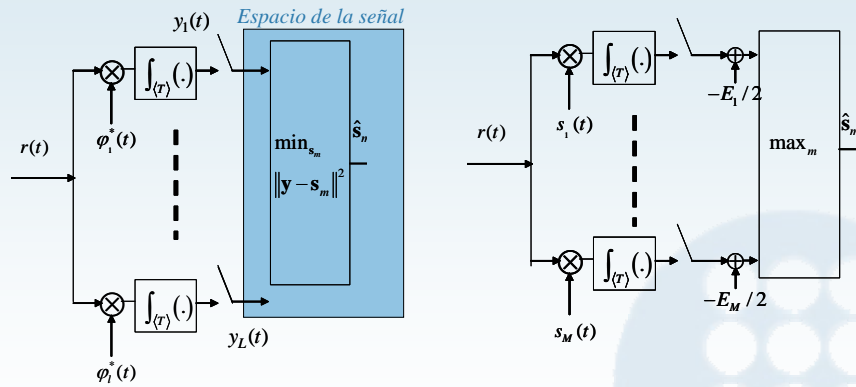
15/09/2006

COM II

T2-36

### Comparación entre las implementaciones alternativas

- La estructura en el *Espacio de la señal* basada en  $L$  correladores o filtros adaptados minimiza su número ( $L \leq M$ )



Receptores alternativos (símbolos equiprobables)

15/09/2006

COM II

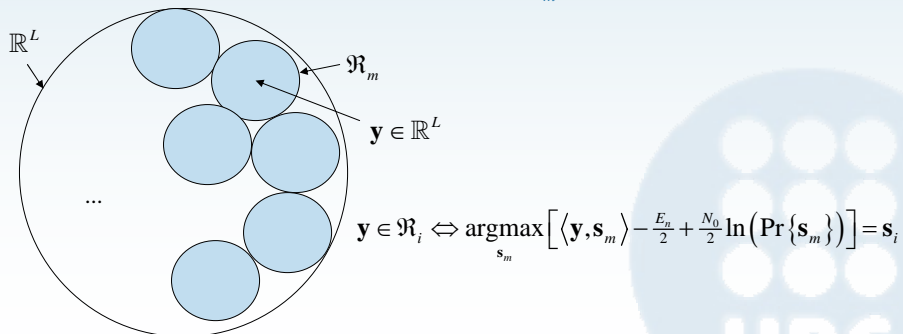
T2-37

### Elección de las zonas de decisión

- Se ha visto que la implementación del detector MAP requiere el cálculo para cada valor de  $\mathbf{y}$  de:

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmin}} \left[ \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0} - \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right] = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmax}} \left[ \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle - \frac{E_m}{2} + \frac{N_0}{2} \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right]$$

- En la práctica, esta regla de decisión equivale a dividir el *Espacio de la Señal* recibida en regiones de decisión  $\mathfrak{R}_m$  de forma que:



15/09/2006

COM II

T2-38

### Zonas de decisión para 2PAM

- Para 2PAM: Ambos símbolos tienen la misma energía,  $M=2, L=1$

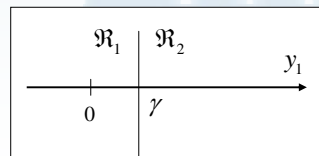
$$\mathbf{s}_1 = (\alpha_{11}) = -\sqrt{E_b} \quad ; \quad \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_1 \rangle = y_1 \alpha_{11} = -y_1 \sqrt{E_b} \quad ; \quad \Pr\{\mathbf{s}_1\} = p$$

$$\mathbf{s}_2 = (\alpha_{21}) = \sqrt{E_b} \quad ; \quad \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_2 \rangle = y_1 \alpha_{21} = y_1 \sqrt{E_b} \quad ; \quad \Pr\{\mathbf{s}_2\} = 1-p$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{argmax}_{\mathbf{s}_m} \left[ \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle - \frac{E_m}{2} + \frac{N_0}{2} \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right] = \\ & = \operatorname{argmax}_{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2} \left\{ \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_1 \rangle + \frac{N_0}{2} \ln(\Pr\{\mathbf{s}_1\}), \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_2 \rangle + \frac{N_0}{2} \ln(\Pr\{\mathbf{s}_2\}) \right\} = \\ & = \operatorname{argmax}_{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2} \left\{ -y_1 \sqrt{E_b} + \frac{N_0}{2} \ln(p), y_1 \sqrt{E_b} + \frac{N_0}{2} \ln(1-p) \right\} \end{aligned}$$

- De forma compacta lo expresaremos:

$$y_1 \begin{cases} < s_1 \\ > s_2 \end{cases} \frac{N_0}{4\sqrt{E_b}} \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \gamma \quad (= 0 \text{ si } p = \frac{1}{2})$$



15/09/2006

COM II

T2-39

### Zonas de decisión para 4PAM

- Para 2PAM: Los símbolos no tienen la misma energía,  $M=2, L=1$

$$\mathbf{s}_1 = (\alpha_{11}) = -\sqrt{\frac{18}{5}E_b} \quad ; \quad \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_1 \rangle = y_1 \alpha_{11} = -y_1 \sqrt{\frac{18}{5}E_b} \quad ; \quad \Pr\{\mathbf{s}_1\} = p^2$$

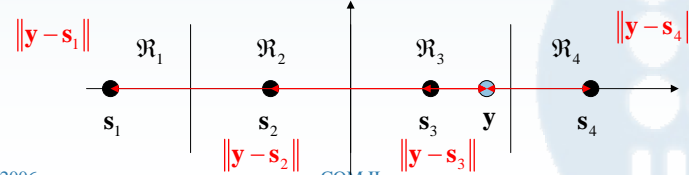
$$\mathbf{s}_2 = (\alpha_{21}) = -\sqrt{\frac{2}{5}E_b} \quad ; \quad \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_2 \rangle = y_1 \alpha_{21} = -y_1 \sqrt{\frac{2}{5}E_b} \quad ; \quad \Pr\{\mathbf{s}_2\} = p(1-p)$$

$$\mathbf{s}_3 = (\alpha_{31}) = \sqrt{\frac{2}{5}E_b} \quad ; \quad \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_3 \rangle = y_1 \alpha_{31} = y_1 \sqrt{\frac{2}{5}E_b} \quad ; \quad \Pr\{\mathbf{s}_3\} = (1-p)^2$$

$$\mathbf{s}_4 = (\alpha_{41}) = \sqrt{\frac{18}{5}E_b} \quad ; \quad \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_4 \rangle = y_1 \alpha_{41} = y_1 \sqrt{\frac{18}{5}E_b} \quad ; \quad \Pr\{\mathbf{s}_4\} = (1-p)p$$

- Suponiendo  $p=1/2$ :

$$\hat{\mathbf{s}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{s}_m} \left[ \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0} - \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right] = \operatorname{argmin}_{\mathbf{s}_m} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2 = \operatorname{argmin}_{\mathbf{s}_m} d_{\mathbf{y}\mathbf{s}_m}^2 = \operatorname{argmin}_{\mathbf{s}_m} d_{\mathbf{y}\mathbf{s}_m}$$



15/09/2006

COM II

T2-40

### Zonas de decisión para 2PPM

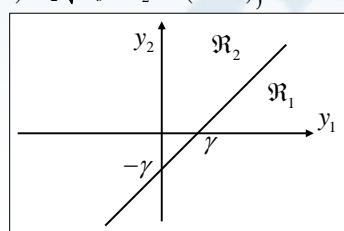
- Para 2PPM: Ambos símbolos tienen la misma energía,  $M=2, L=2$

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} A\sqrt{T/2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ 0 \end{pmatrix}; \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_1 \rangle = y_1\alpha_{11} + y_2\alpha_{12} = y_1\sqrt{E_b}; \Pr\{\mathbf{s}_1\} = p$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ A\sqrt{T/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix}; \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_2 \rangle = y_1\alpha_{21} + y_2\alpha_{22} = y_2\sqrt{E_b}; \Pr\{\mathbf{s}_2\} = 1-p$$

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{s}_n}{\operatorname{argmax}} \left[ \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_n \rangle - \frac{E_n}{2} + \frac{N_0}{2} \ln(\Pr\{\mathbf{s}_n\}) \right] = \\ & = \underset{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2}{\operatorname{argmax}} \left\{ y_1\sqrt{E_b} + \frac{N_0}{2} \ln(p), y_2\sqrt{E_b} + \frac{N_0}{2} \ln(1-p) \right\} \end{aligned}$$

$$y_1 - y_2 \begin{cases} > \frac{N_0}{2\sqrt{E_b}} \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \gamma \quad (\text{si } p = \frac{1}{2}) \\ < \end{cases}$$



15/09/2006

COM II

### Zonas de decisión para señales biortogonales

- Para señales biortogonales, los cuatro símbolos tienen la misma energía,  $M=4, L=2$

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} A\sqrt{T/2} \\ -A\sqrt{T/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ -\sqrt{E_b} \end{pmatrix}; \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_1 \rangle = y_1\alpha_{11} + y_2\alpha_{12} = y_1\sqrt{E_b} - y_2\sqrt{E_b}; \Pr\{\mathbf{s}_1\} = p^2$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} A\sqrt{T/2} \\ A\sqrt{T/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix}; \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_2 \rangle = y_1\alpha_{21} + y_2\alpha_{22} = y_1\sqrt{E_b} + y_2\sqrt{E_b}; \Pr\{\mathbf{s}_2\} = p(1-p)$$

$$\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} -A\sqrt{T/2} \\ A\sqrt{T/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{E_b} \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix}; \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_3 \rangle = y_1\alpha_{31} + y_2\alpha_{32} = -y_1\sqrt{E_b} + y_2\sqrt{E_b}; \Pr\{\mathbf{s}_3\} = (1-p)^2$$

$$\mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} -A\sqrt{T/2} \\ -A\sqrt{T/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{E_b} \\ -\sqrt{E_b} \end{pmatrix}; \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_4 \rangle = y_1\alpha_{41} + y_2\alpha_{42} = -y_1\sqrt{E_b} - y_2\sqrt{E_b}; \Pr\{\mathbf{s}_4\} = (1-p)p$$

15/09/2006

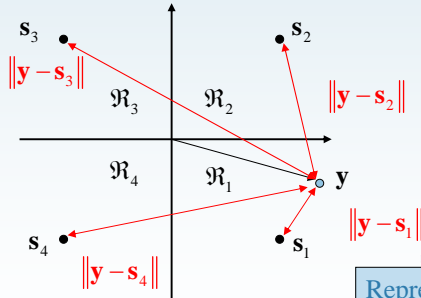
COM II

T2-42

### Zona de decisión para señales biortogonales (II)

- La regla de decisión para  $p=1/2$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{argmax}_{s_m} \left[ \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle - \frac{E_n}{2} + \frac{N_0}{2} \ln(\Pr\{s_m\}) \right] &= \operatorname{argmin}_{s_m} \left[ \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0} - \ln(\Pr\{s_m\}) \right] = \operatorname{argmin}_{s_m} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2 = \\ &= \operatorname{argmin}_{s_m} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\| = \operatorname{argmin}_{s_m} d_{\mathbf{y}s_m} \end{aligned}$$



Representación geométrica para la base de T2-21

15/09/2006

COM II

T2-43

### Consideraciones sobre la dependencia temporal de los símbolos

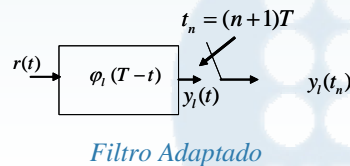
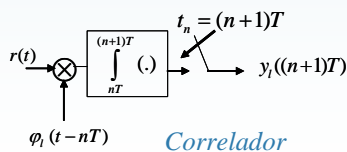
- En toda esta sección referida al diseño del receptor se ha estudiado la detección del símbolo correspondiente a  $n=0$

$$s(t) = s_{m[0]}(t) = s_m(t) = \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} \phi_l(t)$$

- En general el diseño del receptor debe considerarse para:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_{m[k]}(t - kT) = s_{m[n]}(t - nT); t \in [nT, (n+1)T)$$

- Aplicándose de forma independiente para cada símbolo  $n$  de forma secuencial:



15/09/2006

COM II

T2-44

### Consideraciones sobre la dependencia temporal de los símbolos (II)

- Las ecuaciones vectoriales básicas en el espacio de señal incorporan implícitamente una dependencia temporal:

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{s}_m[n] + \mathbf{n}[n]$$

$$\hat{\mathbf{s}}[n] = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmin}} \left[ \frac{\|\mathbf{y}[n] - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0} - \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right] = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmax}} \left[ \langle \mathbf{y}[n], \mathbf{s}_m \rangle - \frac{E_m}{2} + \frac{N_0}{2} \ln(\Pr\{\mathbf{s}_m\}) \right]$$

Que se corresponden con la recepción de la señal:

$$s_{m[n]}(t - nT); t \in [nT, (n+1)T)$$

y de sus correspondientes coeficientes representados por el vector  $\mathbf{y}[n]$  en la base ortonormal:

$$\{\varphi_1(t - nT), \varphi_2(t - nT), \dots, \varphi_L(t - nT)\}$$

15/09/2006

COM II

T2-45

### 2.4 Cálculo de la probabilidad de error

#### El criterio MAP minimiza la probabilidad de error

- El primer lugar se demostrará que la probabilidad de error media en la decisión sobre el símbolo transmitido se minimiza mediante el criterio MAP (o ML si los símbolos son equiprobables)
  - Recordando en primer lugar el criterio MAP y la definición de las regiones:

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmax}} \Pr\{\mathbf{s}_m | \mathbf{y}\} = \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmax}} f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) \Pr\{\mathbf{s}_m\}$$

$$\mathbf{y} \in \mathfrak{R}_i \Leftrightarrow \underset{\mathbf{s}_m}{\operatorname{argmax}} f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) \Pr\{\mathbf{s}_m\} = \mathbf{s}_i$$

- De esta forma la definición de regiones que se obtiene mediante el criterio MAP maximiza la siguiente expresión con respecto a cualquier otra posible partición:

$$\sum_{m=1}^M \int_{\mathbf{y} \in \mathfrak{R}_m} f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) \Pr\{\mathbf{s}_m\} d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{s}_m} f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) \Pr\{\mathbf{s}_m\} d\mathbf{y} \geq \sum_{m=1}^M \int_{\mathbf{y} \in \hat{\mathfrak{R}}_m} f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) \Pr\{\mathbf{s}_m\} d\mathbf{y}$$

$$\bigcup_{m=1}^M \mathfrak{R}_m = \bigcup_{m=1}^M \hat{\mathfrak{R}}_m = \mathbb{R}^L$$

### El criterio MAP minimiza la probabilidad de error (II)

- Por tanto expresando la probabilidad de error utilizando un criterio arbitrario (correspondiente a otra partición en regiones):

$$\begin{aligned} \Pr(e) &= \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} P(e | s_m) = \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} \int_{\mathbf{y} \notin \hat{\mathcal{R}}_m} f(\mathbf{y} | s_m) d\mathbf{y} = \\ &= \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} \left[ 1 - \int_{\mathbf{y} \in \hat{\mathcal{R}}_m} f(\mathbf{y} | s_m) d\mathbf{y} \right] = 1 - \sum_{m=1}^M \int_{\mathbf{y} \in \hat{\mathcal{R}}_m} f(\mathbf{y} | s_m) \Pr\{s_m\} d\mathbf{y} \geq \\ &\geq 1 - \sum_{m=1}^M \int_{\mathbf{y} \in \mathcal{R}_m} f(\mathbf{y} | s_m) \Pr\{s_m\} d\mathbf{y} = \Pr(e)_{MAP} \end{aligned}$$

- Se demuestra que ésta no puede ser menor que la que se obtiene utilizando el criterio MAP

15/09/2006

COM II

T2-47

### Expresión general de la Probabilidad de error

- La probabilidad de error la expresaremos como promedio de las probabilidades de error para cada posible símbolo transmitido:

$$\Pr(e) = \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} \Pr(e | s_m) = \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} \int_{\mathbf{y} \notin \hat{\mathcal{R}}_m} f(\mathbf{y} | s_m) d\mathbf{y} = \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} \left[ 1 - \int_{\mathbf{y} \in \hat{\mathcal{R}}_m} f(\mathbf{y} | s_m) d\mathbf{y} \right]$$

- Debemos tener en cuenta que:  $\mathbf{y} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}$ 
  - Es decir, condicionado a que el símbolo  $\mathbf{s}_m$  haya sido transmitido, el vector  $\mathbf{y}$  resulta un vector gaussiano de media  $\mathbf{s}_m$  y matriz de covarianza igual a la de  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{y} | \mathbf{s}_m \sim N\left(\mathbf{s}_m, \frac{N_0}{2} \mathbf{I}_L\right)$$

$$f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{L/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0}\right)$$

- Todos los cálculos de  $\Pr(e)$  se transforman en el espacio de señal en el cálculo de una serie de integrales de una función gaussiana ( $L$  dimensional).

15/09/2006

COM II

T2-48



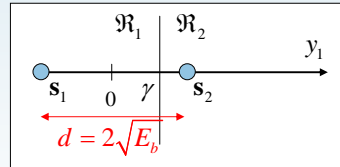
### Probabilidad de error de 2PAM

- Para 2PAM (M=2, L=1)

$$s_1 = (\alpha_{11}) = -\frac{d}{2} = -\sqrt{E_b} \quad ; \quad \Pr\{s_1\} = p \quad ; \quad y|s_1 \sim N\left(-\frac{d}{2}, \frac{N_0}{2}\right) \quad \frac{N_0}{2} = \sigma^2$$

$$s_2 = (\alpha_{21}) = \frac{d}{2} = \sqrt{E_b} \quad ; \quad \Pr\{s_2\} = 1-p \quad ; \quad y|s_2 \sim N\left(\frac{d}{2}, \frac{N_0}{2}\right)$$

$$y_1 \begin{cases} < s_1 \\ > s_2 \end{cases} \frac{N_0}{4\sqrt{E_b}} \ln\left(\frac{p}{(1-p)}\right) = \gamma \quad (= 0 \text{ si } p = \frac{1}{2})$$



$$\begin{aligned} \Pr(e) &= \Pr\{s_1\} \Pr(e|s_1) + \Pr\{s_2\} \Pr(e|s_2) = \\ &= p \Pr(\mathbf{y} \notin \mathfrak{R}_1 | s_1) + (1-p) \Pr(\mathbf{y} \notin \mathfrak{R}_2 | s_2) = \\ &= p \Pr(y_1 > \gamma | s_1) + (1-p) \Pr(y_1 < \gamma | s_2) = \\ &= p \int_{\gamma}^{\infty} f_{y_1}(y_1 | s_1) dy_1 + (1-p) \int_{-\infty}^{\gamma} f_{y_1}(y_1 | s_2) dy_1 \end{aligned}$$

15/09/2006

COM II

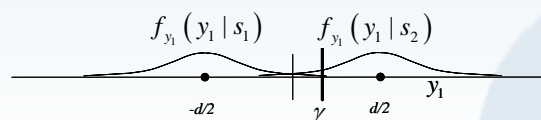
T2-49

### Probabilidad de error de 2PAM (II)

- La expresión integral queda:

$$\begin{aligned} \Pr(e) &= p \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 + d/2)^2}{\sigma^2}\right) dy_1 + (1-p) \int_{-\infty}^{\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 - d/2)^2}{\sigma^2}\right) dy_1 = \\ &= p \int_{\frac{\gamma+d/2}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda + (1-p) \int_{-\infty}^{\frac{\gamma-d/2}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda = \\ &= pQ\left(\frac{\gamma+d/2}{\sigma}\right) + (1-p)Q\left(\frac{-\gamma+d/2}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

- En donde se utiliza:  $Q(x) \triangleq \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda$



- Si los bits son equiprobables:

$$\Pr(e) = Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

15/09/2006

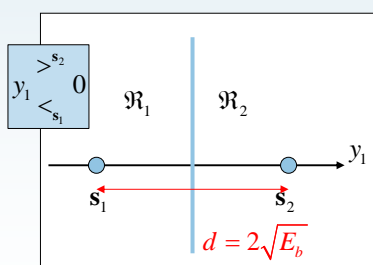
COM II

T2-50

### Probabilidad de error de 2PAM (símbolos equiprobables)

- Para 2PAM (M=2, L=1) con símbolos equiprobables

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= (\alpha_{11}) = -\frac{d}{2} = -\sqrt{E_b} \quad ; \quad y|\mathbf{s}_1 \sim N\left(-\frac{d}{2}, \frac{N_0}{2}\right) \\ \mathbf{s}_2 &= (\alpha_{21}) = \frac{d}{2} = \sqrt{E_b} \quad ; \quad y|\mathbf{s}_2 \sim N\left(\frac{d}{2}, \frac{N_0}{2}\right) \end{aligned} \quad \frac{N_0}{2} = \sigma^2$$



$$\begin{aligned} \Pr(e) &= \frac{1}{2} \Pr(e | s_1) + \frac{1}{2} \Pr(e | s_2) = \\ &= \frac{1}{2} \Pr(\mathbf{y} \notin \mathfrak{R}_1 | s_1) + \frac{1}{2} \Pr(\mathbf{y} \notin \mathfrak{R}_2 | s_2) = \\ &= \frac{1}{2} \Pr(y_1 > 0 | s_1) + \frac{1}{2} \Pr(y_1 < 0 | s_2) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f_{y_1}(y_1 | s_1) dy_1 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 f_{y_1}(y_1 | s_2) dy_1 \end{aligned}$$

15/09/2006

COM II

T2-51

### Probabilidad de error de 2PAM (símbolos equiprobables)(II)

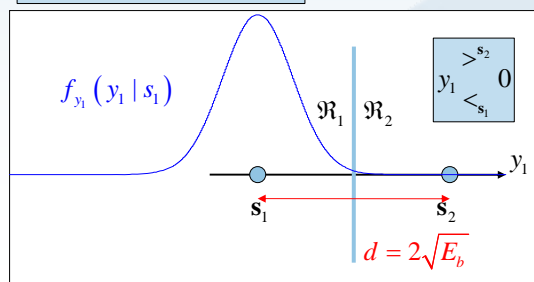
- La expresión integral queda:

$$\begin{aligned} \Pr(e) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1+d/2)^2}{\sigma^2}\right) dy_1 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1-d/2)^2}{\sigma^2}\right) dy_1 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{d/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-d/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

- En donde se utiliza:

$$Q(x) \triangleq \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda$$

$$\Pr(e) = Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$



15/09/2006

### Probabilidad de error de MPAM

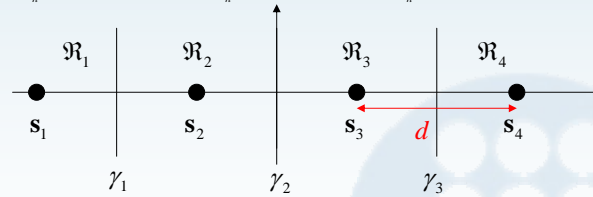
- Para MPAM ( $L=1$ ) y suponiendo símbolos equiprobables ( $p=0.5$ )

$$\mathbf{s}_m = \left( (2m - M - 1) \frac{d}{2} \right) ; \Pr\{\mathbf{s}_m\} = \frac{1}{M} ; \mathbf{y} | \mathbf{s}_m \sim N\left(\mathbf{s}_m, \frac{N_0}{2}\right) ; \frac{N_0}{2} = \sigma^2$$

- De la aplicación del criterio ML resultan las regiones:

$$\mathbf{y} \in \mathfrak{R}_m \Leftrightarrow \mathbf{s}_m = \underset{\mathbf{s}_n}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_n\|^2 = \underset{\mathbf{s}_n}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_n\| = \underset{\mathbf{s}_n}{\operatorname{argmin}} d_{\mathbf{y}\mathbf{s}_n}$$

- Ejemplo con  $M=4$



- Regla de decisión general

$$y_1 \begin{cases} < s_{m+1} \\ > s_m \end{cases} \frac{1}{2} (s_{m+1} - s_m) = \gamma_m = s_m + \frac{d}{2}$$

15/09/2006

COM II

T2-53

### Probabilidad de error de MPAM (II)

- Cálculo de la probabilidad de error para los símbolos extremos:

$$\begin{aligned} \Pr(e | \mathbf{s}_1) &= \int_{\gamma_1}^{+\infty} f_{y_1}(y_1 | \mathbf{s}_1) dy_1 = \int_{s_1 + \frac{d}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 - s_1)^2}{\sigma^2}\right) dy_1 = \int_{\frac{d}{2\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda^2\right) d\lambda = \\ &= Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = \Pr(e | \mathbf{s}_M) \end{aligned}$$

- Para los símbolos centrales:  $m \in \{2, \dots, M-1\}$

$$\begin{aligned} \Pr(e | \mathbf{s}_m) &= \int_{\gamma_m}^{\infty} f_{y_1}(y_1 | \mathbf{s}_m) dy_1 + \int_{-\infty}^{\gamma_{m-1}} f_{y_1}(y_1 | \mathbf{s}_m) dy_1 = \\ &= \int_{s_m + \frac{d}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 - s_m)^2}{\sigma^2}\right) dy_1 + \int_{-\infty}^{s_m - \frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 - s_m)^2}{\sigma^2}\right) dy_1 = \\ &= 2 \int_{\frac{d}{2\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda^2\right) d\lambda = 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

15/09/2006

COM II

T2-54

### Probabilidad de error de MPAM (III)

- Cálculo de la probabilidad de error media:

$$\Pr(e) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \Pr(e | s_m) = \frac{1}{M} \left( Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) + (M-2)2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) + Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \right) = \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

- Recordando:  $E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{M^2-1}{12b} d^2$  ;  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$

$$\Pr(e) = \frac{2M-2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6b}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{2M-2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- Relación con la BER: Un símbolo equivale a  $b$  bits pero si se utiliza codificación Gray, y para probabilidades de error bajas, los errores tan sólo ocurren entre símbolos colindantes, que difieren entre si en tan sólo un bit. De esta forma:

$$\text{Si } \Pr(e) \ll 1, \text{ BER} \approx \frac{1}{b} \Pr(e) = \frac{2M-2}{bM} Q\left(\sqrt{\frac{6b}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

15/09/2006

COM II

T2-55

### Probabilidad de error de 2PPM

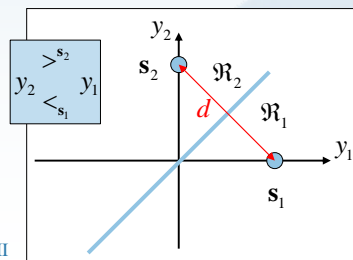
- Para 2PPM ( $M=2, L=2$ ) suponiendo bits equiprobables

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} A\sqrt{T/2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{y} | \mathbf{s}_1 \sim N\left(\begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = N(\mathbf{s}_1, \frac{N_0}{2} \mathbf{I}_2)$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ A\sqrt{T/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix} ; \mathbf{y} | \mathbf{s}_2 \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = N(\mathbf{s}_2, \frac{N_0}{2} \mathbf{I}_2)$$

De forma que cada una de las componentes de  $\mathbf{y} | \mathbf{s}_1$  ( $\mathbf{y} | \mathbf{s}_2$ ) es una v.a. gaussiana de media  $\frac{d}{\sqrt{2}}$  y 0 (0 y  $\frac{d}{\sqrt{2}}$ ) respectivamente con varianza  $\frac{N_0}{2}$  e independientes entre si.

$$\Pr(e) = \frac{1}{2} \Pr(y_2 > y_1 | \mathbf{s}_1) + \frac{1}{2} \Pr(y_1 > y_2 | \mathbf{s}_2) = \Pr(y_2 > y_1 | \mathbf{s}_1)$$



15/09/2006

COM II

6

### Probabilidad de error de 2PPM (II)

- Cálculo de la probabilidad de error:

$$\Pr(e) = \Pr(y_2 > y_1 | \mathbf{s}_1) = \Pr(y_2 - y_1 > 0 | \mathbf{s}_1)$$

- Como  $y_1$  y  $y_2$  son v.a gaussianas e independientes su resta también será gaussiana. Denominando  $r$  a  $y_1 - y_2$  condicionado a la transmisión del símbolo  $\mathbf{s}_1$  sus estadísticas serán:

$$E(r) = E(y_2 - y_1 | \mathbf{s}_1) = E(y_2 | \mathbf{s}_1) - E(y_1 | \mathbf{s}_1) = 0 - \frac{d}{\sqrt{2}} = -\frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$\text{VAR}(r) = \text{VAR}(y_2 - y_1 | \mathbf{s}_1) = \text{VAR}(y_2 | \mathbf{s}_1) + \text{VAR}(y_1 | \mathbf{s}_1) = \frac{N_0}{2} + \frac{N_0}{2} = N_0$$

- Por tanto,

$$\Pr(e) = \Pr(r > 0) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(r + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2}{N_0}\right) dr = \int_{\frac{d}{\sqrt{2N_0}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda^2\right) d\lambda = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

15/09/2006

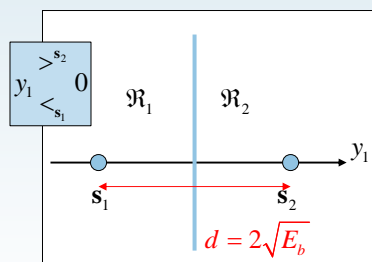
COM II

T2-57

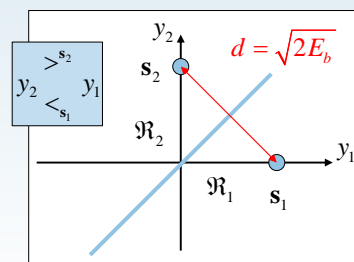
### Comparación entre 2PAM y 2PPM

- Hemos visto que:

$$\Pr(e)_{2PAM} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) ; \Pr(e)_{2PPM} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



2PAM



2PPM

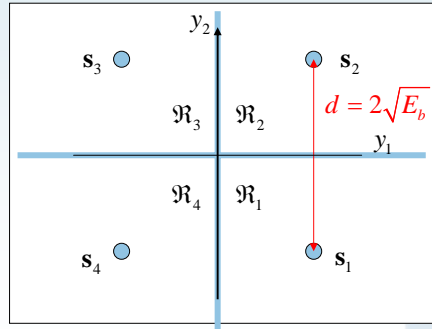
15/09/2006

COM II

T2-58

### Probabilidad de error de la modulación biortogonal

- Para modulaciones biortogonales ( $M=4, L=2$ ) suponiendo bits equiprobables y utilizando la base de T2-21
  - Representación en el Espacio de la Señal:



15/09/2006

COM II

T2-59

### Probabilidad de error de la modulación biortogonal (II)

- Formalmente:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} A\sqrt{T/2} \\ -A\sqrt{T/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ -\sqrt{E_b} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{y} | \mathbf{s}_1 \sim N \left( \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix}, \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = N(\mathbf{s}_1, \frac{N_0}{2} I_2)$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} A\sqrt{T/2} \\ A\sqrt{T/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{y} | \mathbf{s}_2 \sim N \left( \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix}, \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = N(\mathbf{s}_2, \frac{N_0}{2} I_2)$$

$$\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} A\sqrt{T/2} \\ -A\sqrt{T/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{E_b} \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{y} | \mathbf{s}_3 \sim N \left( \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix}, \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = N(\mathbf{s}_3, \frac{N_0}{2} I_2)$$

$$\mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} A\sqrt{T/2} \\ A\sqrt{T/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{E_b} \\ -\sqrt{E_b} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{y} | \mathbf{s}_4 \sim N \left( \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix}, \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = N(\mathbf{s}_4, \frac{N_0}{2} I_2)$$

15/09/2006

COM II

T2-60

### Probabilidad de error de la modulación biortogonal (III)

- Por simetría, la probabilidad de error para cada símbolo será la misma por lo que se calculará para uno de ellos, por ejemplo  $\mathbf{s}_2$ :

$$\Pr(e) = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^4 \Pr(e | \mathbf{s}_m) = \Pr(e | \mathbf{s}_2)$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} A\sqrt{T/2} \\ A\sqrt{T/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{y} | \mathbf{s}_2 \sim N \left( \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix}, \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = N(\mathbf{s}_2, \frac{N_0}{2} I_2)$$

- Resulta más fácil calcular la probabilidad de que no ocurra error:

$$\Pr(e | \mathbf{s}_2) = \int_{\mathbf{y} \in \mathfrak{R}_2} f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_2) d\mathbf{y} = 1 - \int_{\mathbf{y} \in \mathfrak{R}_1} f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_2) d\mathbf{y}$$

15/09/2006

COM II

T2-61

### Probabilidad de error de la modulación biortogonal (IV)

- La probabilidad de detección correcta es:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{y} \in \mathfrak{R}_2} f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_2) d\mathbf{y} &= \int_{\mathbf{y} \in \mathfrak{R}_2} \frac{1}{(\pi N_0)^{L/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_2\|^2}{N_0}\right) d\mathbf{y} = \left[ \begin{array}{l} L=2 \\ \sigma^2 = \frac{N_0}{2} \\ \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_2\|^2 = (y_1 - d/2)^2 + (y_2 - d/2)^2 \end{array} \right] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 - d/2)^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_2 - d/2)^2}{\sigma^2}\right) dy_1 dy_2 = \left[ \int_{\frac{-d}{2\sigma}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda^2\right) d\lambda \right]^2 \\ &= \left[ 1 - \int_{\frac{d}{2\sigma}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda^2\right) d\lambda \right]^2 = \left[ 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \right]^2 = \left[ 1 - Q\left(\sqrt{2} \frac{E_b}{N_0}\right) \right]^2 \end{aligned}$$

- Por tanto la probabilidad de error queda:

$$\Pr(e) = 2Q\left(\sqrt{2} \frac{E_b}{N_0}\right) - Q^2\left(\sqrt{2} \frac{E_b}{N_0}\right)$$

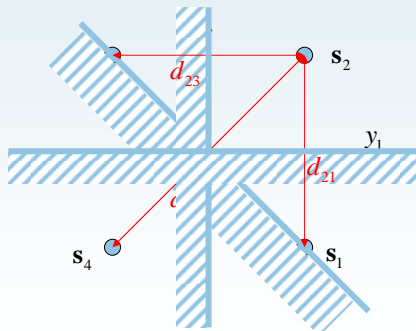
15/09/2006

COM II

T2-62

### Aproximaciones de la Probabilidad de Error

- Existen modulaciones para las cuales el cálculo integral de la prob. de error puede resultar muy complejo. Se recurre a expresiones aproximadas.
  - Cota de la unión. Para el caso de símbolos equiprobables se tiene:



$$P(e) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M P(e | s_m)$$

Para cada uno de ellos la cota se puede aproximar (de forma pesimista) por la probabilidad de error *dos a dos* (pairwise)

$$P(e | s_m) \leq \sum_{i=1; i \neq m}^M P(\|y - s_i\| < \|y - s_m\| | s_m) = \sum_{i=1; i \neq m}^M Q\left(\frac{d_{mi}}{\sqrt{2N_0}}\right) \leq (M-1)Q\left(\frac{d_{MN}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

15/09/2006

COM II

T2-63

### Probabilidad de Error de modulaciones M-Ortogonales

- Un ejemplo en el que se aplica la cota de la unión es el caso de modulaciones en las que todos los símbolos son ortogonales entre sí (forman una base). En este caso:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{bE_b} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_s} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{bE_b} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{s}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sqrt{E_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sqrt{bE_b} \end{pmatrix}$$

- Y la distancia entre símbolos es siempre igual a:

$$d_{12} = \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\| = \sqrt{bE_b + bE_b} = \sqrt{2bE_b} = \sqrt{2E_b \log_2 M} = d_{mn}$$

$$P(e) \leq (M-1)Q\left(\frac{d_{MN}}{\sqrt{2N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\log_2 M \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

15/09/2006

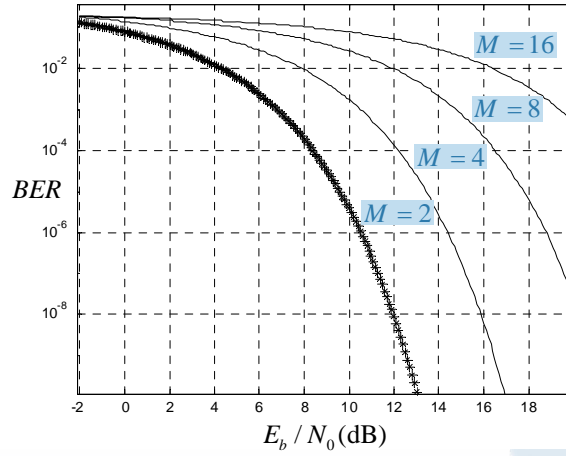
COM II

T2-64



### Comparación de BER en modulaciones PM

- Caso PAM (símbolos equiprobable)  $BER \approx \frac{1}{\log_2 M} \Pr(e) = \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$



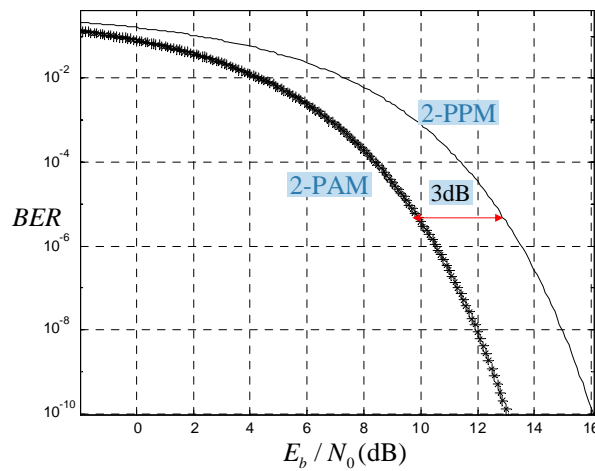
15/09/2006

COM II

T2-65

### Comparación de BER en modulaciones PM (II)

- Comparación 2PAM-2PPM:  $\Pr(e)_{2PAM} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$  ;  $\Pr(e)_{2PPM} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$



15/09/2006

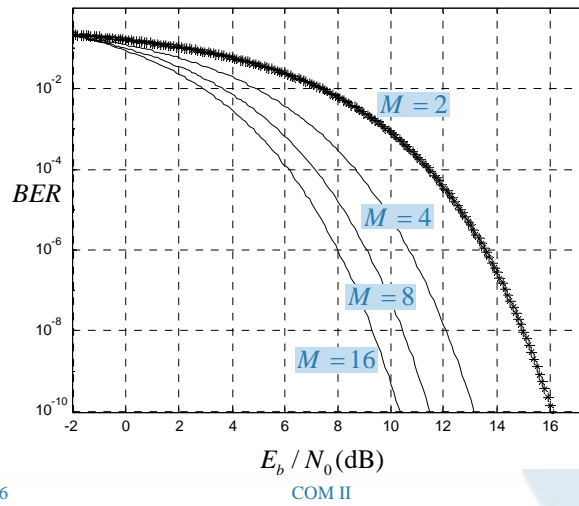
COM II

T2-66

### Comparación de BER en modulaciones PM (III)

- Modulaciones M-ortogonales:

$$P(e) \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$



15/09/2006

COM II

T2-67