UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona **Dept. Teoria del Senyal i Comunicacions**	**ComII.** 2008-01-15
Profesores:	M.Cabrera, J. Fernández Rubio, J. Riba

Ejercicio 1

En una modulación digital la señal modulada se puede expresar del siguiente modo:

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m[n]}(t-nT) \qquad \text{con} \qquad s_m(t)=a_m \frac{1}{\sqrt{T/2}}\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right)+b_m \frac{1}{\sqrt{T/2}}\Pi\left(\frac{t-\frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}}\right) \qquad (1)$$

Donde $a_m=\pm A$ es una variable aleatoria binaria de valores equiprobables y $b_m=\pm B$ es también una variable aleatoria binaria de valores equiprobables y es estadísticamente independiente a la variable a_m.

La señal $s(t)$ se transmite por un canal ideal ($h_c(t)=\delta(t)$) AWGN, cuyo ruido $w(t)$ presenta la densidad espectral de potencia $S_w(f)=\frac{N_0}{2}$.

Se pide:

a) Halle una base ortonormal generadora del espacio de señal y dibuje los vectores respecto a dicha base. Proponga la estructura del receptor óptimo y halle la probabilidad de error de bit (BER) del sistema en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$ y del cociente $\rho=\frac{A}{B}$.

Solución Abreviada:

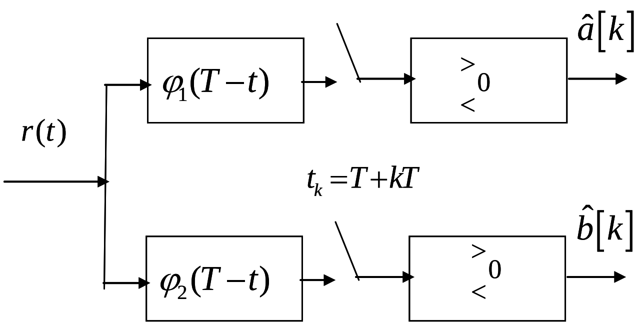
Tal como nos han dado la señal, una base ortonormal de dimensión L=2 que puede utilizarse directamente es:

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{\sqrt{T/2}}\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right) \qquad \varphi_2(t)=\frac{1}{\sqrt{T/2}}\Pi\left(\frac{t-\frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}}\right)$$

De esta forma los M=4 vectores son directamente: $\mathbf{s}_m=\begin{pmatrix}a_m\\ b_m\end{pmatrix}$ o equivalentemente:

$$\mathbf{s}_1=\begin{pmatrix}+A\\+B\end{pmatrix};\mathbf{s}_2=\begin{pmatrix}-A\\+B\end{pmatrix};\mathbf{s}_3=\begin{pmatrix}-A\\-B\end{pmatrix};\mathbf{s}_4=\begin{pmatrix}+A\\-B\end{pmatrix} \text{ (}\textit{se dibuja como un rectángulo}\text{).}$$

Mediante un receptor formado por dos filtros adaptados y dos bloques de decisión independientes según se muestra en la figura:



La BER resultante es el promedio de las dos BERs obtenidas en cada una de las dos ramas, que dado que el canal es ideal y el ruido es gaussiano:

$$BER = \tfrac{1}{2}\left(Q\left(\tfrac{A}{\sigma}\right) + Q\left(\tfrac{B}{\sigma}\right)\right) \qquad (1.1)$$

Finalmente y dado que la energía media transmitida por bit es igual a $E_b = \frac{1}{2}\left(A^2 + B^2\right)$ y la varianza de ruido es igual a: $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$, sustituyendo en (1.1) se obtiene la BER solicitada:

$$BER = \tfrac{1}{2}\left(Q\left(\sqrt{\tfrac{2A^2}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\tfrac{2B^2}{N_0}}\right)\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(Q\left(\sqrt{\tfrac{2A^2}{A^2+B^2}\tfrac{2E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\tfrac{2B^2}{A^2+B^2}\tfrac{2E_b}{N_0}}\right)\right) =$$
$$\tfrac{1}{2}\left(Q\left(\sqrt{\tfrac{2}{1+\rho^2}\tfrac{2E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\tfrac{2\rho^2}{1+\rho^2}\tfrac{2E_b}{N_0}}\right)\right)$$

Donde se puede observar que si $A = B \Rightarrow \rho = 1$, se obtiene la expresión esperada para una constelación de tipo QPSK.

Suponga a partir de este punto $A = B$ *para el resto del ejercicio.*

En un momento dado, se decide añadir un nuevo bit a cada símbolo $s_m(t)$ de la expresión (1), con el objeto de transmitir información de protocolo. La interpretación es que al añadir un bit de protocolo igual a '1' el símbolo $s_m(t)$ correspondiente transmite información de audio y al añadir un bit de protocolo igual a '0' el símbolo $s_m(t)$ correspondiente transmite información necesaria para el sincronismo de la señal.

En definitiva, la nueva señal transmitida, a la que denominaremos $g(t)$, se puede expresar del siguiente modo: $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{m[n]}(t-nT)s_{m[n]}(t-nT)$

Cuando el bit de protocolo vale '1' la función correspondiente es:

$$g_m(t) = g_1(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T}{8}}{\frac{T}{4}}\right) - \Pi\left(\frac{t-\frac{3T}{8}}{\frac{T}{4}}\right) + \Pi\left(\frac{t-\frac{5T}{8}}{\frac{T}{4}}\right) - \Pi\left(\frac{t-\frac{7T}{8}}{\frac{T}{4}}\right)$$

Cuando el bit de protocolo vale '0' la función correspondiente es: $g_m(t) = g_0(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$

Ambos valores se producen con equiprobabilidad.

Se pide:

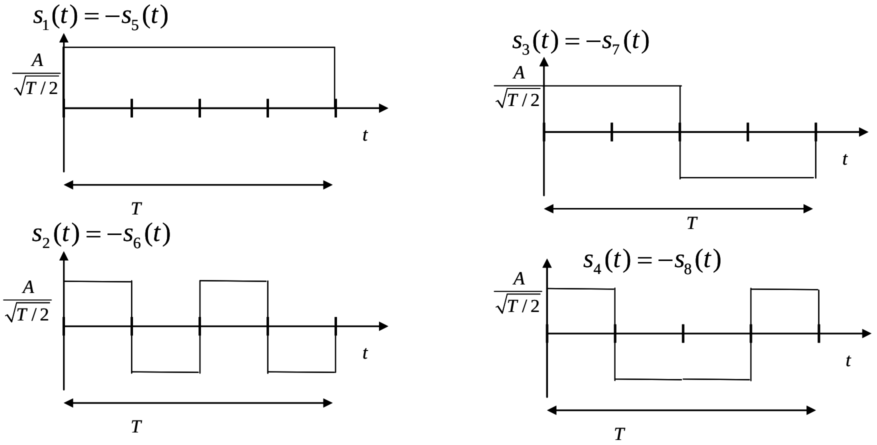
b) Halle y dibuje todas las formas de onda temporales del nuevo espacio de señal. Obtenga una base ortonormal generadora y los vectores de señal respecto a dicha base.

Solución Abreviada:

Cada nuevo símbolo de la señal, depende del par de valores (a_m, b_m) y del bit de protocolo. Por tanto las posibilidades para cada símbolo son M=8 y son equiprobables.

A continuación se presenta una tabla para enumerar las M=8 señales del nuevo espacio de señal y posteriormente se representan gráficamente.

m	1	2	3	4	5	6	7	8
(a_m, b_m)	+A,+A	+A,+A	+A,-A	+A,-A	-A,-A	-A,-A	-A,+A	-A,+A
Bit Prot.	0	1	0	1	0	1	0	1
$s_m(t)$	$s_1(t)$	$s_2(t)$	$s_3(t)$	$s_4(t)$	$s_5(t) = -s_1(t)$	$s_6(t) = -s_2(t)$	$s_7(t) = -s_3(t)$	$s_8(t) = -s_4(t)$



Para obtener una base ortonormal generadora existen múltiples posibilidades, pero a simple vista se puede observar que dado que las primeras cuatro señales son ortogonales entre sí, la dimensión será de L=4.

Eligiendo $\varphi_l(t) = \frac{1}{\sqrt{2}A} s_l(t); \quad l = 1,..4$, los vectores resultantes son:

$$\mathbf{s}_1 = -\mathbf{s}_5 = \begin{pmatrix} +A\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{s}_2 = -\mathbf{s}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ +A\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{s}_3 = -\mathbf{s}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +A\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{s}_4 = -\mathbf{s}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +A\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

c) Calcule para la señal $g(t)$ la energía media transmitida por bit a la que denominaremos E_g y compárela con la energía media transmitida por bit de la señal $s(t)$, a la que denominaremos E_b.

Solución Abreviada:

Considerando para el caso dado, que se transmiten 3 bits por símbolo, se obtiene:

$$E_g = \tfrac{1}{3} 2A^2$$

Respecto a la constelación del primer apartado, la energía media de símbolo se mantiene, por lo que con $A = B$, $E_b = A^2$ y se obtiene que:

$$E_g = \tfrac{2}{3} E_b$$

Es decir, al haber aumentado la velocidad de bit en este caso, se aprovecha mejor la energía media transmitida por símbolo.

d) Obtenga razonadamente una cota superior lo más ajustada posible para la probabilidad de error de símbolo (SER) del sistema en función del cociente $\frac{E_g}{N_0}$.

Solución Abreviada:

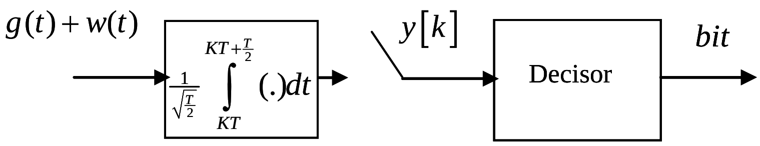
Al aplicar la cota de la unión, se puede observar que cada símbolo dista $d = 2A$ de 6 símbolos y $D = 2\sqrt{2}A$ de su símbolo opuesto, por lo que una cota inicial ajustada es:

$$SER \le 6Q\left(\tfrac{d}{2\sigma}\right) + Q\left(\tfrac{D}{2\sigma}\right)$$

Aunque, extrapolando de casos similares de (L=2,M=4) ó (L=3,M=6) se deduce que un mayor ajuste se da por:

$$SER \le 6Q\left(\tfrac{d}{2\sigma}\right) = 6Q\left(\sqrt{2\tfrac{A^2}{N_0}}\right) = 6Q\left(\sqrt{3\tfrac{E_g}{N_0}}\right)$$

e) Suponga ahora que se diseña un receptor para realizar una decisión binaria únicamente del bit de protocolo según la figura adjunta. Obtenga la distribución estadística de las variables condicionadas a los dos posibles valores del bit de protocolo: $y[k]|0$ y $y[k]|1$. Proponga una regla de decisión para el bloque decidor, que aplique el criterio MAP a partir de la variable $y[k]$. Calcule la BER para el bit de protocolo en función del cociente $\frac{E_g}{N_0}$.



Solución Abreviada:

Observando las M=8 señales del espacio de señal, considerando el bit de protocolo que transmite cada una y lo que se obtendría de integrar las señales en la primera mitad del periodo de símbolo se deduce que:

$$y[k]|0 = \pm A + n$$

Donde los valores $\pm A$ se producen con equiprobabilidad y n es una variable aleatoria gaussiana de media nula y varianza $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$, ya que de hecho el integrador equivale a un filtro adaptado a un pulso de energía igual a uno. Por tanto:

$$f_y\left(y|0\right) = \tfrac{1}{2}\left(f_n\left(y-A\right) + f_n\left(y+A\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-A)^2}{\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y+A)^2}{\sigma^2}}\right)$$

Análogamente se deduce que:

$$y[k]|1 = n;\ f_y\left(y|1\right) = f_n\left(y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y)^2}{\sigma^2}}$$

Por tanto, la decisión se tomará de forma análoga a una modulación bipolar. Se trata de buscar el valor de umbral γ para el decisor tal que:

$$-\gamma < y\left(t_k\right) < +\gamma \Rightarrow \hat{b}[k] = 1$$
$$\left(y\left(t_k\right) < -\gamma\right) \cup \left(+\gamma < y\left(t_k\right)\right) \Rightarrow \hat{b}[k] = 0$$

Aplicando el criterio MAP, en el valor del umbral se cumple que:

$$f_y\left(\gamma|0\right) = f_y\left(\gamma|1\right) \Rightarrow$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\gamma-A)^2}{\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\gamma+A)^2}{\sigma^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\gamma)^2}{\sigma^2}} \Rightarrow$$
$$\tfrac{1}{2}\left(e^{+\frac{\gamma A}{\sigma^2}} + e^{-\frac{\gamma A}{\sigma^2}}\right) = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{\sigma^2}{A} Ch^{-1}\left(e^{\frac{-A^2}{2\sigma^2}}\right) = \frac{N_0}{\sqrt{6E_g}} Ch^{-1}\left(e^{\frac{-3E_g}{2N_0}}\right)$$

Donde Ch(.) representa la función de coseno hiperbólico.

El cálculo de la BER da lugar a la siguiente expresión:

$$BER = Q\left(\tfrac{\gamma}{\sigma}\right) + \tfrac{1}{2}Q\left(\tfrac{A-\gamma}{\sigma}\right) - \tfrac{1}{2}Q\left(\tfrac{A+\gamma}{\sigma}\right)$$

Si se han realizado las aproximaciones habituales en el cálculo de la BER anterior, se considerarán igualmente válidas.