

Comunicaciones II

Ejemplos Tema 3

Transmisión digital PAM a través de canales AWGN limitados en banda

Javier Rodríguez Fonollosa y Margarita Cabrera Beán



Departament de Teoria
del Senyal i Comunicacions



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Ejemplos Tema 3

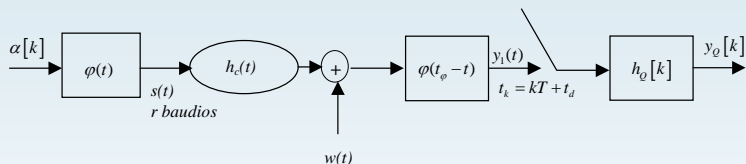
*Transmisión digital PAM a través de canales AWGN
limitados en banda*

- Ecuación Fraccionaria
- Relación entre el ecualizador Forzador de Ceros y el MSE
- Ejemplo: ISI entre coordenadas y ecualización



Ecuación Fraccionaria

- El diseño de los ecualizadores en recepción (ZF y MSE) se ha planteado en el esquema siguiente:



– En donde (ver T3-59):

$$p[k] * h_Q[k] \approx \delta[k - k_0] \quad ; \quad p[k] = p(t_d + kT) = p_R(kT) \quad ; \quad p(t) = R_{\phi\phi}(t - T) * h_c(t)$$

- Analizando el problema en el dominio frecuencial la presencia de ISI se manifiesta en la ecuación:

$$P_R^M(f) = P_R(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_R\left(f - \frac{n}{T}\right) \neq 1$$

24/10/2006

COM II

T3-E3

Ecuación Fraccionaria (II)

- Si existe un pequeño error de sincronismo, definiendo:

$$p_\varepsilon(t) \triangleq p_R(t - \varepsilon)$$

$$P_\varepsilon^M(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_\varepsilon\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_R\left(f - \frac{n}{T}\right) e^{-j2\pi(f - \frac{n}{T})\varepsilon}$$

- El espectro discreto (versión solapada del espectro analógico) depende del error de sincronismo.
- Definiendo la respuesta frecuencia del ecualizador (de periodicidad $1/T$) como:

$$H_Q(f) = \sum_m h_Q[m] e^{-j2\pi f m T}$$

- El ecualizador sólo puede compensar la distorsión del canal para eliminar la ISI en el espectro solapado

$$P_\varepsilon^M(f) H_Q(f) \approx 1$$

24/10/2006

COM II

T3-E4

Ecualización Fraccionaria (III)

- En general sin embargo el ancho de banda de la señal recibida (utilizando pulsos de coseno realzado con $\alpha=1$) no supera el doble del ancho de banda mínimo ($1/T$):

$$|P_R(f)| = 0 \quad ; \quad |f| \geq 2 \frac{1}{2T} = \frac{1}{T}$$

- Si la señal a la salida del filtro adaptado se muestrea al **doble del periodo de símbolo** entonces:

$$P_\varepsilon^{M'}(f) = \frac{2}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_\varepsilon \left(f - \frac{2n}{T} \right) = \frac{2}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_R \left(f - \frac{2n}{T} \right) e^{-j2\pi(f - \frac{2n}{T})\varepsilon}$$

- En el espectro discreto del pulso ya no se ha solapado el espectro analógico: Facilita la compensación del retardo de fase por parte del ecualizador.

24/10/2006

COM II

T3-E5

Ecualización Fraccionaria (IV)

- La respuesta del ecualizador fraccionario es:

$$H_Q'(f) = \sum_m h_Q'[m] e^{-j\pi f k T}$$

- De forma que el espectro discreto del pulso ecualizado es:

$$P_Q^{M'}(f) = P_\varepsilon^{M'}(f) H_Q'(f) = P_\varepsilon(f) H_Q'(f) = P_R(f) H_Q'(f) e^{-j2\pi f \varepsilon} \quad ; \quad |f| \leq \frac{1}{T}$$

- Ahora se podría aproximar:

$$H_Q'(f) \approx \frac{P_{RC}(f)}{P_R(f)} e^{j2\pi f \varepsilon} \Rightarrow P_Q^{M'}(f) \approx P_{RC}(f) \quad ; \quad |f| \leq \frac{1}{T}$$

- De forma que cuando finalmente se muestrea a periodo de símbolo se cumple la condición de ISI=0 ya que el pulso ha sido ecualizado antes de solaparse:

$$\sum_k P_Q^{M'} \left(f - \frac{k}{T} \right) = \sum_k P_\varepsilon^{M'} \left(f - \frac{k}{T} \right) H_Q' \left(f - \frac{k}{T} \right) \approx 1$$

24/10/2006

COM II

T3-E6

Relación entre el ecualizador ZF y el MSE

- El criterio de diseño del forzador de ceros se ha planteado a partir del cumplimiento exclusivamente del criterio de ausencia de ISI:

$$p[k] * h_Q[k] = p_Q[k] = \delta[k - k_0]$$

- Esta ecuación puede expresarse como:

$$p[-k] * p[k] * h_Q[k] = p[-k] * \delta[k - k_0] = p[k_0 - k]$$

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} p[n] p[n-k] \right) * h_Q[k] = p[k_0 - k]$$

$$R_p[-k] * h_Q[k] = p[k_0 - k]$$

24/10/2006

COM II

T3-E7

Relación entre el ecualizador ZF y el MSE (II)

- Considerando exclusivamente L_Q+1 ecuaciones resulta el siguiente sistema:

$$R_p[-k] * h_Q[k] = \sum_n h_Q[n] R_p[n-k] = \sum_n h_Q[n] R_p[k-n] = p[k_0 - k]$$

↓

$$\begin{pmatrix} R_p[0] & R_p[-1] & \cdots & R_p[-L_Q] \\ R_p[1] & R_p[0] & \cdots & R_p[1-L_Q] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_p[L_Q] & R_p[L_Q-1] & \cdots & R_p[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_Q[0] \\ h_Q[1] \\ \vdots \\ h_Q[L_Q] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p[k_0] \\ p[k_0-1] \\ \vdots \\ p[k_0-L_Q] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_p \mathbf{h}_Q = \mathbf{p}[k_0]$$

24/10/2006

COM II

T3-E8

Relación entre el ecualizador ZF y el MSE (III)

- La ecualización según el criterio MSE se basaba en la minimización de un criterio totalmente distinto:

$$\varepsilon_{MSE} = E \left[|y_Q[k] - s_m[k - k_0]|^2 \right] = E \left[\sum_{l=0}^{L_Q} h[l] y[k-l] - s_m[k - k_0] \right]^2$$

- Y se había obtenido de forma matricial el sistema:

$$\begin{pmatrix} R_y[0] & R_y[-1] & \cdots & R_y[-L_Q] \\ R_y[1] & R_y[0] & \cdots & R_y[1-L_Q] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y[L_Q] & R_y[L_Q-1] & \cdots & R_y[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_Q[0] \\ h_Q[1] \\ \vdots \\ h_Q[L_Q] \end{pmatrix} = \sigma_s^2 \begin{pmatrix} p[k_0] \\ p[k_0-1] \\ \vdots \\ p[k_0-L_Q] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y \mathbf{h}_Q = \sigma_s^2 \mathbf{p}[k_0]$$

24/10/2006

COM II

T3-E9

Relación entre el ecualizador ZF y el MSE (IV)

- De forma compacta ambos criterios resultan en las ecuaciones:

$$\text{ZF: } \mathbf{R}_p \mathbf{h}_Q = \mathbf{p}[k_0]$$

$$\text{MSE: } \mathbf{R}_y \mathbf{h}_Q = \sigma_s^2 \mathbf{p}[k_0]$$

- Además, en el caso de modulaciones sin memoria con media nula la matriz de correlación de y puede expresarse como:

$$\mathbf{R}_y = \sigma_s^2 \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_\beta = \sigma_s^2 \mathbf{R}_p + \frac{N_0}{2} \mathbf{I}$$

de forma que el criterio MSE se simplifica a:

$$\text{MSE: } \left(\mathbf{R}_p + \frac{N_0}{2\sigma_s^2} \mathbf{I} \right) \mathbf{h}_Q = \mathbf{p}[k_0]$$

equivalente al ZF para SNR alta

24/10/2006

COM II

T3-E10

Relación entre el ecualizador ZF y el MSE (V)

- Interpretación frecuencial:

$$\text{ZF: } R_p[-k] * h_Q[k] = p[k_0 - k] \Leftrightarrow |P_R^M(f)|^2 H_Q(f) = P_R^M(f)^* e^{-j2\pi f T k_0}$$

$$H_Q(f) = \frac{P_R^M(f)^* e^{-j2\pi f T k_0}}{|P_R^M(f)|^2} = \frac{1}{P_R^M(f)} e^{-j2\pi f T k_0}$$

$$\text{MSE: } \frac{1}{\sigma_s^2} R_y[-k] * h_Q[k] = p[k_0 - k] \Leftrightarrow S_y(f) H_Q(f) = P_R^M(f)^* e^{-j2\pi f T k_0}$$

$$\left(|P_R^M(f)|^2 + \frac{N_0}{2\sigma_s^2} \right) H_Q(f) = P_R^M(f)^* e^{-j2\pi f T k_0}$$

$$H_Q(f) = \frac{P_R^M(f)^* e^{-j2\pi f T k_0}}{\left(|P_R^M(f)|^2 + \frac{N_0}{2\sigma_s^2} \right)}$$

24/10/2006

COM II

T3-E11

Relación entre el ecualizador ZF y el MSE (VI)

- Expresiones que dependen del equivalente discreto del canal:

$$P_R^M(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_R \left(f - \frac{n}{T} \right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| H_\varphi \left(f - \frac{n}{T} \right) \right|^2 H_c \left(f - \frac{n}{T} \right) e^{-j2\pi \left(f - \frac{n}{T} \right) (t_d + T)}$$

- En donde se ha utilizado la relación:

$$p[k] = p(t_d + kT) = P_R(kT) \quad ; \quad p(t) = R_{\varphi\varphi}(t-T) * h_c(t)$$

$$P_R(f) = P(f) e^{-j2\pi f t_d} = \left| H_\varphi(f) \right|^2 H_c(f) e^{-j2\pi f (t_d + T)}$$

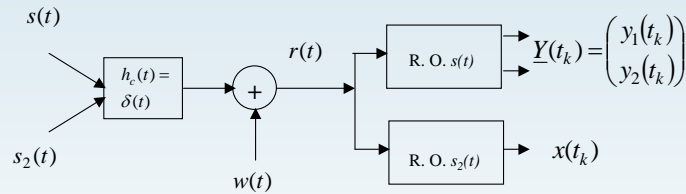
24/10/2006

COM II

T3-E12

Ejemplo: ISI entre coordenadas y ecualización

- Ejercicio 13 Colección de problemas (apartados f, g, h, i)



$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_m[n] (t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_m[n] f(t - nT) - c_m[n] g(t - nT))$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sen}\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) ; \quad g(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sen}\left(4\pi \frac{t}{T}\right) \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] p(t - nT) ; \quad p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) ; \quad \alpha[n] = \pm d/2$$

24/10/2006

COM II

T3-E13

Ejemplo: ISI entre coordenadas y ecualización (II)

- f) Cálculo del vector de coordenadas en el receptor óptimo de $s(t)$ en el caso de sincronización perfecta:

$$y_1[n] = y_1((n+1)T) = (s(t) + s_2(t) + w(t)) * f(T-t) \Big|_{t=(n+1)T} =$$

$$= a_m[n] + \beta_1[n] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha[m] p(t - mT) * f(T-t) \Big|_{t=(n+1)T} =$$

$$= a_m[n] + \beta_1[n] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha[m] \int_{-\infty}^{\infty} p((n+1)T - \tau - mT) f(T - \tau) d\tau =$$

$$= \left[\begin{matrix} T - \tau = -\alpha \\ d\tau = d\alpha \end{matrix} \right] = a_m[n] + \beta_1[n] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha[m] \int_{-\infty}^{\infty} p((n-m)T - \alpha) f(-\alpha) d\alpha =$$

$$= a_m[n] + \beta_1[n] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha[m] R_{pf}((n-m)T) = a_m[n] + \beta_1[n] + \alpha[n] R_{pf}(0)$$

24/10/2006

COM II

T3-E14

Ejemplo: ISI entre coordenadas y ecualización (III)

- Se forma equivalente:

$$\begin{aligned}
 y_2[n] &= y_2((n+1)T) = (s(t) + s_2(t) + w(t)) * g(T-t) \Big|_{t=(n+1)T} = \\
 &= -c_m[n] + \beta_2[n] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha[m] p(t-mT) * g(T-t) \Big|_{t=(n+1)T} = \\
 &= -c_m[n] + \beta_2[n] + \alpha[n] R_{pg}(0)
 \end{aligned}$$

24/10/2006

COM II

T3-E15

Ejemplo: ISI entre coordenadas y ecualización (IV)

- g) Cálculo del vector de coordenadas en el receptor óptimo de $s(t)$ en el caso de retraso de $T/2$ en la interferencia:

$$s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] p(t - nT - \frac{T}{2})$$

$$\begin{aligned}
 y_1[n] &= y_1((n+1)T) = (s(t) + s_2(t) + w(t)) * f(T-t) \Big|_{t=(n+1)T} = \\
 &= a_m[n] + \beta_1[n] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha[m] p(t-mT - T/2) * f(T-t) \Big|_{t=(n+1)T} = \\
 &= a_m[n] + \beta_1[n] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha[m] \int_{-\infty}^{\infty} p((n+1)T - \tau - mT - T/2) f(T - \tau) d\tau = \\
 &= \left[\begin{matrix} T - \tau = -\alpha \\ d\tau = d\alpha \end{matrix} \right] = a_m[n] + \beta_1[n] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha[m] \int_{-\infty}^{\infty} p((n-m)T - T/2 - \alpha) f(-\alpha) d\alpha = \\
 &= a_m[n] + \beta_1[n] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha[m] R_{pf}((n-m)T - T/2) = \\
 &= a_m[n] + \beta_1[n] + \alpha[n-1] R_{pf}(T/2) + \alpha[n] R_{pf}(-T/2)
 \end{aligned}$$

Ejemplo: ISI entre coordenadas y ecualización (V)

- De forma análoga

$$\begin{aligned}
 y_2[n] &= y_2((n+1)T) = (s(t) + s_2(t) + w(t)) * g(T-t) \Big|_{t=(n+1)T} = \\
 &= -c_m[n] + \beta_2[n] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha[m] p(t-mT) * g(T-t) \Big|_{t=(n+1)T} = \\
 &= -c_m[n] + \beta_2[n] + \alpha[n-1] R_{pg}(T/2) + \alpha[n] R_{pg}(-T/2)
 \end{aligned}$$

pero en este caso las correlaciones cruzadas se anulan en $\pm T/2$

24/10/2006

COM II

T3-E17

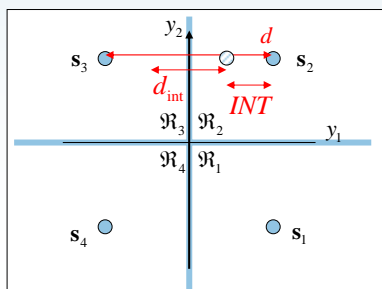
Ejemplo: ISI entre coordenadas y ecualización (VI)

- Resulta una interferencia tan sólo en la primera coordenada

$$R_{pf}(T/2) = \int_{-\infty}^{\infty} p(T/2 - \tau) f(-\tau) d\tau = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^{T/2} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) dt = \frac{\sqrt{2}}{\pi} = p = -R_{pf}(-T/2)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a_m[n] \\ -c_m[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha[n-1]p - \alpha[n]p \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1[n] \\ \beta_2[n] \end{bmatrix} = \mathbf{s}_m + INT + \mathbf{n}$$

Resulta una disminución de la distancia mínima de un máximo de:



$$\begin{aligned}
 d_{int} &= d - 2\left(\frac{d}{2}p + \frac{d}{2}p\right) = \\
 &= d(1-2p) = d\left(1 - 2\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right) \\
 20 \log\left(1 - 2\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right) &= -20.0275 \text{ dB}
 \end{aligned}$$

COM II

T3-E18

Ejemplo: ISI entre coordenadas y ecualización (VII)

- A la salida del receptor óptimo de la interferencia:

$$\begin{aligned}
 x[n] &= x((n+1)T) = (s(t) + s_2(t) + w(t)) * p(T-t) \Big|_{t=(n+1)T+T/2} = \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m[m] f(t-mT) * p(T-t) \Big|_{t=(n+1)T+T/2} + \\
 &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m[m] g(t-mT) * p(T-t) \Big|_{t=(n+1)T+T/2} \\
 &+ \beta[n] + \alpha[n] \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m[m] \int_{-\infty}^{\infty} f((n+1)T + T/2 - \tau - mT) p(T-\tau) d\tau + \\
 &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m[m] \int_{-\infty}^{\infty} g((n+1)T + T/2 - \tau - mT) p(T-\tau) d\tau \\
 &+ \beta[n] + \alpha[n]
 \end{aligned}$$

24/10/2006

COM II

T3-E19

Ejemplo: ISI entre coordenadas y ecualización (VIII)

- Resultando:

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m[m] \int_{-\infty}^{\infty} f((n-m)T + T/2 - \alpha) p(-\alpha) d\alpha + \\
 &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m[m] \int_{-\infty}^{\infty} g((n-m)T + T/2 - \alpha) p(-\alpha) d\alpha \\
 &+ \beta[n] + \alpha[n] \\
 &= a_m[n] R_{fp}(T/2) + a_m[n+1] R_{fp}(-T/2) + \\
 &+ c_m[n] R_{sp}(T/2) + c_m[n+1] R_{sp}(-T/2) + \\
 &+ \beta[n] + \alpha[n] \\
 &= -p a_m[n] + p a_m[n+1] + \\
 &+ \beta[n] + \alpha[n]
 \end{aligned}$$

donde

$$R_{fp}(T/2) = R_{fp}(-T/2) = -p = -R_{fp}(-T/2) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

24/10/2006

COM II

T3-E20

Ejemplo: ISI entre coordenadas y ecualización (IX)

- Finalmente se plantea un problema de minimización de error cuadrático medio mediante una combinación lineal de las diferentes salidas. Se define:

$$y_{eq}[n] = h_1 y_1[n] + h_2 x[n] + h_3 x[n-1]$$

y la función de coste a minimizar es:

$$\varepsilon = E \left[\left| y_{eq}[n] - a[n] \right|^2 \right] = E \left[\left| e[n] \right|^2 \right]$$

Desarrollando la función de coste resulta:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E \left[\left| h_1 y_1[n] + h_2 x[n] + h_3 x[n-1] - a[n] \right|^2 \right] = \\ &= E \left[\left(h_1 y_1[n] + h_2 x[n] + h_3 x[n-1] - a[n] \right) \left(e[n] \right) \right] \end{aligned}$$

cuya solución se obtiene aplicando el principio de ortogonalidad

24/10/2006

COM II

T3-E21

Ejemplo: ISI entre coordenadas y ecualización (X)

- Principio de ortogonalidad (error ortogonal a los datos)

$$E \begin{bmatrix} y_1[n] \\ x[n] \\ x[n-1] \end{bmatrix} e[n] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{aligned} y_1[n] &= a[n] + p\alpha[n-1] - p\alpha[n] + \beta_1[n] \\ x[n] &= \alpha[n] + q\alpha[n+1] - q\alpha[n] + \beta[n] \\ x[n-1] &= \alpha[n-1] + q\alpha[n] - q\alpha[n-1] + \beta[n-1] \end{aligned}$$

Desarrollando la esperanza:

$$\begin{aligned} E \begin{bmatrix} y_1[n] \\ x[n] \\ x[n-1] \end{bmatrix} \left(h_1 y_1[n] + h_2 x[n] + h_3 x[n-1] - a[n] \right) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} R_{y_1 y_1}[0] & R_{y_1 x}[0] & R_{y_1 x}[-1] \\ R_{y_1 x}[0] & R_{xx}[0] & R_{xx}[-1] \\ R_{y_1 x}[-1] & R_{xx}[-1] & R_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} &= \frac{d^2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -q \\ q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

24/10/2006

COM II

T3-E22

Ejemplo: ISI entre coordenadas y ecualización (XI)

- Teniendo en cuenta:

$$\begin{aligned}y_1[n] &= a[n] + p\alpha[n-1] - p\alpha[n] + \beta_1[n] \\x[n] &= \alpha[n] + qa[n+1] - qa[n] + \beta[n] \\x[n-1] &= \alpha[n-1] + qa[n] - qa[n-1] + \beta[n-1]\end{aligned}$$

Los términos de la matriz de correlación son:

$$\begin{aligned}R_{y_1y_1}[0] &= \frac{d^2}{4}(1+2p^2) + \frac{N_0}{2} \quad ; \quad R_{xx}[0] = \frac{d^2}{4}(1+2q^2) + \frac{N_0}{2} \\R_{y_1x}[0] &= -\frac{d^2}{4}(q+p) \quad ; \quad R_{y_1x}[-1] = \frac{d^2}{4}(q+p) \\R_{xx}[-1] &= -\frac{d^2}{4}q^2\end{aligned}$$

24/10/2006

COM II

T3-E23

Ejemplo: ISI entre coordenadas y ecualización (XII)

- Con lo que finalmente resulta:

$$\left(\frac{d^2}{4} \begin{bmatrix} 1+2p^2 & -q-p & q+p \\ -q-p & 1+2q^2 & -q^2 \\ q+p & -q^2 & 1+2q^2 \end{bmatrix} + \frac{N_0}{2} \mathbf{I} \right) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \frac{d^2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -q \\ q \end{bmatrix}$$

24/10/2006

COM II

T3-E24