

## Comunicaciones II

### Tema 3

*Transmisión digital PAM a través de canales AWGN limitados en banda*

*Javier Rodríguez Fonollosa y Margarita Cabrera Beán*



Departament de Teoria  
del Senyal i Comunicacions



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

### Índice del Tema 3

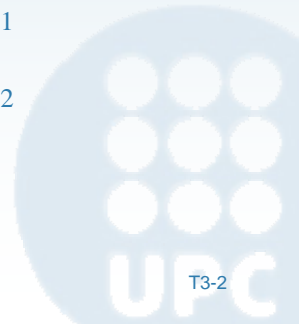
*Transmisión digital PAM a través de canales AWGN  
limitados en banda*

- 3.1 Autocorrelación y densidad espectral de potencia
  - Introducción
  - Cálculo de momentos de coeficientes del espacio de la señal
  - Momentos para el caso  $L > 1$ : notación matricial
  - Ejemplos de cálculos de momentos con modulaciones PM
  - Potencia media y densidad espectral de potencia
  - Ejemplos de densidades espectrales para  $L=1$
  - Ejemplo de modulaciones con memoria
  - Ejemplos de densidades espectrales para  $L=2$
- 3.2 Interferencia inter-simbólica: ISI
  - Introducción: Canal Ideal
  - Caso de canal no ideal con  $L=1$

09/10/2006

COM II

T3-2



*Indice del Tema 3*  
*Transmisión digital PAM a través de canales AWGN*  
*limitados en banda*

- Caso de canal no ideal con  $L > 1$
- Formulación del criterio MAP en presencia de ISI
- 3.3 Pulsos de Nyquist
  - Introducción
  - Diseño de pulsos para  $L=1$
  - Pulsos de coseno realzado
  - Diseño de pulsos para  $L > 1$
- 3.4 Ecuación
  - Introducción
  - Ecuación Discreta: Forzador de ceros
  - Ecuación Discreta: Criterio MSE
  - Ejemplo de ecuación
- 3.5 Filtros terminales Óptimos

09/10/2006

COM II

T3-3

### 3.1 Autocorrelación y densidad espectral de potencia

#### *Introducción*

- En este tema se considerará estudiará el efecto de la limitación en banda sobre las señales moduladas digitalmente. Para ello se estudiará en primer lugar el ancho de banda requerido por estas modulaciones en base a su densidad espectral de potencia.
- Se partirá de la definición de la señal modulada:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m[n]}(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}[n] \phi_l(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_l[n] \phi_l(t-nT)$$

- Las las funciones que forman la base en el espacio de la señal son deterministas de forma que el carácter aleatorio reside en qué símbolo, de entre los  $M$  posibles, ha sido transmitido en cada periodo de símbolo  $nT$ .
- Cada posible símbolo transmitido  $s_m$  admite una representación en el espacio de la señal mediante sus coeficientes  $\alpha_{ml}$
- Estos coeficientes forman vectores aleatorios.

09/10/2006

COM II

T3-4

### Cálculo de momentos de coeficientes del espacio de la señal

- Consideraremos que la secuencia de bits de entrada es estacionaria (su función densidad de probabilidad no cambia con el tiempo) y que el proceso de asignación de símbolos a partir de bits también lo es. De esta forma los símbolos ( y por tanto el vector de sus coeficientes) serán procesos discretos estacionarios.
- Los momentos de primer y segundo orden resultan:

$$\mu_{\alpha_i}[n] = E[\alpha_i[n]] = \mu_{\alpha_i}$$

$$R_{\alpha_i\alpha_j}[n+k, n] = E[\alpha_i[n+k]\alpha_j[n]] = R_{\alpha_i\alpha_j}[k]$$

- La función de covarianza se obtiene a partir de los anteriores como:

$$C_{\alpha_i\alpha_j}[k] = E[(\alpha_i[n+k] - \mu_{\alpha_i})(\alpha_j[n] - \mu_{\alpha_j})]$$

$$C_{\alpha_i\alpha_j}[k] = R_{\alpha_i\alpha_j}[k] - \mu_{\alpha_i}\mu_{\alpha_j}$$

09/10/2006

COM II

T3-5

### Cálculo de momentos de coeficientes del espacio de la señal (II)

- Cálculo de los momentos:

$$\mu_{\alpha_i} = E[\alpha_i[n]] = \sum_{m=1}^M \Pr\{s_m\} \alpha_{mi}[n]$$

$$R_{\alpha_i\alpha_j}[k] \underset{\alpha_i \text{ estacionarios}}{=} E[\alpha_i[n+k]\alpha_j[n]] = \sum_{m[n+k]=1}^M \sum_{m[n]=1}^M \Pr\{s_{m[n+k]}, s_{m[n]}\} \alpha_{mi}[n+k]\alpha_{mj}[n]$$

- Cuando el mecanismo de asignación de bits a símbolos utilizado no tiene memoria, los símbolos (y por tanto el vector de sus coeficientes) son independientes entre si en instantes de tiempo distintos. De esta forma:

$$R_{\alpha_i\alpha_j}[k] = E[\alpha_i[n+k]\alpha_j[n]] = E[\alpha_i[n+k]]E[\alpha_j[n]] = \mu_{\alpha_i}\mu_{\alpha_j} \quad ; \quad k \neq 0$$

$$C_{\alpha_i\alpha_j}[k] = R_{\alpha_i\alpha_j}[k] - \mu_{\alpha_i}\mu_{\alpha_j} = 0 \quad ; \quad k \neq 0$$

09/10/2006

COM II

T3-6

*Cálculo de momentos de coeficientes del espacio de la señal  
(III)*

- Por tanto, en el caso sin memoria la covarianza de los símbolos resulta:

$$\begin{aligned} C_{\alpha_i \alpha_j}[k] &= R_{\alpha_i \alpha_j}[k] - \mu_{\alpha_i} \mu_{\alpha_j} = \left[ R_{\alpha_i \alpha_j}[0] \delta[k] + \mu_{\alpha_i} \mu_{\alpha_j} (1 - \delta[k]) \right] - \mu_{\alpha_i} \mu_{\alpha_j} = \\ &= \left( R_{\alpha_i \alpha_j}[0] - \mu_{\alpha_i} \mu_{\alpha_j} \right) \delta[k] = C_{\alpha_i \alpha_j}[0] \delta[k] \end{aligned}$$

09/10/2006

COM II

T3-7

*Momentos para el caso  $L > 1$ : notación matricial*

- Cuando el espacio de la señal tiene dimensión  $L$  se define el vector de medias (de dimensión  $L$ ) y las matrices de correlación y covarianza (de dimensión  $L \times L$ )

$$\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{s}_m] = \begin{pmatrix} \mu_{\alpha_1} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_L} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}[k] = E[\mathbf{s}_m[n+k] \mathbf{s}_m^T[n]] = \begin{bmatrix} R_{\alpha_1 \alpha_1}[k] & \cdots & R_{\alpha_1 \alpha_L}[k] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{\alpha_L \alpha_1}[k] & \cdots & R_{\alpha_L \alpha_L}[k] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}[k] = E[\mathbf{s}_m[n+k] \mathbf{s}_m^T[n]] - \boldsymbol{\mu}[n+k] \boldsymbol{\mu}[n]^T$$

- En caso de modulaciones sin memoria en notación vectorial:

$$\mathbf{C}[k] = (\mathbf{R}[0] - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T) \delta[k] = \mathbf{C}[0] \delta[k]$$

09/10/2006

COM II

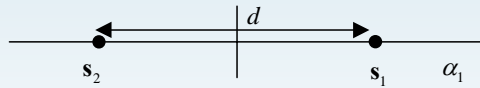
T3-8

## Ejemplos de cálculos de momentos con modulaciones PM

- Ejemplos de modulaciones sin memoria con  $L=1$ : PAM

$$\text{PAM: } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

– Modulaciones 2PAM



$$\mathbf{s}_1 = \sqrt{E_b} = \frac{d}{2}$$

$$\mathbf{s}_2 = -\sqrt{E_b} = -\frac{d}{2}$$

$$E_s = E_b = \frac{1}{4}d^2$$

$$\mu_{\alpha_i} = \mu_{\alpha} = E[\alpha[n]]_{\text{Estacionario}} = E[\alpha] = \sum_{m=1}^2 \Pr\{\mathbf{s}_m\} \alpha_m = p\left(-\frac{d}{2}\right) + (1-p)\frac{d}{2} = \frac{d}{2}(1-2p)$$

$$R_{\alpha\alpha}[0] = E[(\alpha[n])^2]_{\text{Estacionario}} = E[\alpha^2] = \sum_{m=1}^2 \Pr\{\mathbf{s}_m\} \alpha_m^2 = \frac{d^2}{4} = E_b$$

$$C_{\alpha\alpha}[k]_{\text{Sin memoria}} = C_{\alpha\alpha}[0] \delta[k] = (R_{\alpha\alpha}[0] - \mu_{\alpha}^2) \delta[k] = \frac{d^2}{4} (1 - (1-2p)^2) \delta[k]$$

09/10/2006

COM II

T3-9

## Ejemplos de cálculos de momentos con modulaciones PM (II)

- Ejemplos de modulaciones sin memoria con  $L=1$ : PAM

$$\text{PAM: } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

– Modulaciones MPAM con símbolos equiprobables:

$$s_m = \left(\frac{2m-M-1}{2}\right)d ; \quad M = 2^b ; \quad E_s = d^2 \sum_{m=1}^M \left(\frac{2m-1-M}{2}\right)^2 = \frac{M^2-1}{12} d^2$$

$$\mu_{\alpha} = E[\alpha] = \sum_{m=1}^M \Pr\{\mathbf{s}_m\} \alpha_m = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\frac{2m-M-1}{2}\right)d = 0$$

$$R_{\alpha\alpha}[0] = E[\alpha^2] = \sum_{m=1}^M \Pr\{\mathbf{s}_m\} \alpha_m^2 = E_s = \frac{M^2-1}{12} d^2$$

$$C_{\alpha\alpha}[k] = \frac{M^2-1}{12} d^2 \delta[k]$$

09/10/2006

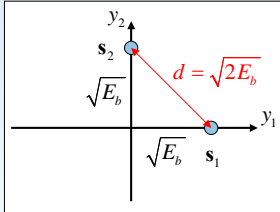
COM II

T3-10

*Ejemplos de cálculos de momentos con modulaciones PM*  
(III)

- Modulaciones sin memoria con  $L=2$ : 2PPM

$$2\text{PPM: } \varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right), \varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right); L = 2$$



$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix}$$

$$E_s = E_b = \frac{1}{2} d^2$$

- Cálculo del vector media:

$$\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{s}_m] = \sum_{m=1}^2 \Pr\{\mathbf{s}_m\} \mathbf{s}_m = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \mathbf{s}_m = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{E_b}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{E_b}}{2} \mathbf{1}_L$$

09/10/2006

COM II

T3-11

*Ejemplos de cálculos de momentos con modulaciones PM*  
(IV)

- Modulaciones sin memoria con  $L=2$ : 2PPM: Cálculo de la matriz de covarianza

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\sqrt{E_b}}{2} \mathbf{1}_L$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}[0] &= E[\mathbf{s}_m \mathbf{s}_m^T] = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \mathbf{s}_m \mathbf{s}_m^T = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{E_b} \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{E_b}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{E_b}{2} \mathbf{I}_L \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}[0] = \mathbf{R}[0] - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T = \frac{E_b}{2} \mathbf{I}_L - \frac{E_b}{4} \mathbf{1}_{L \times L}$$

09/10/2006

COM II

T3-12

### Potencia media y densidad espectral de potencia

- Empezaremos calculando la media estadística de la señal transmitida:

$$\begin{aligned}\mu_s(t) &= E[s(t)] = E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_l[n] \varphi_l(t-nT)\right] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L E[\alpha_l[n]] \varphi_l(t-nT) = \sum_{l=1}^L \left[ \mu_{\alpha_l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_l(t-nT) \right]\end{aligned}$$

- La media es periódica de periodo  $T$ :

$$E[s(t)] = E[s(t+nT)]$$

el proceso  $s(t)$  es cicloestacionario en media

09/10/2006

COM II

T3-13

### Potencia media y densidad espectral de potencia (II)

- A continuación se calcula la función de correlación de la señal transmitida:

$$\begin{aligned}R_s(t+\tau, t) &= E[s(t+\tau)s(t)] = \\ &E\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_l[m] \varphi_l(t+\tau-mT) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^L \alpha_j[n] \varphi_j(t-nT)\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j}[m-n] \varphi_l(t+\tau-mT) \varphi_j(t-nT)\end{aligned}$$

- Donde se ha tenido en cuenta que las coordenadas de los símbolos son procesos discretos estacionarios. Tomando:  $k=m-n$  resulta:

$$R_s(t+\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j}[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_l(t+\tau-(n+k)T) \varphi_j(t-nT)$$

09/10/2006

COM II

T3-14

### Potencia media y densidad espectral de potencia (III)

- Definiendo:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_l(t + \tau - (n+k)T) \varphi_j(t - nT) = \varphi_l(t + \tau - kT) \varphi_j(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

- Podemos observar que:

$$f(t) = f(t - mT)$$

- Por tanto la función de autocorrelación también es periódica en  $t$  con periodo  $T$ :

$$R_s(t + \tau, t) = R_s(t + mT + \tau, t + mT)$$

- Lo que indica que la señal transmitida es cicloestacionaria en correlación

09/10/2006

COM II

T3-15

### Potencia media y densidad espectral de potencia (IV)

- Para proceder al cálculo de la densidad espectral, dado que  $s(t)$  es cicloestacionario, utilizaremos el Teorema de Wiener-Khinchin [p. 179 Proakis-Salehi]. Como paso previo calculamos la media temporal en un periodo de la función de autocorrelación:

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_T R_s(t + \tau, t) dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j}[k] \int_T f(t) dt$$

- En el cálculo del promedio de la función  $f(t)$  se tendrá en cuenta que se trata en un sumatorio infinito de integrales con periodos de integración continuos y no solapados del mismo integrando:

$$\begin{aligned} \int_T f(t) dt &= \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_l(t + \tau - (n+k)T) \varphi_j(t - nT) dt = \\ &= \sum_{\lambda=t-nT}^{+\infty} \int_{-nT}^{(1-n)T} \varphi_l(\lambda + \tau - kT) \varphi_j(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

09/10/2006

COM II

T3-16



### Potencia media y densidad espectral de potencia (V)

- Dado que el integrando en la expresión anterior no depende de  $n$ , se obtiene:

$$\int_T f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_l(\lambda + \tau - kT) \varphi_j(\lambda) d\lambda = R_{\varphi_l \varphi_j}(\tau - kT)$$

- Lo que nos permite expresar el promedio de la función de correlación como:

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j}[k] R_{\varphi_l \varphi_j}(\tau - kT)$$

- Puede observarse que la expresión resultante para la autocorrelación promediada del proceso  $s(t)$ , depende de las correlaciones cruzadas entre las  $L$  secuencias de coordenadas (procesos discretos) y de las correlaciones cruzadas entre las  $L$  funciones de la base (señales deterministas de energía finita).

09/10/2006

COM II

T3-17

### Potencia media y densidad espectral de potencia (VI)

- Una vez calculado el promedio de la función de correlación, podemos calcular la potencia media:

$$P_s = \hat{R}_s(0) = \frac{1}{T} \int_0^T R_s(t, t) dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j}[k] R_{\varphi_l \varphi_j}[-kT] =$$

$$\left[ R_{\varphi_l \varphi_j}[-kT] = 0 \begin{cases} l \neq j \\ k \neq 0 \end{cases} \text{ ó } \right] = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^L R_{\alpha_l \alpha_l}[0] = \frac{E_s}{T} = \frac{E_b}{T_b}$$

- En donde se ha utilizado:

$$E_s = \sum_{m=1}^M \Pr\{\mathbf{s}_m\} E_m = \sum_{m=1}^M \Pr\{\mathbf{s}_m\} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}^2 =$$

$$= \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \Pr\{\mathbf{s}_m\} \alpha_{ml}^2 = \sum_{l=1}^L R_{\alpha_l \alpha_l}[0]$$

09/10/2006

COM II

T3-18

### Potencia media y densidad espectral de potencia (VII)

- El Teorema de Wiener-Khinchin establece que para un proceso cicloestacionario la densidad espectral puede expresarse como la Transformada de Fourier del promedio de la función de correlación:

$$S_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T R_s(t+\tau, t) dt e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

– Resultando:

$$\begin{aligned} S_s(f) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j} [k] R_{\phi_l \phi_j}(\tau - kT) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j} [k] \int_{-\infty}^{\infty} R_{\phi_l \phi_j}(\tau - kT) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \stackrel{\alpha=\tau-kT}{=} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_{\alpha_l \alpha_j} [k] e^{-j2\pi f kT} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\phi_l \phi_j}(\alpha) e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L S_{\alpha_l \alpha_j}(fT) S_{\phi_l \phi_j}(f) \end{aligned}$$

09/10/2006

COM II

T3-19

### Potencia media y densidad espectral de potencia (VIII)

- Obteniéndose la expresión:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L S_{\phi_l \phi_j}(f) S_{\alpha_l \alpha_j}(fT)$$

– Las funciones de la base son deterministas:

$$S_{\phi_l \phi_j}(f) = \Phi_l(f) \Phi_j^*(f)$$

– Utilizando la expresión de las covarianzas de las secuencias de coordenadas la densidad espectral resulta en la suma de dos términos:

Deltas espectrales

$$\begin{aligned} S_s(f) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L C_{\alpha_l \alpha_j} [k] \Phi_l(f) \Phi_j^*(f) \exp(-jk2\pi fT) + \\ &+ \frac{1}{T^2} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_{\alpha_l} \mu_{\alpha_j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_l\left(\frac{k}{T}\right) \Phi_j^*\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$

09/10/2006

COM II

T3-20

### Ejemplos de densidades espectrales para $L=1$

- Las expresiones calculadas anteriormente se simplifican en gran medida en el caso  $L=1$ .

- La función de correlación de la señal transmitida resulta:

$$\begin{aligned} R_s(t+\tau, t) &= E[s(t+\tau)s(t)] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{\alpha\alpha}[m-n] \varphi(t+\tau-mT) \varphi(t-nT) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{\alpha\alpha}[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(t+\tau-(n+k)T) \varphi(t-nT) \end{aligned}$$

- Su correlación promediada:

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{\alpha\alpha}[k] R_{\varphi\varphi}(\tau-kT)$$

09/10/2006

COM II

T3-21

### Ejemplos de densidades espectrales para $L=1$ (II)

- Realizando su Transformada de Fourier se obtiene la densidad espectral de potencia:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{\alpha\alpha}[k] |\Phi(f)|^2 \exp(-j2\pi fkT)$$

- Expresada en función de la covarianza de los símbolos:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{\alpha\alpha}[k] |\Phi(f)|^2 \exp(-j2\pi fkT) + \frac{1}{T^2} |\mu_{\alpha}|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\Phi(\frac{k}{T})|^2 \delta(f - \frac{k}{T})$$

09/10/2006

COM II

T3-22

### Ejemplos de densidades espectrales para $L=1$ (III)

- Modulación 2PAM (bits equiprobables)
  - Propiedades de la secuencia de coordenadas (Polar):

$$\mu_\alpha = 0 \quad ; \quad R_\alpha[k] = \frac{d^2}{4} \delta[k] = E_b \delta[k]$$

- Propiedades de la función base:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

$$\Phi(f) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\text{sen}(\pi f T)}{\pi f} \exp(-j\pi f T) = \sqrt{T} \text{sinc}(fT) \exp(-j\pi f T)$$

- En donde se ha definido:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$$

09/10/2006

COM II

T3-23

### Ejemplos de densidades espectrales para $L=1$ (IV)

- Modulación 2PAM (bits equiprobables)
  - Su función de correlación promediada resulta:

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{\alpha\alpha}[k] R_{\varphi\varphi}(\tau - kT) = \frac{E_b}{T} R_{\varphi\varphi}(\tau)$$

- Mientras que su densidad espectral:

$$S_s(f) = E_b \text{sinc}^2(fT) = E_b \text{sinc}^2(fT_b)$$

09/10/2006

COM II

T3-24

### Ejemplos de densidades espectrales para $L=1$ (V)

- Modulación 2PAM (bits equiprobables): Comparación con el caso de utilizar pulsos con retorno a cero (RZ)
  - En este caso su función base es:

$$\varphi_{RZ}(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right) ; \Phi_{RZ}(f) = \sqrt{T/2} \operatorname{sinc}(fT/2) \exp(-j\pi fT/2)$$

- Por lo que su densidad espectral resulta:

$$S_s(f) = \frac{E_b}{2} \operatorname{sinc}^2(fT_b/2)$$

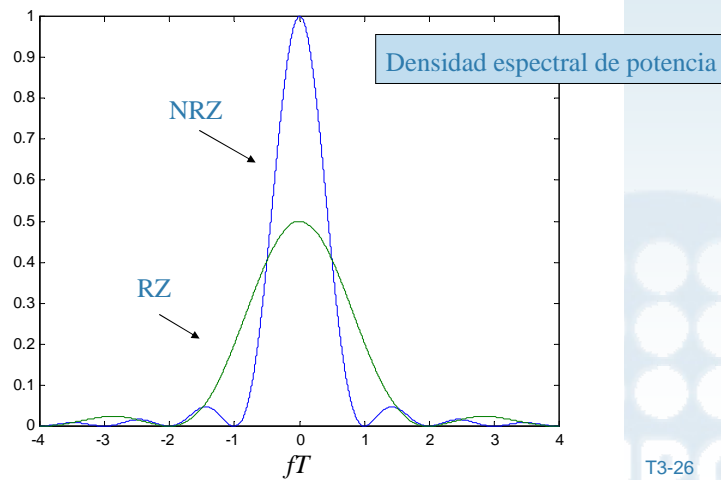
09/10/2006

COM II

T3-25

### Ejemplos de densidades espectrales para $L=1$ (VI)

- Modulación 2PAM (bits equiprobables): Comparación entre NRZ y RZ



09/10/2

T3-26

### Ejemplos de densidades espectrales para $L=1$ (VII)

- Modulación 2PAM Unipolar (bits equiprobables)

$$\mathbf{s}_1 = \sqrt{2E_b} = d \quad ; \quad \mathbf{s}_2 = 0 \quad ; \quad E_s = E_b = \frac{1}{2}d^2$$

- Propiedades de la secuencia de coordenadas (Unipolar):

$$\mu_\alpha = \frac{d}{2} \quad ; \quad R_\alpha[k] = \frac{d^2}{4}\delta[k] + \mu_\alpha^2 = \frac{E_b}{2}\delta[k] + \frac{E_b}{2} \quad ; \quad C_\alpha[k] = \frac{E_b}{2}\delta[k]$$

- Las función base pueden ser con o sin retorno a cero (NRZ, RZ):

$$\varphi_{NRZ}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \quad ; \quad \Phi_{NRZ}(f) = \sqrt{T} \operatorname{sinc}(fT) \exp(-j\pi fT)$$

$$\varphi_{RZ}(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}}\Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right) \quad ; \quad \Phi_{RZ}(f) = \sqrt{T/2} \operatorname{sinc}(fT/2) \exp(-j\pi fT/2)$$

09/10/2006

COM II

T3-27

### Ejemplos de densidades espectrales para $L=1$ (VIII)

- Modulación 2PAM Unipolar (bits equiprobables)

- Densidad espectral de potencia resulta:

$$NRZ : S_s(f) = \frac{E_b}{2} \frac{1}{T} \left| \frac{\operatorname{sen}(\pi fT)}{\sqrt{T}\pi f} \right|^2 + \frac{1}{T^2} \frac{E_b}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}(\pi k)}{\sqrt{T}\pi k/T} \right|^2 \delta(f - kr) =$$

$$\frac{E_b}{2} \left| \operatorname{sinc}(fT) \right|^2 + \frac{1}{T} \frac{E_b}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \operatorname{sinc}(k) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{E_b}{2} \operatorname{sinc}^2(fT) + \frac{1}{T} \frac{E_b}{2} \delta(f)$$

Delta

$$RZ : S_s(f) = \frac{E_b}{2} \frac{1}{T} \left| \frac{\operatorname{sen}(\pi fT/2)}{\sqrt{T/2}\pi f} \right|^2 + \frac{1}{T^2} \frac{E_b}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}(\pi k/2)}{\sqrt{T/2}\pi k/T} \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) =$$

$$\frac{E_b}{4} \operatorname{sinc}^2\left(f \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{T} \frac{E_b}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Secuencia de deltas (en el origen y para valores impares de k)

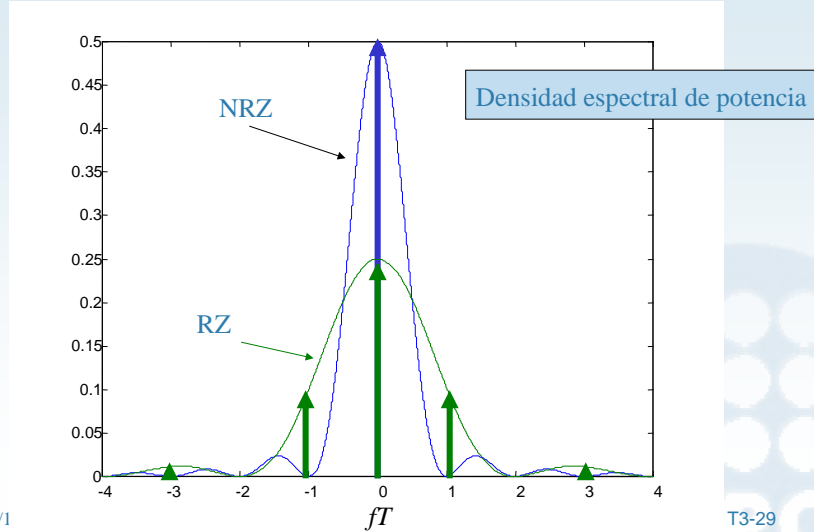
09/10/2006

COM II

T3-28

### Ejemplos de densidades espectrales para $L=1$ (IX)

- Modulación 2PAM Unipolar (bits equiprobables)



09/1

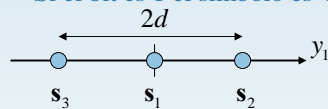
T3-29

### Ejemplos de modulaciones con memoria

- Modulaciones 2PAM Bipolar ( $L=1$ )

$$\text{PAM: } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

- Cuando el bit a transmitir es 0 entonces el símbolo también lo es.  
Si el bit es 1 el símbolo es  $+d$  o  $-d$  de forma alternada (memoria):



$$\mathbf{s}_1 = 0 ; \Pr\{\mathbf{s}_1\} = 1/2$$

$$\mathbf{s}_2 = d ; \Pr\{\mathbf{s}_2\} = 1/4$$

$$\mathbf{s}_3 = -d ; \Pr\{\mathbf{s}_3\} = 1/4$$

- Cálculo de la media

$$\mu_\alpha = \sum_{m=1}^3 \Pr\{\mathbf{s}_m\} \mathbf{s}_m = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot d + \frac{1}{4} \cdot (-d) = 0$$

- Cálculo de la autocorrelación en el origen:

$$R_{\alpha\alpha}[0]_{\alpha \text{ estacionarios}} = \sum_{m=1}^3 \Pr\{\mathbf{s}_m\} \alpha_m^2 = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot d^2 + \frac{1}{4} \cdot d^2 = \frac{1}{2} d^2 = E_b$$

09/10/2006

COM II

T3-30

### Ejemplos de modulaciones con memoria (II)

- Modulaciones 2PAM Bipolar ( $L=1$ )
  - Cálculo de la autocorrelación de las coordenadas para  $k=1$ :

$$\begin{aligned}
 R_{\alpha\alpha}[1] &= E[\alpha[n+1]\alpha[n]] = \sum_{m[n+1]=1}^3 \sum_{m[n]=1}^3 \Pr\{\mathbf{s}_{m[n+1]}, \mathbf{s}_{m[n]}\} \alpha_m[n+1] \alpha_m[n] = \\
 &= \sum_{m[n+1]=1}^3 \Pr\{\mathbf{s}_{m[n+1]}, \mathbf{s}_{1[n]}\} \alpha_m[n+1] \alpha_1[n] + \\
 &+ \sum_{m[n+1]=1}^3 \Pr\{\mathbf{s}_{m[n+1]}, \mathbf{s}_{2[n]}\} \alpha_m[n+1] \alpha_2[n] + \\
 &+ \sum_{m[n+1]=1}^3 \Pr\{\mathbf{s}_{m[n+1]}, \mathbf{s}_{3[n]}\} \alpha_m[n+1] \alpha_3[n]
 \end{aligned}$$

09/10/2006

COM II

T3-31

### Ejemplos de modulaciones con memoria (III)

- Desarrollando los sumatorios:

$$\begin{aligned}
 R_{\alpha\alpha}[1] &= \\
 &= \Pr\{\mathbf{s}_{1[n+1]}, \mathbf{s}_{1[n]}\} 0 \times 0 + \Pr\{\mathbf{s}_{2[n+1]}, \mathbf{s}_{1[n]}\} d \times 0 + \Pr\{\mathbf{s}_{3[n+1]}, \mathbf{s}_{1[n]}\} (-d) \times 0 + \\
 &+ \Pr\{\mathbf{s}_{1[n+1]}, \mathbf{s}_{2[n]}\} 0 \times d + \Pr\{\mathbf{s}_{2[n+1]}, \mathbf{s}_{2[n]}\} d \times d + \Pr\{\mathbf{s}_{3[n+1]}, \mathbf{s}_{2[n]}\} (-d) \times d + \\
 &+ \Pr\{\mathbf{s}_{1[n+1]}, \mathbf{s}_{3[n]}\} 0 \times (-d) + \Pr\{\mathbf{s}_{2[n+1]}, \mathbf{s}_{3[n]}\} d \times (-d) + \Pr\{\mathbf{s}_{3[n+1]}, \mathbf{s}_{3[n]}\} (-d) \times (-d) = \\
 &= \Pr\{\mathbf{s}_{3[n+1]}, \mathbf{s}_{2[n]}\} (-d^2) + \Pr\{\mathbf{s}_{2[n+1]}, \mathbf{s}_{3[n]}\} (-d^2) =
 \end{aligned}$$

- Cálculo de:  $\Pr\{\mathbf{s}_{3[n+1]}, \mathbf{s}_{2[n]}\}, \Pr\{\mathbf{s}_{2[n+1]}, \mathbf{s}_{3[n]}\}$

$$\Pr\{\mathbf{s}_{3[n+1]}, \mathbf{s}_{2[n]}\} = \Pr\{\mathbf{s}_{2[n]}\} \Pr\{\mathbf{s}_{3[n+1]} | \mathbf{s}_{2[n]}\} = \frac{1}{4} \Pr\{b[n+1]=1\} = \frac{1}{4} \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\Pr\{\mathbf{s}_{2[n+1]}, \mathbf{s}_{3[n]}\} = \Pr\{\mathbf{s}_{3[n]}\} \Pr\{\mathbf{s}_{2[n+1]} | \mathbf{s}_{3[n]}\} = \frac{1}{4} \Pr\{b[n+1]=1\} = \frac{1}{4} \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

09/10/2006

COM II

T3-32



### Ejemplos de modulaciones con memoria (IV)

- Resultando:

$$R_{\alpha\alpha}[1] = -\frac{d^2}{8} - \frac{d^2}{8} = -\frac{d^2}{4} = -\frac{1}{2}E_b$$

- Siguiendo un cálculo análogo se obtiene:

$$R_{\alpha\alpha}[-1] = R_{\alpha\alpha}[1] = -\frac{1}{2}E_b$$

- Puede demostrarse además:

$$R_{\alpha\alpha}[k] = 0 \quad ; \quad |k| > 1$$

09/10/2006

COM II

T3-33

### Ejemplos de modulaciones con memoria (V)

- Densidad espectral de Modulaciones 2PAM Bipolar o AMI.
  - Valores estadísticos de sus coordenadas:

$$\mu_{\alpha} = 0 \quad ; \quad R_{\alpha\alpha}[k] = \begin{cases} \frac{d^2}{2} = E_b & k = 0 \\ -\frac{d^2}{4} = -\frac{1}{2}E_b & k = \pm 1 \\ 0 & |k| > 1 \end{cases}$$

- Utilizando la función base sin retorno a cero:

$$\varphi_{NRZ}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \quad ; \quad \Phi_{NRZ}(f) = \sqrt{T} \operatorname{sinc}(fT) \exp(-j\pi fT)$$

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{\alpha\alpha}[k] |\Phi(f)|^2 \exp(-j2\pi fkT)$$

09/10/2006

COM II

T3-34

### Ejemplos de modulaciones con memoria (VI)

- Densidad espectral de Modulaciones 2PAM Bipolar o AMI.
  - Cálculo de la densidad espectral, utilizando la expresión de la T3-22:

$$\begin{aligned} S_s(f) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_\alpha[k] |\Phi(f)|^2 \exp(-j2\pi fkT) = \\ &= \frac{1}{T} E_b T \operatorname{sinc}^2(fT) \left( -\frac{1}{2} \exp(-j2\pi fT) + 1 - \frac{1}{2} \exp(j2\pi fT) \right) \\ &= E_b \operatorname{sinc}^2(fT) (1 - \cos(2\pi fT)) = 2E_b \operatorname{sinc}^2(fT) \operatorname{sen}^2(\pi fT) \end{aligned}$$

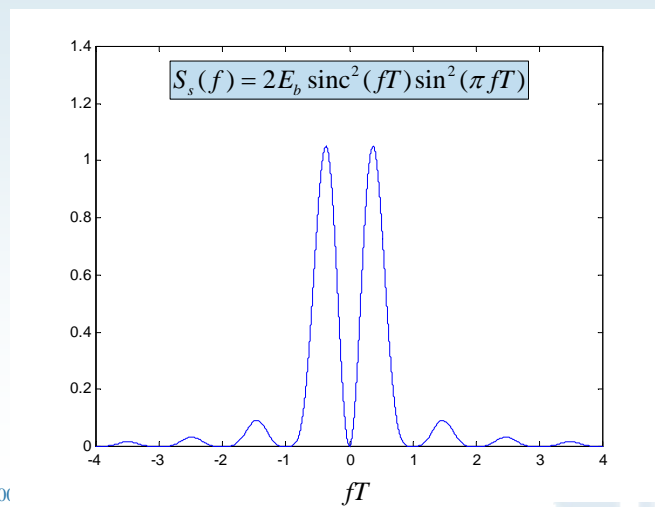
09/10/2006

COM II

T3-35

### Ejemplos de modulaciones con memoria (VII)

- Densidad espectral de Modulaciones 2PAM Bipolar o AMI



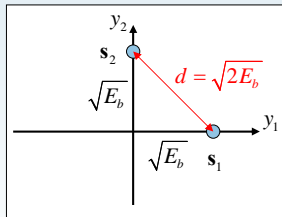
09/10/2006

T3-36

### Ejemplos de densidades espectrales para $L=2$

- Modulaciones sin memoria con  $L=2$ : 2PPM

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right) ; \Phi_1(f) = \sqrt{T/2} \operatorname{sinc}(fT/2) \exp(-j\pi fT/2) \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{T/2}} \Pi\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right) ; \Phi_2(f) = \sqrt{T/2} \operatorname{sinc}(fT/2) \exp(-j\pi f3T/2) \end{aligned}$$



$$E_s = E_b = \frac{1}{2} d^2$$

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{E_b} \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_b} \end{pmatrix}$$

– Vimos:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\sqrt{E_b}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{E_b}}{2} \mathbf{1}_L$$

$$\mathbf{C}[0] = \mathbf{R}[0] - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T = \frac{E_b}{2} \mathbf{I}_L - \frac{E_b}{4} \mathbf{1}_{L \times L}$$

09/10/2006

COM II

T3-37

### Ejemplos de densidades espectrales para $L=2$ (II)

- Modulaciones sin memoria con  $L=2$ : 2PPM

– La expresión general de la densidad espectral es:

$$\begin{aligned} S_s(f) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L C_{\alpha_l \alpha_j} [k] \Phi_l(f) \Phi_j^*(f) \exp(-jk2\pi fT) + \\ &+ \frac{1}{T^2} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_{\alpha_l} \mu_{\alpha_j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_l\left(\frac{k}{T}\right) \Phi_j^*\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$

– En el caso de modulaciones sin memoria resulta:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L C_{\alpha_l \alpha_j} [0] \Phi_l(f) \Phi_j^*(f) + \frac{1}{T^2} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_{\alpha_l} \mu_{\alpha_j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_l\left(\frac{k}{T}\right) \Phi_j^*\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

09/10/2006

COM II

T3-38

### Ejemplos de densidades espectrales para L=2 (III)

- Modulaciones sin memoria con L=2: 2PPM

– En este caso:

$$\Phi_1(f)\Phi_1^*(f) = \frac{T}{2} \text{sinc}^2(fT/2)$$

$$\Phi_1(f)\Phi_2^*(f) = \frac{T}{2} \text{sinc}^2(fT/2) \exp(-j\pi fT)$$

$$\Phi_2(f)\Phi_2^*(f) = \frac{T}{2} \text{sinc}^2(fT/2)$$

$$\Phi_1(\frac{k}{T})\Phi_2^*(\frac{k}{T}) = \Phi_2(\frac{k}{T})\Phi_1^*(\frac{k}{T}) = \frac{T}{2} \text{sinc}^2(k/2)(-1)^k$$

$$\begin{aligned} S_s(f) &= \frac{1}{T} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L C_{\alpha_l \alpha_j} [0] \Phi_l(f) \Phi_j^*(f) + \frac{1}{T^2} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_{\alpha_l} \mu_{\alpha_j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_l(\frac{k}{T}) \Phi_j^*(\frac{k}{T}) \delta(f - \frac{k}{T}) = \\ &= S_s^c(f) + S_s^\delta(f): \text{Espectro continuo + deltas espectrales} \end{aligned}$$

09/10/2006

COM II

T3-39

### Ejemplos de densidades espectrales para L=2 (IV)

- Cálculo del espectro continuo:

$$\begin{aligned} S_s^c(f) &= \frac{1}{T} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L C_{\alpha_l \alpha_j} [0] \Phi_l(f) \Phi_j^*(f) = \\ &= \frac{E_b}{4T} \frac{T}{2} \text{sinc}^2(fT/2) [1 - \exp(-j\pi fT) + 1 - \exp(j\pi fT)] = \\ &= \frac{E_b}{2} \text{sinc}^2(fT/2) \text{sen}^2(\pi fT/2) \end{aligned}$$

- Cálculo de las deltas espectrales:

$$\begin{aligned} S_s^\delta(f) &= \frac{1}{T^2} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_{\alpha_l} \mu_{\alpha_j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_l(\frac{k}{T}) \Phi_j^*(\frac{k}{T}) \delta(f - \frac{k}{T}) = \\ &= \frac{1}{T^2} \frac{E_b}{4} \left[ 4 \frac{T}{2} \delta(f) + \frac{T}{2} \text{sinc}^2(\frac{1}{2})(1 + 1 - \cancel{1 - 1}) \delta(f - \frac{k}{T}) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{T} \frac{E_b}{2} \delta(f) \end{aligned}$$

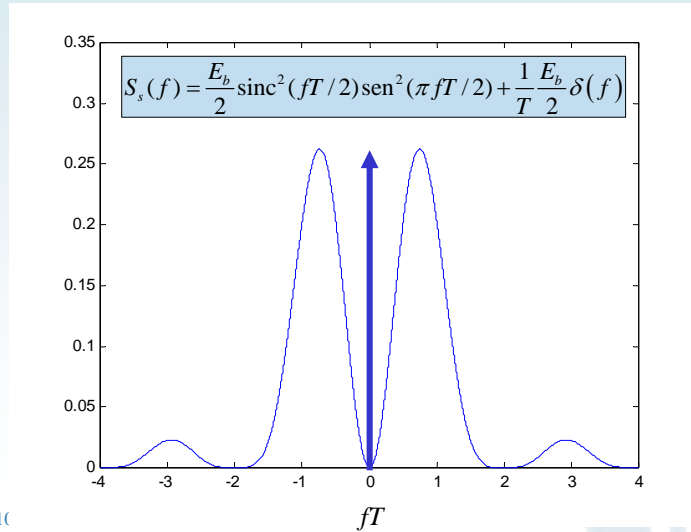
09/10/2006

COM II

T3-40

### Ejemplos de densidades espectrales para $L=2$ (V)

- Densidad espectral de Modulaciones 2PPM



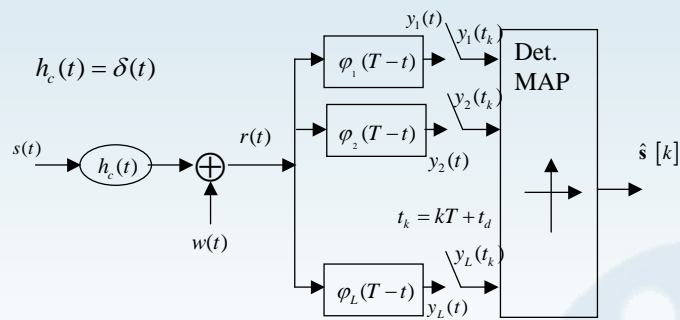
09/10

T3-41

### 3.2 Interferencia Inter-simbólica: ISI

#### Introducción: Canal Ideal

- Estructura del receptor óptimo MAP para canal ideal



$$r(t) = s(t) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m[n]}(t - nT) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} [n] \varphi_l(t - nT) + w(t)$$

09/10/2006

COM II

T3-42

### Introducción: Canal Ideal (II)

- A la salida de cada uno de los filtros adaptados a las funciones de la base se tiene:

$$y_j(t) = (s(t) + w(t)) * \varphi_j(T-t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} [n] \varphi_l(t-nT) * \varphi_j(T-t) + w(t) * \varphi_j(T-t) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} [n] R_{\varphi_l \varphi_j}(t - (n+1)T) + \beta_j(t)$$

- En donde se ha utilizado:

$$\varphi_l(t-nT) * \varphi_j(T-t) = \varphi_l(t) * \varphi_j(-t) * \delta(t-nT) * \delta(t-T) =$$

$$= R_{\varphi_l \varphi_j}(t) * \delta(t - (n+1)T) = R_{\varphi_l \varphi_j}(t - (n+1)T)$$

09/10/2006

COM II

T3-43

### Introducción: Canal Ideal (III)

- Muestreando las salidas de los filtros adaptados en los instantes:

$$t_k = (k+1)T$$

$$y_j(t_k) = y_j[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} [n] R_{\varphi_l \varphi_j}((k-n)T) + \beta_j(t_k) = \alpha_{mj}[k] + \beta_j[k]$$

- En donde se ha utilizado:

$$R_{\varphi_j \varphi_l}((k-n)T) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j((k-n)T + \lambda) \varphi_l(\lambda) d\lambda = \delta[j-l] \delta[k-n] \Rightarrow \begin{cases} R_{\varphi_l \varphi_l}(nT) = \delta[n] \\ R_{\varphi_j \varphi_l}(nT) = 0 \quad ; \quad j \neq l \end{cases}$$

- En notación vectorial:

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{s}_m[k] + \mathbf{n}[k]$$

09/10/2006

COM II

T3-44

### Caso de canal no ideal con $L=1$

- En este caso, la señal recibida resulta:

$$r(t) = s(t) * h_c(t) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m1}[n] \varphi_1(t-nT) * h_c(t) + w(t)$$

- Mientras que la salida del filtro adaptado es:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (s(t) * h_c(t) + w(t)) * \varphi_1(T-t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m1}[n] \varphi_1(t-nT) * \varphi_1(T-t) * h_c(t) + w(t) * \varphi_1(T-t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m1}[n] R_{\varphi_1\varphi_1}(t-(n+1)T) * h_c(t) + \beta_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m1}[n] p_{11}(t-nT) + \beta_1(t) \end{aligned}$$

- Donde se ha definido:

$$p_{ij}(t) = R_{\varphi_i\varphi_j}(t-T) * h_c(t)$$

09/10/2006

COM II

T3-45

### Caso de canal no ideal con $L=1$ (II)

- Definiendo el instante de muestreo:  $t_k = t_d + kT$

$$\begin{aligned} y_1(t_k) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m1}[n] p_{11}(t_k - nT) + \beta_1(t_k) = \\ &= \alpha_{m1}[k] p_{11}(t_d) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{+\infty} \alpha_{m1}[n] p_{11}(t_d - (n-k)T) + \beta_1(t_k) \end{aligned}$$

Señal útil

Intersymbol Interference (ISI)

Ruido

- Para canal causal de duración  $L_c T$  la expresión anterior resulta:

$$y[k] = y_1(t_k) = \sum_{n=k-L_c}^{k+L_c} \alpha_{m1}[n] p_{11}(t_d - (n-k)T) + \beta_1(t_k) = \alpha_{m1}[k] * p_{11}[k] + \beta_1[k]$$

- Donde se ha definido:

$$p_{ji}[k] \triangleq p_{ji}(t_d + kT) \quad ; \quad (\text{para canal ideal } t_d = T, p_{ji}[k] = \delta[j-l]\delta[k])$$

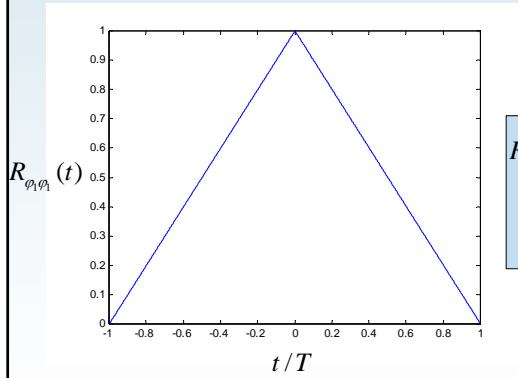
09/10/2006

COM II

T3-46

### Caso de canal no ideal con $L=1$ (III)

- Ejemplos: Función base rectangular  $\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$



$$R_{\varphi_1\varphi_1}(t) = \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) * \Pi\left(\frac{-t-T/2}{T}\right) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

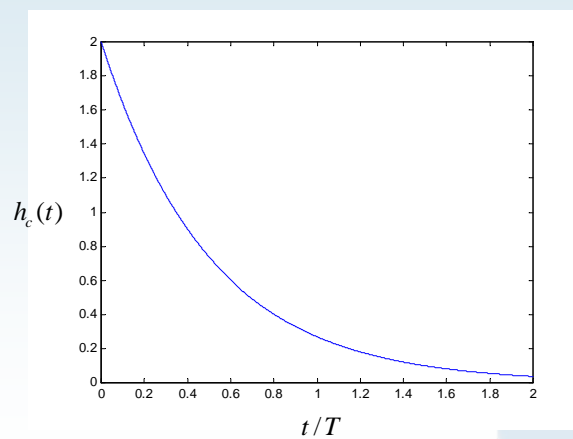
09/10/2006

COM II

T3-47

### Caso de canal no ideal con $L=1$ (IV)

- Ejemplos: Canal exponencial  $h_c(t) = 2 \exp(-2t/T) u(t)$



09/10/2006

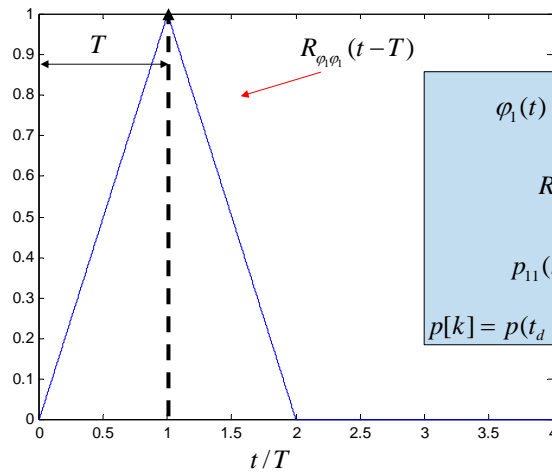
COM II

T3-48



### Caso de canal no ideal con $L=1$ (V)

- Ejemplos: Función base rectangular y canal exponencial



$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

$$R_{\varphi_1\varphi_1}(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$p_{11}(t) = p(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$p[k] = p(t_d + kT) = p(T + kT) = \delta[k]$$

09/10/2006

COM II

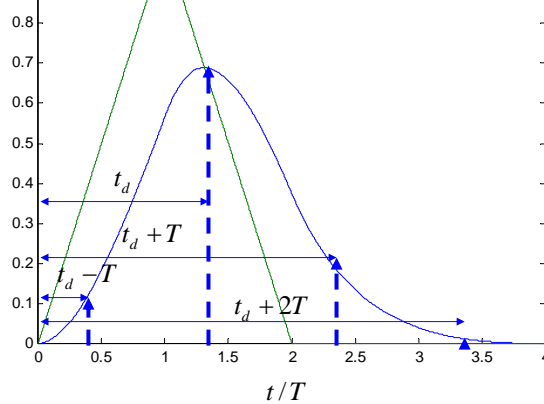
T3-49

### Caso de canal no ideal con $L=1$ (VI)

- Ejemplos: Función base rectangular y canal exponencial

$$p[k] = p(t_d + kT) =$$

$$= p_{-1}\delta[k+1] + p_{MAX}\delta[k] + p_1\delta[k-1] + p_2\delta[k-2]$$



$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

$$R_{\varphi_1\varphi_1}(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$h_c(t) = 2 \exp(-2t/T) u(t)$$

$$p(t) = R_{\varphi_1\varphi_1}(t-T) * h_c(t)$$

09/10/2006

COM II

T3-50

### Caso de canal no ideal con $L=1$ (VII)

- Ejemplos: Función base rectangular y canal exponencial
  - Canal discreto equivalente:

$$p[k] = p_{-1}\delta[k+1] + p_{MAX}\delta[k] + p_1\delta[k-1] + p_2\delta[k-2]$$

- Expresión de la señal recibida:

$$\begin{aligned} y[k] &= \alpha_m[k] * p[k] + \beta[k] = \\ &= p_{-1}\alpha_m[k+1] + p_{MAX}\alpha_m[k] + p_1\alpha_m[k-1] + p_2\alpha_m[k-2] + \beta[k] = \\ &= p_{-1}s_m[k+1] + p_{MAX}s_m[k] + p_1s_m[k-1] + p_2s_m[k-2] + \beta[k] \end{aligned}$$

- Receptor MAP?

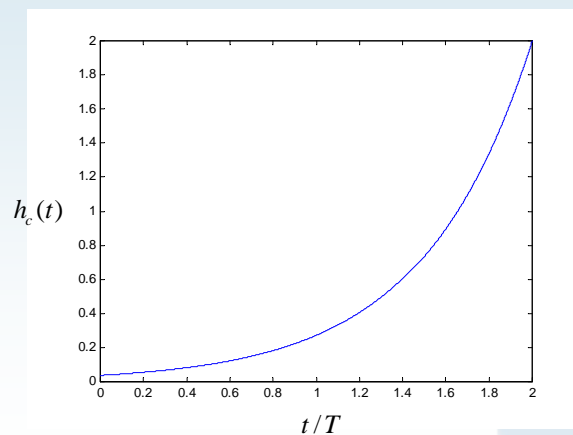
09/10/2006

COM II

T3-51

### Caso de canal no ideal con $L=1$ (VIII)

- Ejemplos: Canal exponencial invertido  $h_c(t) = 2 \exp(2(t/T - 2))u(2-t)$



09/10/2006

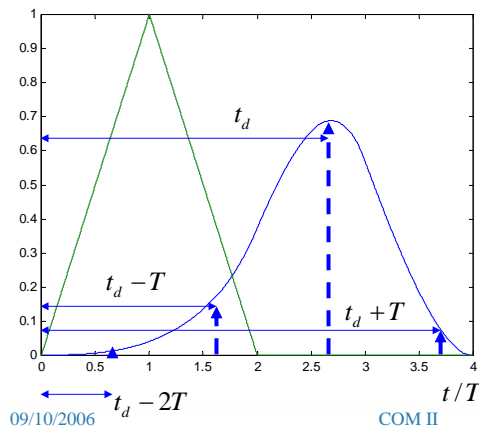
COM II

T3-52

### Caso de canal no ideal con $L=1$ (IX)

- Ejemplos: Función base rectangular y canal exponencial invertido

$$p[k] = p(t_d + kT) = p_{-2}\delta[k+2] + p_{-1}\delta[k+1] + p_{MAX}\delta[k] + p_1\delta[k-1]$$



$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

$$R_{\varphi_1\varphi_1}(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$h_c(t) = 2 \exp(2(t/T - 2)) u(2 - t)$$

$$p(t) = R_{\varphi_1\varphi_1}(t - T) * h_c(t)$$

09/10/2006

COM II

T3-53

### Caso de canal no ideal con $L>1$

- A la salida de cada uno de los filtros adaptados a las funciones de la base se tiene:

$$\begin{aligned} y_j(t) &= (s(t) * h_c(t) + w(t)) * \varphi_j(T - t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}[n] \varphi_l(t - nT) * \varphi_j(T - t) * h_c(t) + w(t) * \varphi_j(T - t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}[n] R_{\varphi_l\varphi_j}(t - (n+1)T) * h_c(t) + \beta_j(t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}[n] p_{lj}(t - nT) + \beta_j(t) \end{aligned}$$

- Definiendo el instante de muestreo:  $t_k = t_d + kT$

$$\begin{aligned} y_j(t_k) &= \sum_n \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}[n] p_{lj}(t_d - (k-n)T) + \beta_j(t_k) = \\ &= \alpha_{mj}[k] p_{jj}(t_d) + \sum_{n \neq k} \alpha_{mj}[n] p_{jj}(t_d - (k-n)T) + \sum_n \sum_{l=1, l \neq j}^L \alpha_{ml}[n] p_{lj}(t_d - (k-n)T) + \beta_j(t_k) \end{aligned}$$

Señal útil

ISI

COM II

ICI

Ruido

### Caso de canal no ideal con $L > 1$ (II)

- Utilizando notación discreta resulta

$$y_j[k] = \sum_n \sum_{l=1}^L \alpha_{ml}[n] p_{lj}[k-n] + \beta_j(t_k)$$

- Donde  $p_{jl}[k] = p_{jl}(t_d + kT)$

- De forma vectorial:

$$\mathbf{y}[k] = \sum_n \mathbf{P}[k-n] \mathbf{s}_m[n] + \mathbf{n}[k] = \mathbf{P}[k] * \mathbf{s}_m[k] + \mathbf{n}[k]$$

- Donde

$$\mathbf{P}[k] \triangleq \begin{bmatrix} p_{11}[k] & \cdots & p_{L1}[k] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1L}[k] & \cdots & p_{LL}[k] \end{bmatrix}$$

- Si el canal fuera ideal:

$$\mathbf{P}[k] \triangleq \mathbf{I} \delta[k] \Rightarrow \mathbf{y}[k] = \mathbf{s}_m[k] + \mathbf{n}[k]$$

09/10/2006

COM II

T3-55

### Formulación del criterio MAP en presencia de ISI

- Vimos un ejemplo de canal con ISI tal que:

$$y[k] = p_{-1} s_m[k+1] + p_{MAX} s_m[k] + p_1 s_m[k-1] + p_2 s_m[k-2] + \beta[k]$$

- Supongamos que tan sólo está disponible una muestra,  $y[0]$ :

$$y[0] = p_{-1} s_m[1] + p_{MAX} s_m[0] + p_1 s_m[-1] + p_2 s_m[-2] + \beta[0]$$

- En ausencia de ISI, esta muestra contenía toda la información disponible sobre el símbolo  $s_m[0]$ . Ahora cada muestra tiene contribución de más de un símbolo. Definiendo:

$$S_m \triangleq [s_m[1], s_m[0], s_m[-1], s_m[-2]]$$

- El criterio MAP (con símbolos equiprobables) equivale a:

$$\hat{S}_m = \underset{S_m}{\operatorname{argmax}} f(y[0] | S_m) = \underset{s_m[1], s_m[0], s_m[-1], s_m[-2]}{\operatorname{argmax}} f(y[0] | s_m[1], s_m[0], s_m[-1], s_m[-2])$$

09/10/2006

COM II

T3-56

### Formulación del criterio MAP en presencia de ISI (II)

- Sin embargo, condicionada al conocimiento de los símbolos transmitidos las muestras recibidas siguen siendo gaussianas de media y varianza conocidas:

$$y[0] | s_m[1], s_m[0], s_m[-1], s_m[-2] \sim N\left(p_{-1}s_m[1] + p_{MAX}s_m[0] + p_1s_m[-1] + p_2s_m[-2], \frac{N_0}{2}\right) = \\ = N\left(x[0], \frac{N_0}{2}\right) = \frac{1}{(\pi N_0)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(y[0]-x[0])^2}{N_0}\right)$$

- El criterio MAP puede aplicarse sin problemas, aunque el número de combinaciones de símbolos a calcular crece exponencialmente con la longitud de la ISI en símbolos.
- En general se dispondrán de múltiples muestras por lo que la complejidad del problema aumenta, aunque puede hacerse depender fundamentalmente de la longitud de la ISI [Proakis "Digital Communications", 4 ed., p. 251-254]

09/10/2006

COM II

T3-57

### 3.3 Pulsos de Nyquist

#### Introducción

- En esta sección se considera el diseño de funciones base (o pulsos a la salida del filtro adaptado) que no generen ISI ni ICI al transmitirse por canales limitados en banda. La limitación en banda de los pulsos hace que no sean limitados en el tiempo. Se deberán aproximar por pulsos limitados para que los filtros adaptados sean causales.
- Se considera inicialmente un canal ideal dentro de un ancho de banda  $B_c$  que introduce exclusivamente un retardo

$$p_{jl}(t) = \varphi_j(t) * \varphi_l(t_\varphi - t) * h_c(t) = R_{\varphi_j\varphi_l}(t - t_\varphi) * \delta(t - t_c) = R_{\varphi_j\varphi_l}(t) * \delta(t - t_d)$$

- La condición de ausencia de ISI e ICI se traduce en:

$$p_{jl}(t_k) = p_{jl}(t_d + kT) = R_{\varphi_j\varphi_l}(kT) = \delta[k]\delta[j-l]$$

- El retardo introducido en el filtro adaptado depende de la duración efectiva del pulso. El retardo efectivo es:

$$t_d = t_\varphi + t_c$$

09/10/2006

COM II

T3-58

### Diseño de pulsos para $L=1$

- Se define en primer lugar la versión centrada en el origen del pulso a la salida del filtro adaptado como:

$$p_R(t) = p(t + t_d) = R_{\varphi\varphi}(t)$$

- En el caso  $L=1$  no existe ICI y la condición de diseño se simplifica a:

$$p[k] = p(t_k) = p(t_d + kT) = p_R(kT) = R_{\varphi\varphi}(kT) = \delta[k]$$

$$|\Phi(f)| = 0 \quad ; \quad |f| \geq B_c$$

- La primera condición es equivalente a:

$$p_R(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_R(nT) \delta(t - nT) = \delta(t)$$

- Que tras realizar TF queda como:

$$P_R(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_R\left(f - \frac{n}{T}\right) = 1$$

09/10/2006

COM II

T3-59

### Diseño de pulsos para $L=1$ (II)

- El procedimiento a seguir para diseñar la función base es:

- Elección de  $P_R(f)$  tal que  $\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_R\left(f - \frac{n}{T}\right) = 1$

- Obtención de  $S_{\varphi\varphi}(f) = P_R(f)$

- Obtención de  $\Phi(f) = S_{\varphi\varphi}(f)^{1/2} e^{j\theta(f)}$  ;  $\theta(f)$  arbitrario

- Obtención de  $\varphi(t) = F^{-1}[\Phi(f)] = F^{-1}[P_R(f)^{1/2} e^{j\theta(f)}]$

09/10/2006

COM II

T3-60

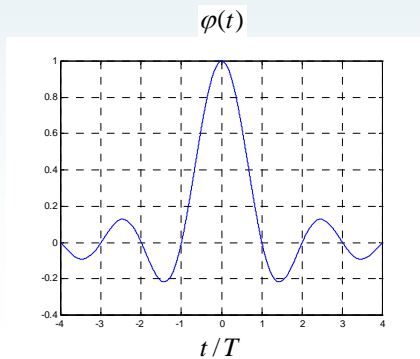
### Diseño de pulsos para $L=1(III)$

- Ejemplo:

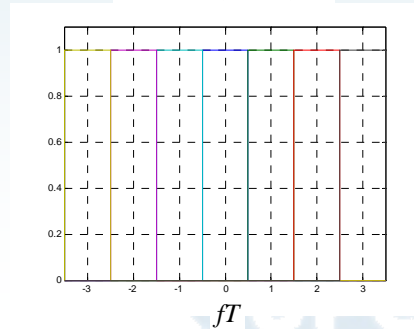
$$P_R(f) = T\Pi(fT) \Rightarrow p_R(t) = R_\varphi(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\varphi(t) = F^{-1}\left[P_R(f)^{1/2}\right] = F^{-1}\left[\sqrt{T}\Pi(fT)\right] = \frac{1}{\sqrt{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_R\left(f - \frac{n}{T}\right) = 1$$



COM II



### Diseño de pulsos para $L=1(IV)$

- Principales problemas prácticos que asociados con la utilización de esta función:

- Si se produce un pequeño error de sincronismo en los instantes de muestreo se genera una ISI que decae tan sólo como  $1/n$

$$y_1[k] = y_1(t_k + \Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] \text{sinc}((k-n) + \Delta t/T) + \beta_1(t_k)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] \frac{\text{sen}((k-n)\pi + \Delta t\pi/T)}{(k-n)\pi + \Delta t\pi/T} + \beta_1(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_1[n] \frac{(-1)^{(k-n)} \text{sen}(\Delta t\pi/T)}{(k-n)\pi + \Delta t\pi/T} + \beta_1(t_k) \approx$$

$$\approx \alpha_1[k] + \sum_{n=-\infty; n \neq k}^{+\infty} \alpha_1[n] (-1)^{(k-n)} \frac{\Delta t}{(k-n)T} + \beta_1(t_k)$$

- El diseño de los pulsos implica la implementación de filtros paso bajo ideales

$$\Phi(f) = \sqrt{T}\Pi(fT)$$

09/10/2006

COM II

T3-62

### Pulsos de coseno realzado

- Además de la función paso bajo ideal, existen otras muchas funciones limitadas en banda que cumplen la condición de ISI nula:

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_R \left( f - \frac{n}{T} \right) = 1$$

- Las más utilizadas en la práctica son las denominadas *coseno realzado* (raised cosine):

$$p_{RC}(t) = \text{sinc} \left( \frac{t}{T} \right) p_{\beta}(t) = \text{sinc} \left( \frac{t}{T} \right) \frac{\cos(2\pi\beta t)}{1 - (4\beta t)^2}$$

- Pueden interpretarse como un modelado de la función sinc con una función parametrizada por el parámetro  $\beta$  cuya transformada de Fourier es:

$$F[p_{\beta}(t)] = P_{\beta}(f) = \frac{\pi}{4\beta} \cos \left( \frac{\pi f}{4\beta} \right) \Pi \left( \frac{f}{2\beta} \right)$$

09/10/2006

COM II

T3-63

### Pulsos de coseno realzado (II)

- La transformada de Fourier de las funciones *coseno realzado* admite una expresión cerrada:

$$P_{RC}(f) = T \Pi(fT) * P_{\beta}(f) = \begin{cases} T & |f| < \frac{1}{2T} - \beta \\ T \cos^2 \left( \frac{\pi}{4\beta} \left( |f| - \frac{1}{2T} + \beta \right) \right) & \frac{1}{2T} - \beta < |f| < \frac{1}{2T} + \beta \\ 0 & \frac{1}{2T} + \beta < |f| \end{cases}$$

de forma que su ancho de banda es:

$$B_{RC} = \frac{1}{2T} + \beta = \frac{1}{2T} (1 + \alpha)$$

en donde se ha definido el factor de *roll-off* o exceso de ancho de banda normalizado  $\alpha$  (que suele indicarse en tanto por ciento)

09/10/2006

COM II

T3-64



### Pulsos de coseno realzado (III)

- El caso de factor de *roll-off* igual a cero se corresponde con el pulso paso bajo ideal (con los problemas de implementación ya comentados). Sin embargo a medida que el factor de *roll-off* aumenta se consigue una característica frecuencial más suave y una respuesta temporal que se atenúa como  $1/t^3$ .
- Para un factor de *roll-off* del 100% los pulsos presentan las siguientes características:

$$p_{RC}^{100\%}(t) = \frac{\text{sen}(\pi t/T) \cos(\pi t/T)}{\pi t/T} = \frac{\text{sinc}(2t/T)}{1-(2t/T)^2}$$
$$P_{RC}^{100\%}(f) = T \cos^2\left(\frac{\pi fT}{2}\right) \Pi\left(\frac{f}{2/T}\right)$$

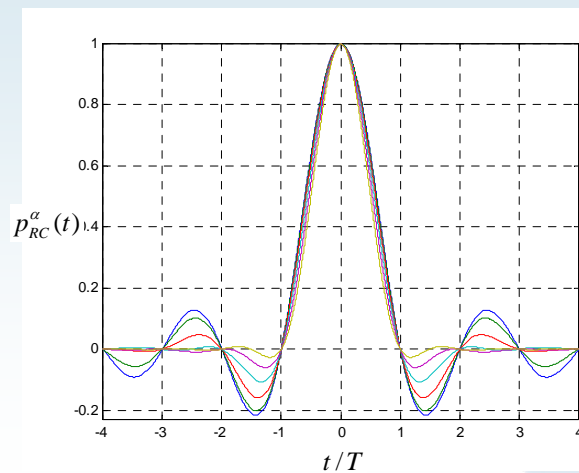
09/10/2006

COM II

T3-65

### Pulsos de coseno realzado (IV)

- Respuesta temporal de los pulsos de coseno realzado para  $\alpha=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  y  $1$



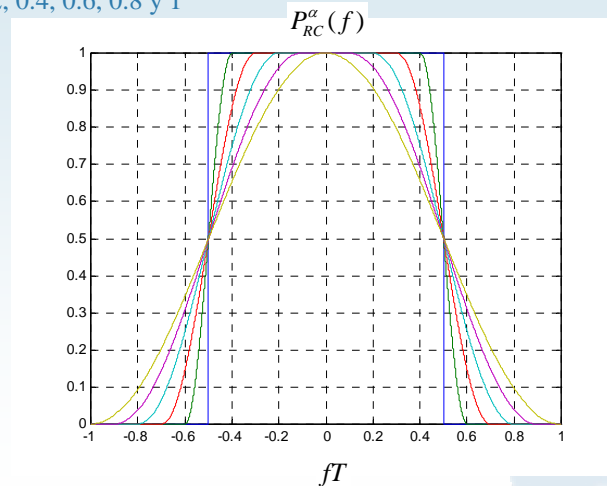
09/10/2006

COM II

T3-66

### Pulsos de coseno realzado (V)

- Respuesta frecuencial de los pulsos de coseno realzado para  $\alpha=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  y  $1$



09/10/2006

COM II

T3-67

### Pulsos de coseno realzado (VI)

- La función base correspondiente a un pulso de coseno realzado se obtiene mediante la expresión:

$$\varphi(t) = F^{-1}[\Phi(f)] = F^{-1}[P_R(f)^{1/2}]$$

- Su expresión analítica en el dominio frecuencial es por tanto:

$$\Phi_{SRRC}(f) = P_{RC}(f)^{1/2} \begin{cases} T^{1/2} & |f| < \frac{1}{2T} - \beta \\ T^{1/2} \cos\left(\frac{\pi}{4\beta}\left(|f| - \frac{1}{2T} + \beta\right)\right) & \frac{1}{2T} - \beta < |f| < \frac{1}{2T} + \beta \\ 0 & \frac{1}{2T} + \beta < |f| \end{cases}$$

– Se denomina *square root raised cosine*

09/10/2006

COM II

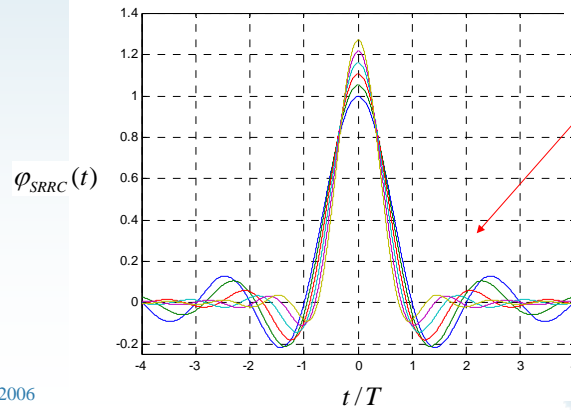
T3-68

### Pulsos de coseno realzado (VII)

- Su transformada de Fourier inversa admite una expresión analítica cerrada:

$$\varphi_{SRRC}(t) = \frac{\text{sen}(\pi t(1/T - 2\beta)) + 8\beta t \cos(\pi t(1/T + 2\beta))}{\pi t T^{-1/2} (1 - (8\beta t)^2)}$$

La señal transmitida tiene ISI aparente



09/10/2006

T3-69

### Diseño de pulsos para $L > 1$

- Se demostró que la condición de ausencia de ISI e ICI se podía expresar como:

$$R_{\varphi_j \varphi_l}(kT) = \delta[k] \delta[j - l]$$

- Esta condición es equivalente a:

$$R_{\varphi_j \varphi_l}(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{\varphi_j \varphi_l}(nT) \delta(t - nT) = \delta(t) \delta[j - l]$$

- Tomando transformada de Fourier resulta:

$$\Phi_j(f) \Phi_l^*(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_j\left(f - \frac{n}{T}\right) \Phi_l^*\left(f - \frac{n}{T}\right) = \delta[j - l]$$

09/10/2006

COM II

T3-70

### 3.4 Ecualización

#### Introducción

- En ausencia de ISI la probabilidad de error resulta idéntica a la vista en el Tema 2

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{s}_m[k] + \mathbf{n}[k]$$

con la única diferencia que las funciones que forman la base no tienen porqué estar limitadas en el tiempo (por simplicidad en el diseño del receptor MAP se suponían limitadas). Esta restricción no es necesaria mientras se satisfaga el criterio:

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_j \left( f - \frac{n}{T} \right) \Phi_l^* \left( f - \frac{n}{T} \right) = \delta[j-l]$$

- En la práctica, cierta ISI residual es inevitable y degrada las prestaciones del receptor o complica su diseño. Para  $L=1$ :

$$y[k] = s_m[k] * p[k] + \beta[k] = s_m[k] p[0] + \sum_{n \neq 0} s_m[k-n] p[n] + \beta[k]$$

- En esta sección consideraremos soluciones *subóptimas* que permiten reducir la ISI y aplicar los receptores óptimos obtenidos suponiendo que no existía ISI.

09/10/2006

COM II

T3-71

#### Introducción (II)

- Medidas de la distorsión introducida por la ISI:

$$y[k] = s_m[k] * p[k] + \beta[k] = s_m[k] p[0] + \sum_{n \neq 0} s_m[k-n] p[n] + \beta[k]$$

- Degradación de la distancia mínima:

$$d_{\min}^{ISI} = d_{\min} - 2 \max \left| \sum_{n \neq 0} s_m p[n] \right| \geq d_{\min} - 2 \max |s_m| \sum_{n \neq 0} |p[n]|$$

- Contribución de la ISI al ruido

$$\sigma_{ISI}^2 = \sigma^2 + E \left[ \sum_{n \neq 0} |s_m p[n]|^2 \right] = \sigma^2 + E_s \sum_{n \neq 0} |p[n]|^2$$

09/10/2006

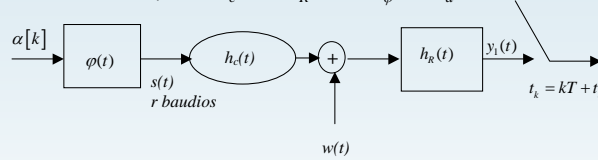
COM II

T3-72

### Introducción (III)

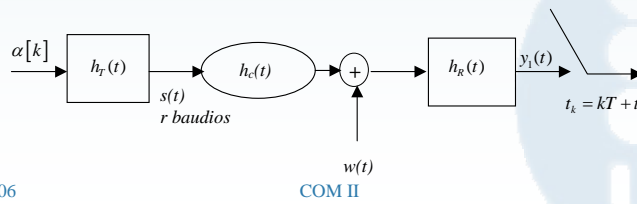
- La ecualización se puede plantear siguiendo diferentes estrategias:
  - Ecualización analógica:

$$\varphi(t) * h_c(t) * h_R(t) = R_\varphi(t - t_d)$$



- Filtros terminales óptimos analógicos:

$$h_T(t) * h_c(t) * h_R(t) = R_\varphi(t - t_d) \text{ y simultáneamente maximizar } \frac{p[0]}{\sigma}$$



09/10/2006

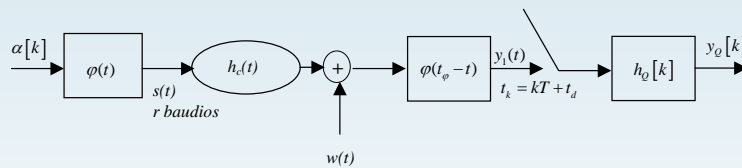
COM II

T3-73

### Introducción (IV)

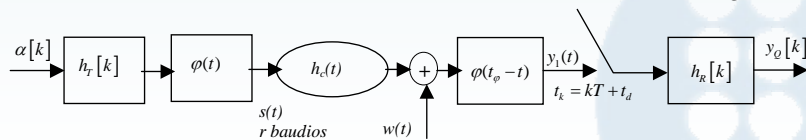
- Ecualización discreta:

$$p[k] * h_Q[k] \approx \delta[k - k_0]$$



- Filtros terminales óptimos discretos:

$$h_T[k] * p[k] * h_R[k] = \delta[k - k_0] \text{ y simultáneamente maximizar } \frac{p[0]}{\sigma}$$



09/10/2006

COM II

T3-74

### Introducción (V)

- Se considerará en primer lugar el problema de la ecualización discreta. Para ello se supondrá que el ecualizador se implementa mediante un filtro FIR del tipo:

$$h_Q[k] = \sum_{l=0}^{L_Q} h[l] \delta[k-l] \quad ; \quad y_Q[k] = \sum_{l=0}^{L_Q} h[l] y[k-l]$$

- Debe diseñarse los coeficientes y su orden.
- Se considerarán dos criterios:
  - **Forzador de ceros:** Se diseña el filtro ecualizador para minimizar:

$$\varepsilon_{ZF} = \sum_k (p[k] * h_Q[k] - \delta[k - k_0])^2$$

El nivel de ruido no se controla

- **Criterio MSE (Wiener):** Se diseña el filtro ecualizador para minimizar el error cuadrático medio entre la salida del ecualizador y la secuencia de símbolos transmitida:

$$\varepsilon_{MSE} = E \left[ |y_Q[k] - s_m[k - k_0]|^2 \right]$$

09/10/2006

COM II

T3-75

### Ecualización Discreta: Forzador de ceros

- Se supone una duración de canal discreto equivalente  $p[k]$  de  $L_c+1$  muestras y el objetivo es el diseño de un ecualizador discreto  $h_Q[k]$  de  $L_Q+1$  coeficientes.
- Puesto que la convolución entre ambas secuencias tiene una longitud  $L_c+L_Q+1$  esta será la longitud del equivalente discreto tras la ecualización:

$$p[k] * h_Q[k] = \sum_{n=0}^{L_Q} h_Q[n] p[k-n] = p'_Q[k]$$

- En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} p[0] & 0 & : & 0 \\ p[1] & p[0] & : & 0 \\ p[2] & p[1] & : & 0 \\ \vdots & \vdots & : & \vdots \\ 0 & 0 & : & p[L_c] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_Q[0] \\ h_Q[1] \\ \vdots \\ h_Q[L_Q] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_Q[0] \\ p'_Q[1] \\ p'_Q[2] \\ \vdots \\ p'_Q[L_c + L_Q] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{h} = \mathbf{p}'_Q$$

09/10/2006

COM II

T3-76

### Ecualización Discreta: Forzador de ceros (II)

- El criterio utilizado implica un sistema sobredeterminado de  $L_c+L_Q+1$  ecuaciones con  $L_Q+1$  incógnitas. Se optará por la solución que minimiza:

$$\varepsilon_{ZF} = \sum_k (p[k] * h_Q[k] - \delta[k - k_0])^2 = \|\mathbf{P}\mathbf{h} - \mathbf{p}_Q\|^2$$

- Desarrollando la norma del vector:

$$\varepsilon_{FZ} = (\mathbf{P}\mathbf{h} - \mathbf{p}_Q)^T (\mathbf{P}\mathbf{h} - \mathbf{p}_Q) = \mathbf{h}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{h} - \mathbf{p}_Q^T \mathbf{P} \mathbf{h} - \mathbf{h}^T \mathbf{P}^T \mathbf{p}_Q + \mathbf{p}_Q^T \mathbf{p}_Q$$

- Igualando el gradiente de dicha expresión con respecto a  $\mathbf{h}$  a  $\mathbf{0}$ :

$$\nabla (\varepsilon_{FZ})_{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{FZ}}{\partial h_Q[0]} \\ \frac{\partial \varepsilon_{FZ}}{\partial h_Q[1]} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon_{FZ}}{\partial h_Q[L_Q]} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{h} - \mathbf{P}^T \mathbf{p}_Q = \mathbf{0}_{L_Q+1}$$

09/10/2006

T3-77

### Ecualización Discreta: Forzador de ceros (III)

- Despejando el vector  $\mathbf{h}$  resulta:

$$\mathbf{h}_{ZF} = (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{p}_Q = \text{pinv}(\mathbf{P}) \mathbf{p}_Q$$

$$\text{pinv}(\mathbf{P}) \triangleq \mathbf{P}^\dagger \triangleq (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T$$

- En donde se ha definido la función pseudoinversa de una matriz. Cuando la matriz es invertible la pseudoinversa y la inversa coinciden.
- Dado que el sistema es en general sobredeterminado, la ISI no se cancela por completo. Sin embargo, como se verá en ejemplos se reduce considerablemente.
- La utilización de este criterio tiene como principal inconveniente el hecho de que el impacto de la ecualización sobre la potencia de ruido no aparece en el criterio de diseño y por tanto no se controla.

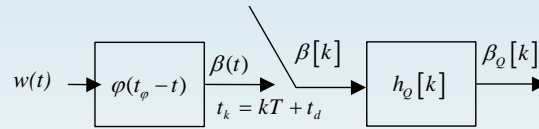
09/10/2006

COM II

T3-78

### Ecuación Discreta: Forzador de ceros (IV)

- Análisis del impacto del ecualizador en el ruido



- Como vimos en el Tema 2, la componente de ruido a la salida del filtro adaptado es gaussiana y por tanto también lo será a la salida del ecualizador:

$$\beta[k] \sim N\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$$

$$\beta_0[k] = \sum_{l=0}^{L_0} h[l]\beta[k-l] \sim N\left(0, \sigma_0^2\right)$$

09/10/2006

COM II

T3-79

### Ecuación Discreta: Forzador de ceros (V)

- Además, desde el punto de vista de su dependencia temporal el ruido a la salida del filtro adaptado es blanco, es decir:

$$R_\beta[k] = E[\beta[l+k]\beta[l]] = \frac{N_0}{2} \delta[k]$$

– Demostración:

$$\begin{aligned} R_\beta[k] &= E[\beta[l+k]\beta[l]] = \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)\varphi(t_\varphi - (t_{k+l} - \lambda))d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} w(\gamma)\varphi(t_\varphi - (t_l - \gamma))d\gamma\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_\varphi - (t_{k+l} - \lambda)) \int_{-\infty}^{\infty} E[w(\lambda)w(\gamma)]\varphi(t_\varphi - (t_l - \gamma))d\gamma d\lambda = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_\varphi - (t_{k+l} - \lambda)) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - \gamma)\varphi(t_\varphi - (t_l - \gamma))d\gamma d\lambda = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_\varphi - (t_{k+l} - \lambda))\varphi(t_\varphi - (t_l - \lambda))d\lambda = \\ &= \frac{N_0}{2} R_\varphi(t_l - t_{k+l}) = \frac{N_0}{2} R_\varphi(-kT) = \frac{N_0}{2} \delta[k] \end{aligned}$$

09/10/2006

T3-80



### Ecualización Discreta: Forzador de ceros (VI)

- Sin embargo, y debido al efecto del ecualizador, el ruido a la salida del mismo deja de ser blanco. Su función de correlación se puede calcular como:

$$\begin{aligned}
 R_{\beta_Q}[k] &= E[\beta_Q[l+k]\beta_Q[l]] = \\
 &= E\left[\sum_{j=0}^{L_Q} h[j]\beta[k+l-j]\sum_{i=0}^{L_Q} h[i]\beta[l-i]\right] = \\
 &= \sum_{j=0}^{L_Q} h[j]\sum_{i=0}^{L_Q} h[i]E[\beta[k+l-j]\beta[l-i]] = \\
 &= \sum_{j=0}^{L_Q} h[j]\sum_{i=0}^{L_Q} h[i]R_{\beta}[k-j+i] = \sum_{j=0}^{L_Q} h[j]\sum_{i=0}^{L_Q} h[i]\frac{N_0}{2}\delta[k-j+i] = \\
 &= \frac{N_0}{2}\sum_{j=0}^{L_Q} h[j]h[j-k] = \frac{N_0}{2}R_h[-k]
 \end{aligned}$$

09/10/2006

COM II

T3-81

### Ecualización Discreta: Forzador de ceros (VII)

- La función de autocorrelación para  $k=0$  nos proporciona el valor de la potencia del ruido a la salida del ecualizador:

$$\sigma_{\beta_Q}^2 = R_{\beta_Q}[0] = \frac{N_0}{2}\sum_{j=0}^{L_Q} (h[j])^2$$

- Expresada en dB:

$$\left(\frac{\sigma_{\beta_Q}^2}{\sigma_{\beta}^2}\right)_{dB} = 10\log_{10}\left(\sum_{j=0}^{L_Q} (h[j])^2\right)$$

- El efecto sobre el ruido depende del canal a ecualizar

09/10/2006

COM II

T3-82

### Ecuación Discreta: Criterio MSE

- En este caso el criterio a minimizar actúa simultáneamente sobre la ISI y el ruido al expresarse en forma de esperanza sobre el error cuadrático a la salida del ecualizador con respecto a la señal deseada (equivalente al filtro de Wiener)

$$\varepsilon_{MSE} = E \left[ \left| y_Q[k] - s_m[k - k_0] \right|^2 \right] = E \left[ \left| \sum_{j=0}^{L_Q} h[j] y[k - j] - s_m[k - k_0] \right|^2 \right]$$

- Al igual que se hizo en el caso del forzador de ceros, se iguala el gradiente de la función a minimizar con respecto a la respuesta del ecualizador a  $\mathbf{0}$ .

$$\nabla (\varepsilon_{MSE})_{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{MSE}}{\partial h[0]} \\ \frac{\partial \varepsilon_{MSE}}{\partial h[1]} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon_{MSE}}{\partial h[L_Q]} \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{L_Q+1}$$

09/10/2006

T3-83

### Ecuación Discreta: Criterio MSE (II)

- Particularizando en cada una de sus componentes:

$$\frac{\partial \varepsilon_{MSE}}{\partial h[l]} = E \left[ y[k - l] \left( \sum_{j=0}^{L_Q} h[j] y[k - j] - s_m[k - k_0] \right) \right] = 0$$

- Equivalente a: Error ortogonal a los datos

$$\sum_{j=0}^{L_Q} h[j] E[y[k - l] y[k - j]] = E[y[k - l] s_m[k - k_0]] \Rightarrow$$

$$\sum_{j=0}^{L_Q} h[j] R_y[j - l] = E[y[k - l] s_m[k - k_0]]$$

– en donde se ha utilizado la propiedad de que la secuencia  $y[k]$  es estacionaria en la autocorrelación (demostración?).

- A continuación supondremos que los símbolos tienen media nula y se han codificado sin memoria:

$$R_s[k] = \sigma_s^2 \delta[k]$$

09/10/2006

COM II

T3-84

### Ecuación Discreta: Criterio MSE (III)

- De esta forma se puede simplificar la expresión a la derecha de la ecuación de diseño como:

$$\begin{aligned}
 & E[y[k-l]s_m[k-k_0]] = \\
 & = E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_m[n]p[k-l-n]s_m[k-k_0]\right] + E[\beta[k-l]s_m[k-k_0]] = \\
 & = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p[k-l-n]E[s_m[n]s_m[k-k_0]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p[k-l-n]R_s[n-k+k_0] = \\
 & \quad \sigma_s^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p[k-l-n]\delta[n-k+k_0] = \sigma_s^2 p[k_0-l]
 \end{aligned}$$

- De forma que el criterio MSE se simplifica a:

$$\sum_{j=0}^{L_Q} h[j]R_y[j-l] = \sigma_s^2 p[k_0-l]$$

09/10/2006

COM II

T3-85

### Ecuación Discreta: Criterio MSE (IV)

- Que en forma matricial queda como:

$$\begin{pmatrix} R_y[0] & R_y[-1] & \cdots & R_y[-L_Q] \\ R_y[1] & R_y[0] & \cdots & R_y[1-L_Q] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y[L_Q] & R_y[L_Q-1] & \cdots & R_y[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[L_Q] \end{pmatrix} = \sigma_s^2 \begin{pmatrix} p[k_0] \\ p[k_0-1] \\ \vdots \\ p[k_0-L_Q] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y \mathbf{h} = \sigma_s^2 \mathbf{p}[k_0]$$

- En donde la matriz de correlación de y es cuadrada e invertible de forma que:

$$\mathbf{h}_{MSE} = \sigma_s^2 \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{p}[k_0]$$

09/10/2006

COM II

T3-86

### Ecuación Discreta: Criterio MSE (V)

- En el caso de modulaciones sin memoria con símbolos de media nula, la expresión de la matriz de correlación de  $y$  puede simplificarse según:

$$\begin{aligned}
 R_y[m] &= E[y[k+m]y[k]] = \\
 &E\left[\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_m[n]p[k+m-n] + \beta[k+m]\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} s_m[l]p[k-l] + \beta[k]\right)\right] = \\
 &\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} E[s_m[n]s_m[l]]p[k+m-n]p[k-l] + E[\beta[k+m]\beta[k]] = \\
 &\sigma_s^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta[n-l]p[k+m-n]p[k-l] + \frac{N_0}{2} \delta[m] = \\
 &\sigma_s^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p[k+m-n]p[k-n] + \frac{N_0}{2} \delta[m] = \sigma_s^2 R_p[m] + \frac{N_0}{2} \delta[m]
 \end{aligned}$$

09/10/2006

COM II

T3-87

### Ecuación Discreta: Criterio MSE (VI)

- Que de forma vectorial resulta:

$$\mathbf{R}_y = \sigma_s^2 \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_\beta = \sigma_s^2 \mathbf{R}_p + \frac{N_0}{2} \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R}_p = \begin{pmatrix} R_p[0] & R_p[-1] & \cdots & R_p[-L_Q] \\ R_p[1] & R_p[0] & \cdots & R_p[1-L_Q] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_p[L_Q] & R_p[L_Q-1] & \cdots & R_p[0] \end{pmatrix}$$

- Debe recordarse que estos resultados se han obtenido exclusivamente para símbolos codificados sin memoria y de media nula.
- La solución según el criterio MSE tiende a la del Forzador de ceros cuando el ruido tiende a 0.

09/10/2006

COM II

T3-88

### Ejemplo de ecualización

- Supongamos un canal equivalente discreto del tipo:

$$p[k] = 0.5147\delta[k] + 0.7352\delta[k-1] - 0.4411\delta[k-2]$$

- Analizaremos las prestaciones del sistema sin ecualizar suponiendo una modulación M-PAM:

$$BER \approx \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q\left(\frac{d_{\min}^{ISI}}{2\sigma_\beta}\right)$$

Como disminución de la distancia mínima (modelado determinista muy pesimista):

$$d_{\min}^{ISI} = d_{\min} p[n_{\max}] - 2 \max_{n \neq n_{\max}} \left| \sum_{m \neq n_{\max}} s_m p[n] \right| \geq d_{\min} p[n_{\max}] - 2 \max_{n \neq n_{\max}} |s_m| \sum_{n \neq n_{\max}} |p[n]|$$

$$d_{\min} p[n_{\max}] - 2d_{\min} \frac{M-1}{2} \sum_{n \neq n_{\max}} |p[n]| = d_{\min} (0.7352 - 0.9558(M-1))$$

Supone la posibilidad de distancia mínima cero!

09/10/2006

COM II

T3-89

### Ejemplo de ecualización (II)

- Como aumento del ruido efectivo manteniendo la distancia mínima

$$\sigma_{ISI}^2 = \sigma_\beta^2 + E \left[ \sum_{n \neq n_{\max}} |s_m p[n]|^2 \right] = \sigma_\beta^2 + E_s \sum_{n \neq n_{\max}} |p[n]|^2 = \sigma_\beta^2 + 0.4595E_s =$$

$$\frac{N_0}{2} + 0.4595E_s = \frac{1}{2} (N_0 + 0.9189E_b \log_2 M)$$

- Resulta una degradación respecto al sistema sin ISI ideal de:

$$BER \approx \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q\left(\frac{0.7352d_{\min}}{2\sigma_{ISI}}\right) = \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q\left(\frac{\sqrt{6E_b \log_2 M \times (0.7352)^2}}{\sqrt{(M^2-1)(N_0 + 0.9189E_b \log_2 M)}}\right)$$

En nuestro caso (M=2):

$$\sigma_\beta^2 = \frac{N_0}{2} = 0.3E_s = 0.3E_b$$

el ruido aumenta:  $N_0 + 0.9189E_b \log_2 M = (1 + \frac{0.9189}{0.6})N_0 = 2.5315N_0$

$$20 \log(0.7352) - 10 \log(2.5315) = -6.7057 \text{ dB}$$

09/10/2006

COM II

T3-90

### Ejemplo de ecualización (III)

- Diseño del forzador de ceros:

$$p[k] = 0.5147\delta[k] + 0.7352\delta[k-1] - 0.4411\delta[k-2]$$

- Aplicando el criterio del forzador de ceros se plantea la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 0.5147 & 0 & 0 \\ 0.7352 & 0.5147 & 0 \\ -0.4411 & 0.7352 & 0.5147 \\ 0 & -0.4411 & 0.7352 \\ 0 & 0 & -0.4411 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- En donde se ha situado el máximo del pulso a la salida retrasado una muestra con respecto al máximo a la entrada  $k_0 = 2$

09/10/2006

COM II

T3-91

### Ejemplo de ecualización (IV)

- Aplicando la expresión calculada utilizando la pseudoinversa:

$$\mathbf{h}_{ZF} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \text{pinv} \begin{pmatrix} 0.5147 & 0 & 0 \\ 0.7352 & 0.5147 & 0 \\ -0.4411 & 0.7352 & 0.5147 \\ 0 & -0.4411 & 0.7352 \\ 0 & 0 & -0.4411 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3934 \\ 0.7356 \\ 0.3856 \end{pmatrix}$$

- De forma que el pulso obtenido a la salida del ecualizador es:

$$p_Q[k] = p[k] * h[k] = \\ = -0.2024\delta[k] + 0.0894\delta[k-1] + 0.9128\delta[k-2] + -0.0410\delta[k-3] + -0.1701\delta[k-4]$$

09/10/2006

COM II

T3-92

### Ejemplo de ecualización (V)

- En incremento (o disminución en este caso) de potencia de ruido debido al forzador de ceros es:

$$\left(\frac{\sigma_{\beta_Q}^2}{\sigma_{\beta}^2}\right)_{dB} = 10 \log \left( \sum_{j=0}^2 h^2[j] \right) = 10 \log(0.8445) = -0.7338 \text{ dB}$$

- Haciendo un modelado determinista de la ISI remanente

$$d_{\min}^{ZF} = d_{\min} p_Q[n_{\max}] - 2 \max_{n \neq n_{\max}} \left| \sum s_m p_Q[n] \right| \geq d_{\min} p_Q[n_{\max}] - 2 \max_{n \neq n_{\max}} |s_m| \sum |p_Q[n]|$$

$$d_{\min} p_Q[n_{\max}] - 2 d_{\min} \frac{M-1}{2} \sum_{n \neq n_{\max}} |p_Q[n]| = d_{\min} (0.9128 - 0.5029(M-1))$$

Suponiendo modulación PAM con  $M=2$  supone una pérdida de cómo máximo 7 dB respecto al sistemas sin ISI:

$$BER = \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q \left( \frac{d_{\min}^{ZF}}{2\sigma_{\beta_Q}} \right) = \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q \left( \frac{(0.9128 - 0.5029)d}{2\sqrt{0.8445}\sigma_{\beta}} \right)$$

09/10/2006

COM II

T3-93

### Ejemplo de ecualización (VI)

- Haciendo un modelado aleatorio de la ISI:

$$\sigma_{ISI}^2 = \sigma_{\beta_Q}^2 + E \left[ \sum_{n \neq n_{\max}} |s_m p_Q[n]|^2 \right] = \sigma_{\beta}^2 + E_s \sum_{n \neq n_{\max}} |p_Q[n]|^2 = 0.8445 \sigma_{\beta}^2 + 0.0796 E_s =$$

$$0.8445 \frac{N_0}{2} + 0.0796 E_s$$

Supondremos un valor para la potencia del ruido:  $\frac{N_0}{2} = 0.3 \sigma_s^2 = 0.3 E_s$

$$0.8445 \frac{N_0}{2} + 0.0796 E_s = (0.8445 + \frac{0.0796}{0.3}) \frac{N_0}{2} = 1.1098 \frac{N_0}{2}$$

Resulta en una estimación de pérdidas de 1.25 dB frente al sistema sin ISI:

$$BER \approx \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q \left( \frac{d_{\min}^{ZF}}{2\sigma_{\beta_Q}} \right) = \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q \left( \frac{0.9128d}{2\sqrt{1.1098}\sigma_{\beta}} \right)$$

09/10/2006

COM II

T3-94

### Ejemplo de ecualización (VII)

- Aplicando el criterio MSE para el diseño de un ecualizador FIR de 3 coeficientes, tomando también un retardo en el pulso de salida de una muestra con respecto a la entrada, y suponiendo una modulación de media 0 y sin memoria:

$$\mathbf{R}_y = \sigma_s^2 \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_\beta = \sigma_s^2 \mathbf{R}_p + \frac{N_0}{2} \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R}_p = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0541 & -0.2270 \\ 0.0541 & 1.0000 & 0.0541 \\ -0.2270 & 0.0541 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

- Particularizando para  $\frac{N_0}{2} = 0.3\sigma_s^2$ ,  $k_0 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1.3000 & 0.0541 & -0.2270 \\ 0.0541 & 1.3000 & 0.0541 \\ -0.2270 & 0.0541 & 1.3000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4411 \\ 0.7352 \\ 0.5147 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3072 \\ 0.5651 \\ 0.3187 \end{pmatrix}$$

09/10/2006

COM II

T3-95

### Ejemplo de ecualización (VIII)

- Análisis de las prestaciones a la salida del ecualizador con el diseño obtenido:

$$h_Q[k] = 0.3187\delta[k] + 0.5651\delta[k-1] - 0.3072\delta[k-2]$$

$$p_Q[k] = p[k] * h_Q[k] = -0.1581\delta[k] + 0.0650\delta[k-1] + 0.7150\delta[k-2] - 0.0149\delta[k-3] - 0.1406\delta[k-4]$$

Análisis de aumento (o disminución) de la potencia de ruido.

$$\sigma_{\beta_Q}^2 = \sigma_\beta^2 \sum_{j=0}^2 h_Q[j]^2 = 0.5152\sigma_\beta^2$$

$$\left( \frac{\sigma_{\beta_Q}^2}{\sigma_\beta^2} \right)_{dB} = 10 \log_{10} \left( \sum_{j=0}^2 h_Q[j]^2 \right) = -2.8798 \text{ dB}$$

El ruido disminuye su potencia casi 3 dB con respecto a la entrada del ecualizador

09/10/2006

COM II

T3-96



### Ejemplo de ecualización (IX)

- Modelado del impacto de la ISI remanente. Suponiendo una modulación M-PAM:

$$BER \approx \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q \left( \frac{d_{\min}^{ISI-MMSE}}{2\sigma_Q} \right)$$

Como disminución de la distancia mínima (modelado determinista muy pesimista):

$$d_{\min}^{ISI-MMSE} = d_{\min} p_Q[n_{\max}] - 2 \max_{n \neq n_{\max}} \left| \sum s_m p_Q[n] \right| \geq d_{\min} p_Q[n_{\max}] - 2 \max_{n \neq n_{\max}} |s_m| \sum |p_Q[n]|$$

$$d_{\min} p_Q[n_{\max}] - 2d_{\min} \frac{M-1}{2} \sum_{n \neq n_{\max}} |p_Q[n]| = d_{\min} (0.7150 - 0.3786(M-1))$$

La ISI sigue siendo importante

$$BER \approx \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q \left( \frac{d_{\min}^{MMSE}}{2\sigma_{\beta_Q}} \right) = \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q \left( \frac{d_{\min} (0.7150 - 0.3786(M-1))}{2\sigma_{\beta} \sqrt{0.5152}} \right)$$

lo que representa una pérdida de 6,5 dB para  $M=2$  respecto al caso ideal sin ISI (7dB máximo el ZF)

09/10/2006

COM II

T3-97

### Ejemplo de ecualización (X)

- Modelado del impacto de la ISI remanente. Como aumento de la potencia de ruido:

$$BER \approx \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q \left( \frac{d_{\min}^{MMSE}}{2\sigma_{ISI}} \right)$$

La distancia mínima se calcula como si no existiera ISI remanente:

$$d_{\min}^{MMSE} = d_{\min} p_Q[n_{\max}] = 0.7150 d_{\min}$$

La ISI produce un incremento de ruido:

$$\sigma_{ISI}^2 = \sigma_{\beta_Q}^2 + E \left[ \sum_{n \neq n_{\max}} |s_m p_Q[n]|^2 \right] = \sigma_{\beta_Q}^2 + E_s \sum_{n \neq n_{\max}} |p_Q[n]|^2 =$$

$$0.5152 \sigma_{\beta}^2 + 0.0492 E_s$$

En nuestro caso:

$$\sigma_{\beta}^2 = 0.3 E_s \Rightarrow \sigma_{ISI}^2 = \left( 0.5152 + \frac{0.0492}{0.3} \right) \sigma_{\beta}^2 = 0.6793 \sigma_{\beta}^2$$

09/10/2006

COM II

T3-98

### Ejemplo de ecualización (XI)

- Resultando:

$$BER \approx \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q\left(\frac{d_{\min}^{MMSE}}{2\sigma_{ISI}}\right) = \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q\left(\frac{0.7150d_{\min}}{2\sqrt{0.6793}\sigma_{\beta}}\right)$$

en una degradación con respecto al caso ideal sin ISI de -1,23 dB

$$20\log(0.7150) - 10\log(0.6793) = -1.2347\text{dB}$$

frente a la degradación de 6,7 dB si no se utiliza el ecualizador y de 1,25dB con el forzador de ceros.

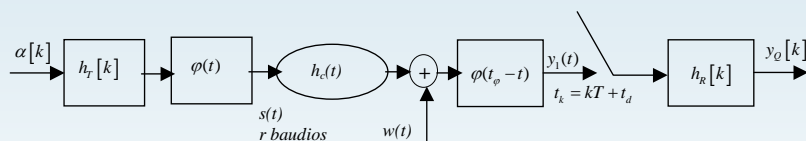
09/10/2006

COM II

T3-99

### 3.5 Filtros Terminales Optimos

- En este apartado consideraremos la posibilidad de diseñar la etapa de transmisión de forma conjunta con la de recepción según el esquema visto en la transparencia T3-74.



$h_T[k] * p[k] * h_R[k] = \delta[k - k_0]$  y simultáneamente maximizar la SNR en recepción

- Este diseño implica conocimiento del canal por parte del transmisor y receptor (en el caso de ecualización este conocimiento tan sólo es necesario en el receptor)

09/10/2006

COM II

T3-100

### Filtros Terminales Optimos (II)

- Formalmente el objetivo de diseño consiste calcular  $h_T[k], h_R[k]$ 
  - Tal que se equalice de forma perfecta el canal:  

$$h_T[k] * p[k] * h_R[k] = \delta[k - k_0]$$
  - Minimice la probabilidad de error (lo veremos para el caso M-PAM)

$$BER \approx \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q\left(\frac{d}{2\sigma_{\beta_0}}\right)$$

- Manteniendo fijo el valor de la energía de bit  $E_b$
- Como vimos para el caso del equalizador forzador de ceros, la potencia del ruido a la salida del equalizador es:

$$\sigma_{\beta_0}^2 = \frac{N_0}{2} \sum_{j=0}^{L_R} (h_R[j])^2$$

09/10/2006

COM II

T3-101

### Filtros Terminales Optimos (III)

- Cálculo de la energía por bit  $E_b$ 
  - La utilización de un filtro discreto en el transmisor modifica el cálculo de la energía de símbolo transmitida que ya no puede calcularse directamente como la potencia de las coordenadas de los símbolos. La expresión de la señal transmitida es:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_m[n] p_T(t - nT) \quad ; \quad p_T(t) = \sum_{n=0}^{L_T} h_T[n] \phi(t - nT)$$

- Como vimos al inicio de este tema, la correlación promediada de la señal transmitida se puede expresar como:

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_T R_s(t + \tau, t) dt = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{\alpha}[m] R_{p_T}(\tau - mT)$$

$$E_s = \hat{R}_s(0)T = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{\alpha}[m] R_{p_T}(mT)$$

09/10/2006

COM II

T3-102

### Filtros Terminales Optimos (IV)

- En el caso de M-PAM (modulación sin memoria de media nula) se cumple:

$$R_\alpha[m] = \sigma_\alpha^2 \delta[m] = \frac{M^2-1}{12} d^2 \delta[m]$$

y por tanto:

$$E_b = \frac{1}{\log_2 M} E_s = \frac{1}{\log_2 M} \sigma_\alpha^2 R_{p_r}(0) = \frac{M^2-1}{12 \log_2 M} d^2 \sum_{n=0}^{L_T} (h_T[n])^2$$

- despejando  $d$ :

$$d^2 = \frac{12 E_b \log_2 M}{(M^2-1) \sum_{n=0}^{L_T} (h_T[n])^2} \quad ; \quad d = \sqrt{\frac{12 E_b \log_2 M}{(M^2-1) \sum_{n=0}^{L_T} (h_T[n])^2}}$$

09/10/2006

COM II

T3-103

### Filtros Terminales Optimos (V)

Ruido efectivo

- Sustituyendo en la expresión de BER:

$$BER \approx \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q\left(\frac{d}{2\sigma_{\beta_Q}}\right) = \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6 E_b \log_2 M}{(M^2-1) N_0 \sum_{n=0}^{L_T} (h_T[n])^2 \sum_{j=0}^{L_R} (h_R[j])^2}}\right)$$

- Este expresión permite concluir que diseño de los filtros terminales óptimos consiste en determinar los coeficientes que manteniendo ISI nula minimicen la expresión:

$$\varepsilon_{FT} = \sum_{n=0}^{L_T} (h_T[n])^2 \sum_{m=0}^{L_R} (h_R[m])^2$$

- Este expresión sin embargo se puede minimizar considerando la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\sum_{n=0}^{L_T} (h_T[n])^2 \sum_{m=0}^{L_R} (h_R[m])^2 \geq \left( \sum_{m=0}^{\min\{L_T, L_R\}} h_R[m] h_T[m] \right)^2$$

09/10/2006

COM II

T3-104

### Filtros Terminales Optimos (VI)

- Que expresada en el dominio frecuencial resulta:

$$\int_{-1/2}^{+1/2} |H_T(f)|^2 df \frac{1}{2\pi} \int_{-1/2}^{+1/2} |H_R(f)|^2 df \geq \left| \int_{-1/2}^{+1/2} H_T(f) H_R(f) df \right|^2$$

- Con igualdad para:

$$|H_T(f)| = \lambda |H_R(f)|$$

- La condición de ISI nula es equivalente a:

$$h_T[k] * p[k] * h_R[k] = \delta[k - k_0] \Leftrightarrow H_T(f) P(f) H_R(f) = e^{-j2\pi f k_0}$$

- Imponiendo ambas condiciones resulta:

$$|H_T(f)|^2 = \frac{\lambda}{|P(f)|} \quad ; \quad |H_R(f)|^2 = \frac{1}{\lambda |P(f)|}$$

09/10/2006

COM II

T3-105

### Filtros Terminales Optimos (VII)

- Recordando que este diseño es que que satisfacía con igualdad la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\varepsilon_{FTO} = \left| \int_{-1/2}^{+1/2} H_T(f) H_R(f) df \right|^2 = \left| \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{1}{|P(f)|} df \right|^2$$

- De forma que la BER resultante es:

$$BER \approx \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q\left(\frac{d}{2\sigma_{\beta_Q}}\right) = \frac{2M-2}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6E_b \log_2 M}{(M^2-1)N_0 \varepsilon_{FTO}}}\right)$$

09/10/2006

COM II

T3-106

### Filtros Terminales Optimos (VIII)

- Procedimiento de diseño:

- Calcular:

$$P(f) = |P(f)| e^{j2\pi\phi_p(f)} = \sum_k p[k] e^{-j2\pi fk}$$

- Expresar:

$$H_T(f) = \frac{\lambda^{1/2}}{|P(f)|^{1/2}} e^{j2\pi\phi_r(f)}$$

$$H_R(f) = \frac{1}{|\lambda P(f)|^{1/2}} e^{j2\pi\phi_r(f)} = \frac{1}{|\lambda P(f)|^{1/2}} e^{-j2\pi(k_0 + \phi_p(f) + \phi_r(f))}$$

- Obtener las respuesta impulsional de los ecualizadores como la aproximación FIR de:

$$h_R[k] \approx \int_{-1/2}^{1/2} H_R(f) e^{j2\pi fk} df \quad ; \quad h_T[k] \approx \int_{-1/2}^{1/2} H_T(f) e^{j2\pi fk} df$$