COMUNICACIONES II **Noviembre, 2005** **M. Cabrera**

Se desea transmitir una secuencia de bits equiprobables y estadísticamente independientes entre sí transmitiendo una energía por bit E_b y a una velocidad de r_b. Se elige una modulación QPSK.

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(I\left[n\right]p\left(t-nT\right)A_c\cos\left(2\pi f_ct+\theta_c\right)-Q\left[n\right]p\left(t-nT\right)A_c\mathrm{sen}\left(2\pi f_ct+\theta_c\right)\right)$$

con

$$I\left[n\right]=-A,+A \quad Q\left[n\right]=-A,+A \quad f_c=Nr \quad p(t)=\tfrac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\tfrac{t-T/2}{T}\right) \quad r=\tfrac{1}{T}=\tfrac{1}{2}r_b$$

La señal se transmite por un canal ideal $h_c(t)=\delta(t)$ de ruido *w(t)* blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $S_w(f)=\frac{N_0}{2}$.

Se pide:

a) Identificar la dimensión L y la base generadora del espacio de señal.
b) Dibujar la constelación de la señal. Obtener la distancia mínima entre símbolos d en función de los parámetros físicos de la modulación y obtenga la energía promedio E_b en función de la distancia mínima.
c) Suponiendo detección óptima, proporcione sin demostrar, la probabilidad de error del sistema para las consideraciones habituales: codificación Gray y $\frac{E_b}{N_0}$ elevado.

Suponga a partir de este punto que en recepción se generan los siguientes errores. El oscilador que debería dar la señal de portadora $\cos\left(2\pi f_ct+\theta_c\right)$, produce en su lugar $(1+\gamma)\cos\left(2\pi f_ct+\theta_R\right)$. El desfasador que en condiciones ideales debería dar la señal $-\mathrm{sen}\left(2\pi f_ct+\theta_c\right)$, produce en su lugar $-(1-\gamma)\mathrm{sen}\left(2\pi f_ct+\theta_R\right)$. $0<\gamma<0.1$

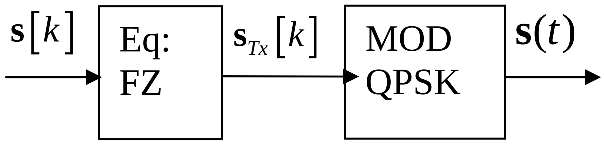
Se pide:

d) Interprete los errores anteriores desde la perspectiva de espacio de señal. Se sugiere que analice la relación entre las funciones de la base generadas por el receptor y las generadas por el transmisor.
e) Analizar el efecto sobre el vector de símbolos detectado $\mathbf{y}\left[k\right]$, distinguiendo entre señal útil, ICI y ruido. Dibuje la constelación de señal recibida si $0<\theta_R-\theta_c<\frac{\pi}{4}$, suponiendo que se mantienen los umbrales a utilizar en el caso sin errores del apartado c. Comente como es la función de densidad de probabilidad del vector de ruido en este caso.
f) A la vista de los resultados comente como se degradará la probabilidad de error en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, respecto a la situación del apartado c) para el caso genérico $0<\theta_R-\theta_c<\frac{\pi}{4}$.

Para eliminar la ICI introducida por los errores de la portadora en recepción, se diseña un ecualizador transversal, utilizando el criterio de forzador de ceros:

$$\mathbf{H}[k] = \mathbf{H}_Q \delta[k]$$

Dicho ecualizador se coloca en el transmisor. A partir de este punto se supondrá permanentemente que $\theta_R - \theta_c = \frac{\pi}{4}$.



Se pide:

g) Dar los coeficientes del ecualizador y dibuje la estructura del mismo.

h) Calcule para esta nueva situación la energía promedio E_b en función de la distancia mínima y de los coeficientes del ecualizador, sobre la señal transmitida $s(t)$.

i) Suponiendo que en la detección se mantienen los umbrales a utilizar en el caso sin errores del apartado c así como las mismas consideraciones, dibuje la constelación de señal recibida y calcule la probabilidad de error en función de $\frac{E_b}{N_0}$.

j) A la vista de los resultados compare la probabilidad de error en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, respecto a la situación del apartado c.

Notas de ayuda:

Expresiones trigonométricas

$$\cos(A)\cos(B) = \tfrac{1}{2}\cos(A-B) + \tfrac{1}{2}\cos(A+B)$$
$$\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) = \tfrac{1}{2}\cos(A-B) - \tfrac{1}{2}\cos(A+B)$$
$$\operatorname{sen}(A)\cos(B) = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(A-B) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(A+B)$$
$$\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{4} + B) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(B) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(B)$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{4} + B) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(B) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(B)$$

Inversa de una matriz 2x2

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(ac - bd)} \begin{pmatrix} c & -d \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Resolución

a) Identificar la dimensión L y la base generadora del espacio de señal.

Solución:

$$L = 2$$

$$\varphi_i(t) = +\sqrt{2}p(t)\cos(2\pi f_c t + \theta_c); \qquad \varphi_q(t) = -\sqrt{2}p(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t + \theta_c)$$

$$p(t) = \tfrac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\tfrac{t-T/2}{T}\right)$$

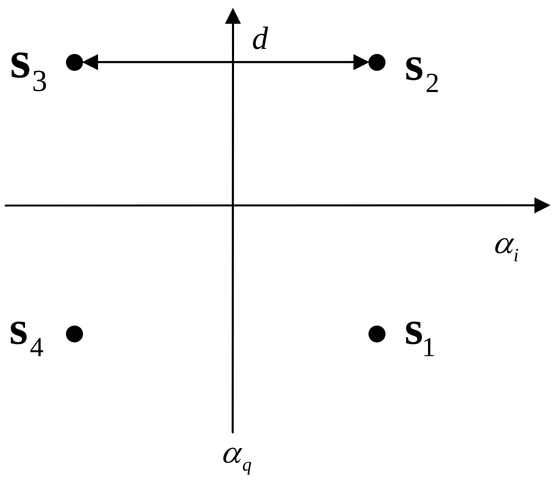
b) Dibujar la constelación de la señal. Obtener la distancia mínima entre símbolos d en función de los parámetros físicos de la modulación y obtenga la energía promedio E_b en función de la distancia mínima.

Solución:

Dado que: $$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\alpha_i[n]\varphi_i(t-nT) + \alpha_q[n]\varphi_q(t-nT)\right)$$

Y: $$\alpha_i[n] = \tfrac{A_c}{\sqrt{2}}I[n] \qquad \alpha_q[n] = \tfrac{A_c}{\sqrt{2}}Q[n]$$

Se tiene: $$\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix}\alpha_{i-m}\\ \alpha_{q-m}\end{pmatrix} = \tfrac{A_c}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}I_m\\ Q_m\end{pmatrix} = \tfrac{A_c}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\pm A\\ \pm A\end{pmatrix} = \tfrac{d}{2}\begin{pmatrix}\pm 1\\ \pm 1\end{pmatrix}$$



Distancia mínima entre símbolos: $$d = 2\tfrac{A_c}{\sqrt{2}}A = \sqrt{2}A_c A$$

Energía de bit: $$E_b = \tfrac{1}{2}E_s = \tfrac{1}{2}E\left[\alpha_i^2 + \alpha_q^2\right] = \tfrac{1}{4}d^2$$

c) Suponiendo detección óptima proporcione, sin demostrar, la probabilidad de error del sistema para las consideraciones habituales: codificación Gray y $\frac{E_b}{N_0}$ elevado.

Solución:

$$P_e \simeq 2Q\left(\tfrac{d}{2\sigma}\right) = 2Q\left(\sqrt{2\tfrac{E_b}{N_0}}\right)$$

d) Interprete los errores anteriores desde la perspectiva de espacio de señal. Se sugiere que analice la relación entre las funciones de la base generadas por el receptor y las generadas por el transmisor.

Solución:

La interpretación desde la perspectiva de espacio de señal es que las funciones de la base generadas por el receptor son:

$$\varphi_{Rx,i}(t) = +(1+\gamma)\sqrt{2}p(t)\cos\left(2\pi f_c t + \theta_R\right) = +(1+\gamma)\sqrt{2}p(t)\cos\left(2\pi f_c t + \theta_c + \theta_R - \theta_c\right)$$
$$\varphi_{Tx,q}(t) = -(1-\gamma)\sqrt{2}p(t)\operatorname{sen}\left(2\pi f_c t + \theta_R\right) = -(1-\gamma)\sqrt{2}p(t)\operatorname{sen}\left(2\pi f_c t + \theta_c + \theta_R - \theta_c\right)$$

$$\varphi_{Rx,i}(t) = (1+\gamma)\cos\left(\theta_R - \theta_c\right)\varphi_i(t) + (1+\gamma)\operatorname{sen}\left(\theta_R - \theta_c\right)\varphi_q(t)$$
$$\varphi_{Tx,q}(t) = -(1-\gamma)\operatorname{sen}\left(\theta_R - \theta_c\right)\varphi_i(t) + (1-\gamma)\cos\left(\theta_R - \theta_c\right)\varphi_q(t)$$

Por otro lado, es importante observar que las dos funciones en el receptor, siguen siendo ortogonales aunque su energía no es igual a la unidad:

$$\int\left(\varphi_{Rx,i}(t)\right)^2 dt = (1+\gamma)^2\cos^2\left(\theta_R - \theta_c\right)\int\left(\varphi_i(t)\right)^2 dt + (1+\gamma)^2\operatorname{sen}^2\left(\theta_R - \theta_c\right)\int\left(\varphi_q(t)\right)^2 dt$$
$$+(1+\gamma)^2\cos\left(\theta_R - \theta_c\right)\operatorname{sen}^2\left(\theta_R - \theta_c\right)\int\varphi_{Ri}(t)\varphi_q(t)dt =$$
$$(1+\gamma)^2\cos^2\left(\theta_R - \theta_c\right) + (1+\gamma)^2\operatorname{sen}^2\left(\theta_R - \theta_c\right) + 0 =$$
$$(1+\gamma)^2$$

Análogamente se demuestra que:

$$\int\left(\varphi_{Rx,q}(t)\right)^2 dt = (1-\gamma)^2$$

e) Analizar el efecto sobre el vector de símbolos detectado $\mathbf{y}[k]$, distinguiendo entre señal útil, ICI y ruido. Dibuje la constelación de señal recibida si $\theta_R - \theta_c = \frac{\pi}{4}$, suponiendo que se mantienen los umbrales a utilizar en el caso sin errores del apartado c. Comente como es la función de densidad de probabilidad del vector de ruido en este caso.

Solución:

Las coordenadas del vector de señal se pueden expresar como:

$$y_i(t_k) = y_i[k] = +(1+\gamma)\cos(\theta_R-\theta_c)\alpha_i[k] + (1+\gamma)\mathrm{sen}(\theta_R-\theta_c)\alpha_q[k] + \beta_i[k]$$
$$y_q(t_k) = y_q[k] = -(1-\gamma)\mathrm{sen}(\theta_R-\theta_c)\alpha_i[k] + (1-\gamma)\cos(\theta_R-\theta_c)\alpha_q[k] + \beta_q[k]$$

o bien de forma matricial:

$$\mathbf{y}[k] = \begin{pmatrix} y_i[k] \\ y_q[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\gamma)\cos(\theta_R-\theta_c) & (1+\gamma)\mathrm{sen}(\theta_R-\theta_c) \\ -(1-\gamma)\mathrm{sen}(\theta_R-\theta_c) & (1-\gamma)\cos(\theta_R-\theta_c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i[k] \\ \alpha_q[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_i[k] \\ \beta_q[k] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{Ps}[k] + \mathbf{n}[k]$$

El primer sumando se puede interpretar como señal útil contaminada con ruido y el segundo es el vector de ruido.

Constelación de la señal recibida si $0 < \theta_R - \theta_c < \frac{\pi}{4}$:

Al transmitir el símbolo $\mathbf{s}_1 = \frac{d}{2}\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ se produce

$$\left(\mathbf{y}[k] - \mathbf{n}[k]\right)\big|\mathbf{s}_1 =$$
$$\frac{d}{2}\begin{pmatrix} (1+\gamma)\left(\cos(\theta_R-\theta_c) - \mathrm{sen}(\theta_R-\theta_c)\right) \\ -(1-\gamma)\left(\cos(\theta_R-\theta_c) + \mathrm{sen}(\theta_R-\theta_c)\right) \end{pmatrix} = \frac{d}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (1+\gamma)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} - (\theta_R-\theta_c)\right) \\ -(1-\gamma)\cos\left(\frac{\pi}{4} - (\theta_R-\theta_c)\right) \end{pmatrix}$$

donde se ha utilizado que:

$$\sqrt{2}\cos\left(\tfrac{\pi}{4} - (\theta_R-\theta_c)\right) = \cos(\theta_R-\theta_c) + \mathrm{sen}(\theta_R-\theta_c)$$
$$\sqrt{2}\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{4} - (\theta_R-\theta_c)\right) = \cos(\theta_R-\theta_c) - \mathrm{sen}(\theta_R-\theta_c)$$

Al transmitir el símbolo $\mathbf{s}_2 = \frac{d}{2}\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}$ se produce

$$\left(\mathbf{y}[k] - \mathbf{n}[k]\right)\big|\mathbf{s}_2 =$$
$$\frac{d}{2}\begin{pmatrix} (1+\gamma)\left(\cos(\theta_R-\theta_c) + \mathrm{sen}(\theta_R-\theta_c)\right) \\ (1-\gamma)\left(\cos(\theta_R-\theta_c) - \mathrm{sen}(\theta_R-\theta_c)\right) \end{pmatrix} = \frac{d}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (1+\gamma)\cos\left(\frac{\pi}{4} - (\theta_R-\theta_c)\right) \\ (1-\gamma)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} - (\theta_R-\theta_c)\right) \end{pmatrix}$$

Al transmitir el símbolo $\mathbf{s}_3 = \frac{d}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}$ se produce

$$\left(\mathbf{y}[k]-\mathbf{n}[k]\right)\big|\mathbf{s}_3 =$$

$$\tfrac{d}{2}\begin{pmatrix}(1+\gamma)\left(-\cos\left(\theta_R-\theta_c\right)+\operatorname{sen}\left(\theta_R-\theta_c\right)\right)\\(1-\gamma)\left(+\cos\left(\theta_R-\theta_c\right)+\operatorname{sen}\left(\theta_R-\theta_c\right)\right)\end{pmatrix}=\tfrac{d}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-(1+\gamma)\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}-\left(\theta_R-\theta_c\right)\right)\\(1-\gamma)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}-\left(\theta_R-\theta_c\right)\right)\end{pmatrix}$$

Al transmitir el símbolo $\mathbf{s}_4=\tfrac{d}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ se produce

$$\left(\mathbf{y}[k]-\mathbf{n}[k]\right)\big|\mathbf{s}_4 =$$

$$\tfrac{d}{2}\begin{pmatrix}-(1+\gamma)\left(\cos\left(\theta_R-\theta_c\right)+\operatorname{sen}\left(\theta_R-\theta_c\right)\right)\\-(1-\gamma)\left(\cos\left(\theta_R-\theta_c\right)-\operatorname{sen}\left(\theta_R-\theta_c\right)\right)\end{pmatrix}=\tfrac{d}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-(1+\gamma)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}-\left(\theta_R-\theta_c\right)\right)\\-(1-\gamma)\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}-\left(\theta_R-\theta_c\right)\right)\end{pmatrix}$$

Como caso particular se analiza la constelación de la señal recibida si $\theta_R-\theta_c=\tfrac{\pi}{4}$:

$$\mathbf{y}[k]=\begin{pmatrix}y_i[k]\\y_q[k]\end{pmatrix}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}(1+\gamma) & (1+\gamma)\\-(1-\gamma) & (1-\gamma)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i[k]\\\alpha_q[k]\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_i[k]\\\beta_q[k]\end{pmatrix}$$

Al transmitir el símbolo $\mathbf{s}_1=\tfrac{d}{2}\begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix}$ se produce

$$\left(\mathbf{y}[k]-\mathbf{n}[k]\right)\big|\mathbf{s}_1=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{d}{2}\begin{pmatrix}0\\-2(1-\gamma)\end{pmatrix}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}d(1-\gamma)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

Al transmitir el símbolo $\mathbf{s}_2=\tfrac{d}{2}\begin{pmatrix}+1\\+1\end{pmatrix}$ se produce

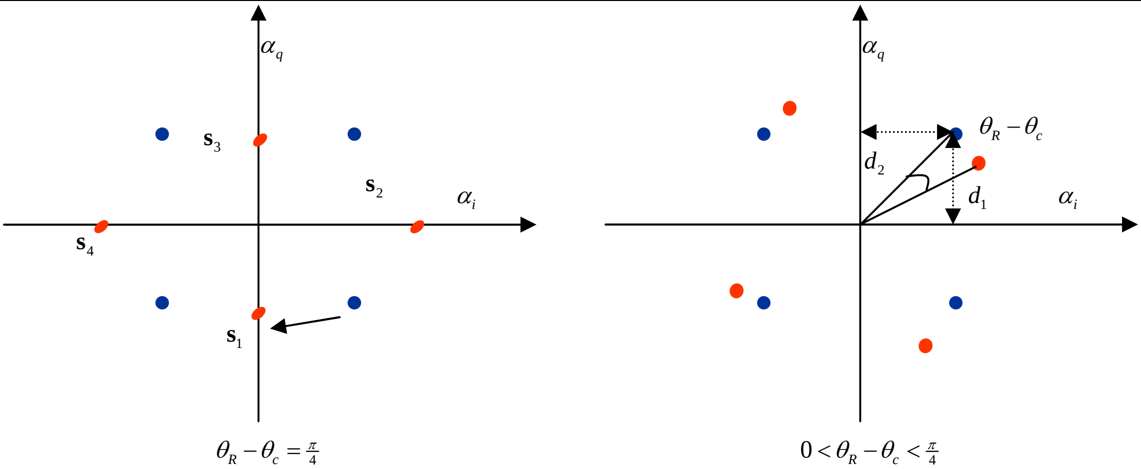
$$\left(\mathbf{y}[k]-\mathbf{n}[k]\right)\big|\mathbf{s}_2=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{d}{2}\begin{pmatrix}+2(1+\gamma)\\0\end{pmatrix}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}d(1+\gamma)\begin{pmatrix}+1\\0\end{pmatrix}$$

Al transmitir el símbolo $\mathbf{s}_3=\tfrac{d}{2}\begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix}$ se produce

$$\left(\mathbf{y}[k]-\mathbf{n}[k]\right)\big|\mathbf{s}_3=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{d}{2}\begin{pmatrix}0\\+2(1-\gamma)\end{pmatrix}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}d(1-\gamma)\begin{pmatrix}0\\+1\end{pmatrix}$$

Al transmitir el símbolo $\mathbf{s}_4=\tfrac{d}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ se produce

$$\left(\mathbf{y}[k]-\mathbf{n}[k]\right)\big|\mathbf{s}_4=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{d}{2}\begin{pmatrix}-2(1+\gamma)\\0\end{pmatrix}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}d(1+\gamma)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$



En esta figura se muestra en azul la constelación transmitida y en rojo la constelación recibida, para el caso particular $\theta_R-\theta_c=\frac{\pi}{4}$ y para el caso genérico, pedido en el enunciado.

La distribución del vector de ruido queda: $\mathbf{n}[k]: N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \frac{N_0}{2}\begin{pmatrix}(1+\gamma)^2 & 0\\ 0 & (1-\gamma)^2\end{pmatrix}\right)$

Es decir, queda transversalmente incorrelado pero cada una las dos coordenadas presentan varianzas diferentes. En el resto del ejercicio se utiliza la siguiente nomenclatura: $\sigma_1^2=\frac{N_0}{2}(1+\gamma)^2;\sigma_2^2=\frac{N_0}{2}(1-\gamma)^2$

f) A la vista de los resultados comente como se degradará la probabilidad de error en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, respecto a la situación del apartado c) para el caso genérico $0<\theta_R-\theta_c<\frac{\pi}{4}$.

Solución:

Con las distancias obtenidas de los puntos de señal recibida a los ejes de decisión el error de fase $0<\theta_R-\theta_c<\frac{\pi}{4}$, la probabilidad de error se puede aproximar por

$$P_e \simeq \tfrac{1}{2}\left(Q\left(\tfrac{d(1+\gamma)}{\sqrt{2}\sigma_1}\cos\left(\tfrac{\pi}{4}-(\theta_R-\theta_c)\right)\right)+Q\left(\tfrac{d(1+\gamma)}{\sqrt{2}\sigma_1}\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}-(\theta_R-\theta_c)\right)\right)\right)+$$
$$\tfrac{1}{2}\left(Q\left(\tfrac{d(1-\gamma)}{\sqrt{2}\sigma_2}\cos\left(\tfrac{\pi}{4}-(\theta_R-\theta_c)\right)\right)+Q\left(\tfrac{d(1-\gamma)}{\sqrt{2}\sigma_2}\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}-(\theta_R-\theta_c)\right)\right)\right)=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(Q\left(\sqrt{\cos^2\left(\tfrac{\pi}{4}-(\theta_R-\theta_c)\right)4\tfrac{E_b}{N_0}}\right)+Q\left(\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\tfrac{\pi}{4}-(\theta_R-\theta_c)\right)4\tfrac{E_b}{N_0}}\right)\right)+$$
$$\tfrac{1}{2}\left(Q\left(\sqrt{\cos^2\left(\tfrac{\pi}{4}-(\theta_R-\theta_c)\right)4\tfrac{E_b}{N_0}}\right)+Q\left(\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\tfrac{\pi}{4}-(\theta_R-\theta_c)\right)4\tfrac{E_b}{N_0}}\right)\right)$$

La pérdida en dB viene dada por el mínimo de las cantidades:

$$-10\log_{10}\left(2\cos^2\left(\tfrac{\pi}{4}-\left(\theta_R-\theta_c\right)\right)\right),\quad -10\log_{10}\left(2\mathrm{sen}^2\left(\tfrac{\pi}{4}-\left(\theta_R-\theta_c\right)\right)\right)$$

g) Dar los coeficientes del ecualizador y dibuje la estructura del mismo.

Solución:

La solución pedida consiste en la respuesta impulsional del ecualizador transversal genérico de orden L_Q:

$$\mathbf{H}[k]=\sum_{l=0}^{L_Q}\mathbf{H}_l\delta[k-l]$$

En esta situación, el filtro ecualizador es de orden $L_Q=0$ y es una matriz de 4 coeficientes $\mathbf{H}_Q=\mathbf{H}$ tal que:

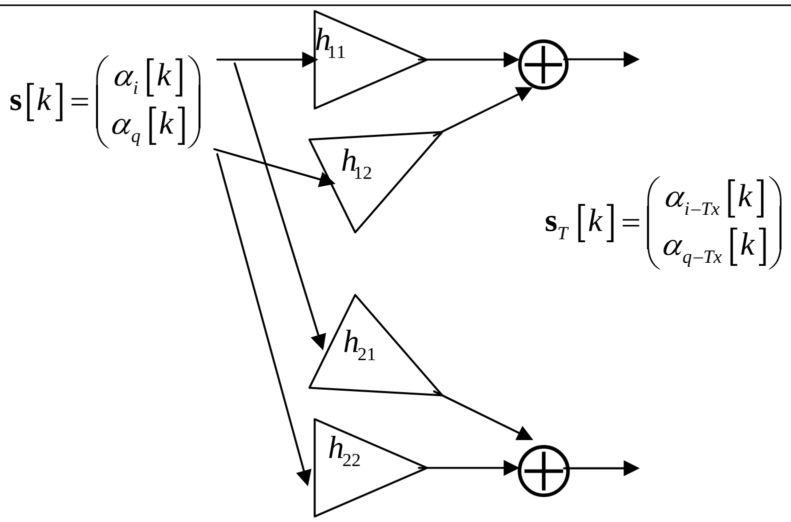
$$\mathbf{y}[k]=\mathbf{PHs}[k]+\mathbf{n}[k]=\mathbf{s}[k]+\mathbf{n}[k]$$

y por tanto, dado que los errores de sincronismo únicamente han provocado ICI y no han provocado ISI, se obtiene una ecualización perfecta siempre y cuando la matriz $\mathbf{P}$ sea invertible. En la situación aquí planteada:

$$\mathbf{P}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}(1+\gamma) & (1+\gamma)\\ -(1-\gamma) & (1-\gamma)\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}=\mathbf{P}^{-1}=\tfrac{1}{\sqrt{2}\left(1-\gamma^2\right)}\begin{pmatrix}(1-\gamma) & -(1+\gamma)\\ (1-\gamma) & (1+\gamma)\end{pmatrix}$$

El vector de señal transmitido resulta:

$$\mathbf{s}_T[k]=\begin{pmatrix}\alpha_{i-Tx}[k]\\ \alpha_{q-Tx}[k]\end{pmatrix}=\mathbf{Hs}[k]$$



h) Calcule para esta nueva situación la energía promedio E_b en función de la distancia mínima y de los coeficientes del ecualizador, sobre la señal transmitida $s(t)$.

Solución:

Dado que las dos funciones de la base generadora en transmisión siguen siendo las expresadas en la resolución del apartado a) y por tanto ortonormales, la energía media transmitida por bit se calcula como:

$$E_b = \tfrac{1}{2} E_{s_{Tx}} = \tfrac{1}{2} E\left[\alpha_{i-Tx}^2 + \alpha_{q-Tx}^2\right]$$

$$E\left[\alpha_{i-Tx}^2\right] = E\left[\left(h_{11}\alpha_i + h_{12}\alpha_q\right)^2\right] = \tfrac{1}{4} d^2 \left(\left(h_{11}\right)^2 + \left(h_{12}\right)^2\right)$$

$$E\left[\alpha_{q-Tx}^2\right] = E\left[\left(h_{21}\alpha_i + h_{22}\alpha_i\right)^2\right] = \tfrac{1}{4} d^2 \left(\left(h_{21}\right)^2 + \left(h_{22}\right)^2\right)$$

$$E_b = \tfrac{1}{8} d^2 \left(\left(h_{11}\right)^2 + \left(h_{12}\right)^2 + \left(h_{21}\right)^2 + \left(h_{22}\right)^2\right)$$

$$E_b = \tfrac{1}{16} \frac{1}{\left(1-\gamma^2\right)^2} d^2 \left(2\left(1+\gamma\right)^2 + 2(1-\gamma)^2\right) = \tfrac{1}{4} \frac{\left(1+\gamma^2\right)}{\left(1-\gamma^2\right)^2} d^2$$

i) Suponiendo que en la detección se mantienen los umbrales a utilizar en el caso sin errores del apartado c así como las mismas consideraciones, dibuje la constelación de señal recibida y calcule la probabilidad de error en función de $\frac{E_b}{N_0}$.

Solución:

La constelación de señal recibida se halla libre de ICI, por tanto coincide con la dibujada en el apartado b) y la distribución del ruido en recepción coincide con la presentada en el apartado e). Si se mantiene las zonas de decisión como los cuatro cuadrantes, la probabilidad de error resultante es:

$$P_e \simeq Q\left(\frac{d}{2\sigma_1}\right)+Q\left(\frac{d}{2\sigma_2}\right)=$$
$$Q\left(\sqrt{2\frac{\left(1-\gamma^2\right)^2}{\left(1+\gamma^2\right)(1+\gamma)^2}\frac{E_b}{N_0}}\right)+Q\left(\sqrt{2\frac{\left(1-\gamma^2\right)^2}{\left(1+\gamma^2\right)(1-\gamma)^2}\frac{E_b}{N_0}}\right)=$$
$$Q\left(\sqrt{2\frac{(1-\gamma)^2}{\left(1+\gamma^2\right)}\frac{E_b}{N_0}}\right)+Q\left(\sqrt{2\frac{(1+\gamma)^2}{\left(1+\gamma^2\right)}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Nota: Obsérvese, que debido a la distribución que presenta el ruido en esta situación, incorrelado pero de diferentes varianzas entre coordenadas, el cálculo de las zonas de decisión óptimas implicaría la aplicación del criterio MAP a partir de la función de ruido resultante:

$$\mathbf{n}[k]: N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\frac{N_0}{2}\begin{pmatrix}(1+\gamma)^2 & 0\\ 0 & (1-\gamma)^2\end{pmatrix}\right)=N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0\\ 0 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right)$$

El tipo de resolución que implicaría, pero que no se pide en este ejercicio, puede consultarla en la "Colección de ejercicios resueltos de Com2", Edicions UPC, Aula Politècnica 106, exactamente en el ejercicio del tema 2.3, control de noviembre 2001, resuelto por M. Cabrera.

j) A la vista de los resultados compare la probabilidad de error en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$, respecto a la situación del apartado c.

Solución:

La pérdida en dB viene dada por:

$$-10\log_{10}\left(\frac{(1-\gamma)^2}{\left(1+\gamma^2\right)}\right)$$