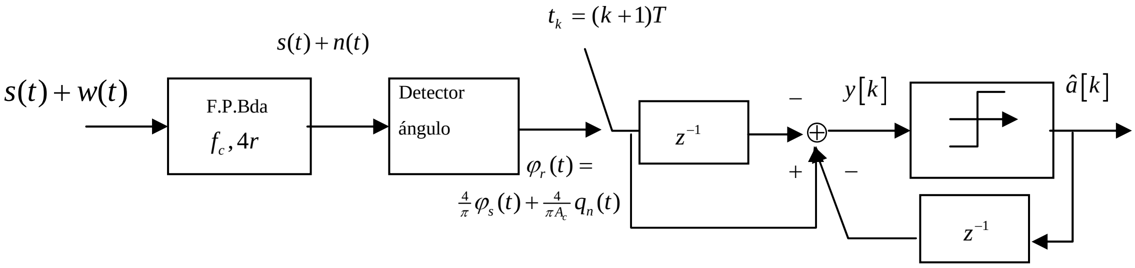
COMUNICACIONES II **Diciembre, 2006** **M. Cabrera**

Sea una modulación CPM: $s(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + \varphi_s(t)\right)$ con $\varphi_s(t) = 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$

La señal $x(t)$ corresponde a una modulación 2PAM polar de símbolos equiprobables $a[n] = a_m = \pm 1$ y pulsos $p(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right)\Pi\left(\frac{t-T}{2T}\right)$. La sensibilidad de frecuencias es $f_d = \frac{r}{4} = \frac{1}{4T}$. La señal se transmite a través de un canal AWGN de ruido $w(t) : S_w(f) = \frac{N_0}{2}$ y se demodula según el esquema de “Decisión Directed” de la figura:



El ruido de fase se puede aproximar por la componente en cuadratura del ruido paso banda a la salida del filtro receptor y su densidad espectral es: $S_{q_n}(f) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{4r}\right)$

a) Demuestre que la fase instantánea $\varphi_s(t)$ de la señal modulada se puede expresar como una modulación 2PAM de amplitudes $a[n] = a_m = \pm 1$ y calcule la forma temporal de los pulsos que la soportan a los que se denominará $q(t)$.

b) Calcule las muestras $\varphi_s(t_k) = \varphi_s\left((k+1)T\right)$ en función de la secuencia de símbolos $a[n]$.y halle la expresión de las muestras $y[k]$ distinguiendo entre señal útil, ISI y ruido.

c) Caracterice estadísticamente la secuencia de ruido de las muestras $y[k]$.

d) Halle las f.d.p. de las muestras $y(t_k) = y[k]$ condicionadas al símbolo transmitido $a[k] = a_m = \pm 1$ y dado que $P_b = \Pr\left(\hat{a}[k] = -a[k]\right)$.

e) Calcule finalmente la BER $= P_b$ en función del cociente de energías $\frac{E_b}{N_0}$.

Resolución

a) Demuestre que la fase instantánea $\varphi_s(t)$ de la señal modulada se puede expresar como una modulación 2PAM de amplitudes $a[n] = a_m = \pm 1$ y calcule la forma temporal de los pulsos que la soportan a los que se denominará $q(t)$.

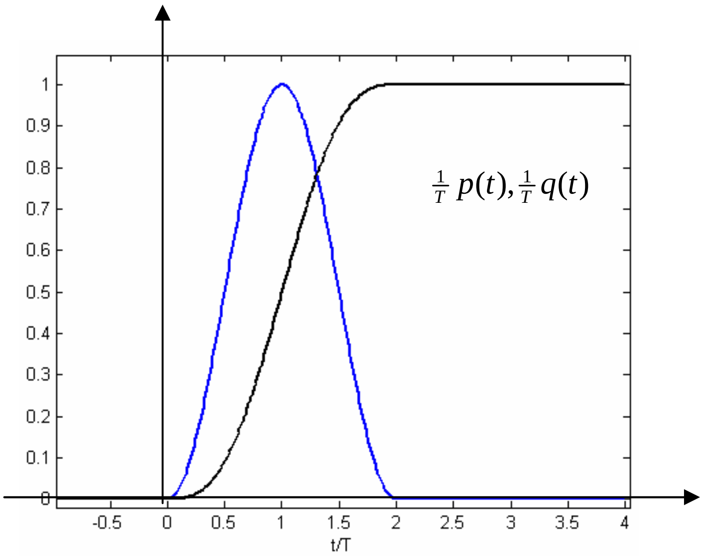
Solución:
Fase instantánea de la señal modulada:

$$\varphi_s(t) = 2\pi f_d \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda = 2\pi \tfrac{r}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \int_{-\infty}^{t} p(\lambda - nT)d\lambda =$$

$$\tfrac{\pi r}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \int_{-\infty}^{t-nT} p(\gamma)d\gamma = \tfrac{\pi r}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] q(t-nT)$$

Forma temporal de los pulsos $q(t)$:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\gamma)d\gamma = \int_{-\infty}^{t} \tfrac{1}{2}\left(1-\cos\left(\tfrac{\pi\gamma}{T}\right)\right)\Pi\left(\tfrac{\gamma-T}{2T}\right)d\gamma = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \tfrac{t}{2} - \tfrac{T}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{T}t\right) & 0 \le t \le 2T \\ T & 2T \le t \end{cases}$$



b) Calcule las muestras $\varphi_s(t_k) = \varphi_s((k+1)T)$ en función de la secuencia de símbolos $a[n]$ y halle la expresión de las muestras $y[k]$ distinguiendo entre señal útil, ISI y ruido.

Solución:

Las muestras de la fase son:

$$\varphi_s(t_k) = \tfrac{\pi r}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] q(t_k - nT) = \tfrac{\pi r}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] q((k+1-n)T) =$$

$$\tfrac{\pi r}{2} \sum_{n=-\infty}^{k-1} a[n]T + \tfrac{\pi r}{2}\tfrac{T}{2} a[k] = \tfrac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{k-1} a[n] + \tfrac{\pi}{4} a[k]$$

Dado que $a[n]=\pm 1$ lo largo de un símbolo, se producen incrementos de fase que resultan múltiplos impares de $\frac{\pi}{4}$

Muestras utilizadas en la detección:

$$y[k]=\tfrac{4}{\pi}\varphi_s(t_k)-\tfrac{4}{\pi}\varphi_s(t_{k-1})-\hat{a}[k-1]=$$
$$2\sum_{n=-\infty}^{k-1}a[n]+a[k]+\tfrac{4}{\pi}\tfrac{q_n(t_k)}{A_c}-2\sum_{n=-\infty}^{k-2}a[n]-a[k-1]-\tfrac{4}{\pi}\tfrac{q_n(t_{k-1})}{A_c}-\hat{a}[k-1]=$$
$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Útil}}}{a[k]}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ISI}}}{\left(a[k-1]-\hat{a}[k-1]\right)}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Ruido}}}{\left(\tfrac{4}{\pi}\tfrac{q_n(t_k)}{A_c}-\tfrac{4}{\pi}\tfrac{q_n(t_{k-1})}{A_c}\right)}$$

c) Caracterice estadísticamente la secuencia de ruido de las muestras $y[k]$.

Solución:

El término de ruido resultante en la etapa de detección es:

$$\beta[k]=\tfrac{4}{\pi}\tfrac{q_n(t_k)}{A_c}-\tfrac{4}{\pi}\tfrac{q_n(t_{k-1})}{A_c}=\tfrac{4}{\pi A_c}\left(q_n(t_k)-q_n(t_{k-1})\right)$$

Donde la componente en cuadratura del ruido se caracteriza por las siguientes funciónes de densidad espectral y de autocorrelación respectivamente:

$$S_{q_n}(f)=N_0\Pi\left(\tfrac{f}{4r}\right)\Rightarrow R_{q_n}(\tau)=N_0 4r\mathrm{sinc}\left(\pi 4r\tau\right)$$

La potencia de las muestras de ruido en detección es igual a:

$$\sigma^2=E\left[\beta[k]^2\right]=\left(\tfrac{4}{\pi A_c}\right)^2 E\left[\left(q_n(t_k)-q_n(t_{k-1})\right)^2\right]=$$
$$\left(\tfrac{4}{\pi A_c}\right)^2\left(2R_{q_n}(0)-R_{q_n}(+T)-R_{q_n}(-T)\right)=\left(\tfrac{4}{\pi A_c}\right)^2 N_0 4r\left(2\text{-}2\mathrm{sinc}\left(\pi 4\right)\right)=\tfrac{128}{\pi^2 A_c^2}N_0 r$$

Y su distribución:

$$\beta[k]:N(0,\sigma^2)$$

d) Halle las f.d.p. de las muestras $y(t_k)=y[k]$ condicionadas al símbolo transmitido $a[k]=a_m=\pm 1$ y dado que $P_b=\Pr\left(\hat{a}[k]=-a[k]\right)$.

Solución:

Se calculan $f_{y|+1}\left(y[k]|a_m=+1\right)$ y $f_{y|-1}\left(y[k]|a_m=-1\right)$

El término de ISI es igual a cero cuando el símbolo anterior se ha detectado correctamente ($a[k-1]=\hat{a}[k-1]$), lo que ocurre con una probabilidad igual a $1-P_b$, siendo $P_b=BER$

$$ISI[k]=\left(a[k-1]-\hat{a}[k-1]\right)=\begin{cases}0 & \text{Prob: } 1-P_b\\ +2 & \text{Prob: } \frac{P_b}{2}\\ -2 & \text{Prob: } \frac{P_b}{2}\end{cases}$$

De donde se deduce que:

$$\begin{aligned}f_{y|+1}\left(y[k]|a_m=+1\right)&=(1-P_b)\,f_\beta(y-1)+\tfrac{P_b}{2}f_\beta(y-3)+\tfrac{P_b}{2}f_\beta(y+1)\\ f_{y|-1}\left(y[k]|a_m=-1\right)&=(1-P_b)\,f_\beta(y+1)+\tfrac{P_b}{2}f_\beta(y+3)+\tfrac{P_b}{2}f_\beta(y-1)\end{aligned}$$

Donde $f_\beta(\beta)$ es la f.d.p. de la muestra de ruido $\beta[k]$:

$$f_\beta(\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\sigma^2}}$$

e) Calcule finalmente la $\text{BER}=P_b$ en función del cociente de energías $\frac{E_b}{N_0}$.

Solución:

Por ser la señal CPM de envolvente constante la energía media de bit se obtiene como:

$$E_b=P_sT=\frac{A_c^2}{2r}$$

Por otro lado la probabilidad de error es igual a:

$$\begin{aligned}&P_b=(1-P_b)Q\left(\tfrac{1}{\sigma}\right)+\tfrac{P_b}{2}Q\left(\tfrac{3}{\sigma}\right)+\tfrac{P_b}{2}\left(1-Q\left(\tfrac{1}{\sigma}\right)\right)\Rightarrow\\ &P_b\left(1+Q\left(\tfrac{1}{\sigma}\right)-\tfrac{1}{2}Q\left(\tfrac{3}{\sigma}\right)+\tfrac{1}{2}Q\left(\tfrac{1}{\sigma}\right)\right)=Q\left(\tfrac{1}{\sigma}\right)\Rightarrow\\ &P_b=\frac{Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{1+\frac{3}{2}Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}Q\left(\frac{3}{\sigma}\right)}\end{aligned}$$

Sustituyendo la potencia de ruido:

$$\sigma^2=\frac{128}{\pi^2A_c^2}N_0r=\frac{64}{\pi^2}\frac{N_0}{E_b}$$

en la probabilidad de error:

$$P_b = \frac{Q\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{64}\frac{E_b}{N_0}}\right)}{1+\frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{64}\frac{E_b}{N_0}}\right)-\frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{9\pi^2}{64}\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$