

Tema 4: Modulaciones Digitales Paso Banda
COMII
ETSETB-UPC

Este documento pretende ser una ayuda para el estudio del tema 4 de la asignatura COMII de la ETSETB (Plan de Ing. en Telecomunicaciones), UPC.

Margarita Cabrera
Profesora de Comunicaciones II
Dept. TSC
ETSETB-UPC
Septiembre, 2009

4	Modulaciones Digitales Paso Banda	2
4.1	Introducción.....	2
4.2	Densidad Espectral	2
4.2.1	Función de correlación.	3
4.2.2	Función de autocorrelación promedio	4
4.2.3	Función de densidad espectral.....	4
4.3	Modulaciones Lineales Paso-Banda.....	4
4.3.1	Diagrama de Bloques del Transmisor y del Receptor	6
4.3.2	ASK: Amplitude Shift Keying	8
4.3.3	PSK (MPSK+QPSK).....	9
4.3.4	Modulaciones QAM Cuadradas	10
4.3.5	Errores de sincronismo de portadora	10
4.3.6	Modulación Offset-QPSK	12
4.3.7	Ejemplo de Comparación	15
4.4	Modulaciones FSK	20
4.4.1	Condición de ortogonalidad	21
4.4.2	Probabilidad de error para FSK ortogonal.....	22
4.4.3	Ejemplo: 2FSK	22
4.5	Modulaciones CPM: Continuous Phase Modulation	25
4.5.1	Modulación y expresión de la señal CPM.....	25
4.5.2	Análisis de la fase instantánea:	26
4.5.3	Modulación Minimum Shift Keying (MSK).....	27
4.5.4	Modulación Gaussian MSK	32
4.6	Ejercicios Propuestos.....	36
4.6.1	Ejercicio 1: DPSK	36

4 Modulaciones Digitales Paso Banda

4.1 Introducción

Las Modulaciones Paso Banda pueden expresarse en función de las componentes en fase y en cuadratura, es decir, en función de la señal equivalente paso bajo. En el caso de modulaciones digitales, tanto la componente en fase como la componente en cuadratura resultan cada una de ellas una modulación digital paso bajo.

En este tema se presentan dos tipos de diferenciados de modulaciones digitales paso banda. Las lineales, a las que en general se las denomina QAM (Quadrature Amplitude Modulation) y las no lineales, con especial atención a las modulaciones de frecuencia FSK (Frequency Shift Keying) y a las modulaciones de fase continua CPM (Continuous Phase Modulation).

El primer grupo, modulaciones QAM, resulta un caso particular de modulaciones fácilmente caracterizables mediante el espacio de señal. Su análisis da lugar a un espacio de señal de dimensión $L=2$, donde las dos funciones de la base ortonormales coincide cada una de ellas con una de las componentes en fase y en cuadratura (I&Q a partir de este punto).

El segundo grupo de modulaciones, las no lineales, en general se caracterizan pero mediante el espacio de señal, por lo que el espacio de señal se utiliza únicamente para determinadas modulaciones no lineales. En general, las modulaciones CPM se detectan mediante un receptor no óptimo y su ventaja reside en su eficiencia espectral, ya que presentan un ancho de banda reducido, comparado con modulaciones lineales.

4.2 Densidad Espectral

Para calcular la función de densidad espectral, tenemos dos posibilidades. Una de ellas consiste en realizar el análisis desde la perspectiva de espacio de señal, identificando las funciones de la base ortonormal generadora del espacio de señal y aplicando la teoría desarrollada en el tema 3. La segunda alternativa, que conduce al mismo resultado, consiste en realizar el análisis como proceso aleatorio paso-banda y aplicar, por tanto, la teoría desarrollada en la asignatura de Comunicaciones I. Mediante ambas alternativas se ha de obtener idéntico resultado.

A continuación se presenta el desarrollo desde la perspectiva de proceso aleatorio paso-banda.

Se obtiene como paso previo la función de correlación $R_s(t + \tau, t) = E[s(t + \tau)s(t)]$. Dado que al tratar con modulaciones digitales, dichas señales resultan cicloestacionarias, se obtendrá la función de correlación promedio $\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \int R_s(t + \tau, t) dt$ en un cicloperiodo y finalmente la función de densidad espectral $S_s(f) = TF[\hat{R}_s(\tau)]$.

En esta sección se obtiene la función de densidad espectral del proceso paso banda, en función de la densidad espectral del proceso pasobajo, formado por las componentes en fase y en cuadratura.

4.2.1 Función de correlación.

Interpretando la modulación digital paso banda como:

$$s(t) = A_c i_s(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) - A_c q_s(t) \sin(2\pi f_c t + \theta_c)$$

y considerando las componentes I&Q como procesos aleatorios de funciones de correlación:

$$\begin{aligned} R_{i_s}(t + \tau, t) &= E[i_s(t + \tau)i_s(t)] \\ R_{q_s}(t + \tau, t) &= E[q_s(t + \tau)q_s(t)] \\ R_{i_s q_s}(t + \tau, t) &= E[i_s(t + \tau)q_s(t)] \\ R_{q_s i_s}(t + \tau, t) &= E[q_s(t + \tau)i_s(t)] \end{aligned}$$

se obtiene la función de correlación para el proceso $s(t)$:

$$\begin{aligned} R_s(t + \tau, t) &= E[s(t + \tau)s(t)] = \\ &E[(A_c i_s(t + \tau) \cos(2\pi f_c(t + \tau) + \theta_c) - A_c q_s(t + \tau) \sin(2\pi f_c(t + \tau) + \theta_c)) \\ &(A_c i_s(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) - A_c q_s(t) \sin(2\pi f_c t + \theta_c))] = \\ &+R_{i_s}(t + \tau, t) \frac{A_c^2}{2} (\cos(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\theta_c) + \cos(2\pi f_c \tau)) \\ &+R_{q_s}(t + \tau, t) \frac{A_c^2}{2} (-\cos(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\theta_c) + \cos(2\pi f_c \tau)) \\ &-R_{i_s q_s}(t + \tau, t) \frac{A_c^2}{2} (\sin(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\theta_c) - \sin(2\pi f_c \tau)) \\ &-R_{q_s i_s}(t + \tau, t) \frac{A_c^2}{2} (\sin(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\theta_c) + \sin(2\pi f_c \tau)) \end{aligned} \quad (1)$$

En general, se asume que se cumple la siguiente condición. Si no fuera cierta, se debería retomar el análisis desde este punto.

$$R_{i_s q_s}(t + \tau, t) = R_{q_s i_s}(t + \tau, t) = 0$$

Con ello, una primera simplificación para la expresión en (1), resulta:

$$\begin{aligned} R_s(t + \tau, t) &= \\ &R_{i_s}(t + \tau, t) \frac{A_c^2}{2} (\cos(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\theta_c) + \cos(2\pi f_c \tau)) \\ &+R_{q_s}(t + \tau, t) \frac{A_c^2}{2} (-\cos(2\pi f_c(2t + \tau) + 2\theta_c) + \cos(2\pi f_c \tau)) \end{aligned} \quad (2)$$

Asumiendo que el cicloperíodo de las componentes I&Q, T , es a su vez múltiplo del período de portadora, $f_c = Nr$ $T = NT_c$ $N \gg 1$, propiedad que se justifica más adelante, el promedio de la función de autocorrelación en el cicloperíodo resulta:

$$\begin{aligned}
 R_{i_s}(t + \tau, t) &= R_{i_s}(t + \tau + T, t + T) \\
 R_{q_s}(t + \tau, t) &= R_{q_s}(t + \tau + T, t + T) \\
 \Rightarrow \\
 R_s(t + \tau, t) &= R_s(t + \tau + T, t + T)
 \end{aligned}$$

4.2.2 Función de autocorrelación promedio

Realizando el promedio de la función de autocorrelación en el ciclo periodo, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_s(\tau) &= \frac{1}{T} \int R_s(t + \tau, t) dt = \\
 &= \frac{A_c^2}{2} \left(\frac{1}{T} \int R_{i_s}(t + \tau, t) dt \cos(2\pi f_c \tau) + \frac{1}{T} \int R_{q_s}(t + \tau, t) dt \cos(2\pi f_c \tau) \right) = \\
 &= \frac{A_c^2}{2} \left(\hat{R}_{i_s}(\tau) + \hat{R}_{q_s}(\tau) \right) \cos(2\pi f_c \tau)
 \end{aligned}$$

4.2.3 Función de densidad espectral.

Realizando la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
 S_s(f) &= TF \left[\hat{R}_s(\tau) \right] = \\
 &= \frac{A_c^2}{4} S_{i_s}(f - f_c) + \frac{A_c^2}{4} S_{i_s}(f + f_c) + \frac{A_c^2}{4} S_{q_s}(f - f_c) + \frac{A_c^2}{4} S_{q_s}(f + f_c)
 \end{aligned} \tag{3}$$

Las expresiones (2) y (3) se simplifican o bien toman valores, muy particulares en función del tipo de modulación considerado.

4.3 Modulaciones Lineales Paso-Banda

Mediante una señal digital PAM se puede modular la amplitud, la frecuencia o la fase de una portadora sinusoidal.

En 4.3 se analizan únicamente aquellas modulaciones en las que tanto la componente en fase como la componente en cuadratura de la modulación corresponden a modulaciones PAM, denominadas en general modulaciones QAM (Quadrature-Amplitude Modulation).

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(I[n] p(t - nT) A_c \cos(2\pi f_c t + \theta_c) - Q[n] p(t - nT) A_c \sin(2\pi f_c t + \theta_c) \right) \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 i_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n] p(t - nT) \\
 q_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q[n] p(t - nT)
 \end{aligned}$$

En general, se asume que los símbolos son equiprobables, estadísticamente independientes en tiempo y en número M igual a una potencia de 2.

$$\Pr\{I[n] + jQ[n] = (I + jQ)_m\} = \frac{1}{M}; \quad M = 2^b$$

donde por comodidad se han definido símbolos complejos, haciendo coincidir la parte real del símbolo con el símbolo de la modulación PAM correspondiente a la componente en fase y la parte imaginaria del símbolo con el símbolo de la modulación PAM correspondiente a la componente en cuadratura.

Por temas de obtención de las diferentes señales de reloj que se utilizan tanto en el modulador como en el demodulador, es frecuente que se cumpla la siguiente relación entre frecuencia portadora y velocidad de símbolo.

$$f_c = Nr \quad T = NT_c \quad N \gg 1 \quad (5)$$

En cuyo caso, se puede generar el espacio de señal a partir de las funciones:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi_i(t) = +\sqrt{2}p(t)\cos(2\pi f_c t + \theta_c) \\ \varphi_2(t) &= \varphi_q(t) = -\sqrt{2}p(t)\sin(2\pi f_c t + \theta_c) \end{aligned} \quad (6)$$

donde $p(t)$ corresponde a un pulso cualquiera elegido habitualmente en modulaciones PAM, de energía igual a uno y cuya función de autocorrelación cumple las condiciones de ISI nula. El signo negativo elegido para la componente en cuadratura es útil para que la representación del espacio de señal transmitido, coincida con la representación de la constelación de señal tal como se define para modulaciones QAM.

Obsérvese que si el pulso cumple $R_p(mT) = \delta[m]$, las dos funciones generadoras del espacio de señal presentadas en (6) cumplen las condiciones de ISI, ICI nulas:

$$\begin{aligned} R_{\varphi_i}(\tau) &= R_{\varphi_q}(\tau) = R_p(\tau)\cos(2\pi f_c \tau) \\ R_{\varphi_q\varphi_i}(\tau) &= -R_{\varphi_i\varphi_q}(\tau) = -R_p(\tau)\sin(2\pi f_c \tau) \\ R_{\varphi_i}(mT) &= R_{\varphi_q}(mT) = R_p(mT)\cos(2\pi mN) = \delta[m] \\ R_{\varphi_q\varphi_i}(mT) &= -R_{\varphi_i\varphi_q}(mT) = -R_p(mT)\sin(2\pi mN) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

En la Figura 1, se presenta un ejemplo de funciones, para el caso en que el pulso elegido sea rectangular.

$$\begin{aligned} \varphi_i(t) &= +\sqrt{2}p(t)\cos(2\pi f_c t + \theta_c); \quad \varphi_q(t) = -\sqrt{2}p(t)\sin(2\pi f_c t + \theta_c) \\ p(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right); \quad T = NT_c; \quad N = 5; \quad \theta_c = 0 \end{aligned}$$

En el desarrollo de las propiedades anteriores se ha considerado que se cumple (5), pues de lo contrario, las condiciones (7), solo serían válidas de forma aproximada.

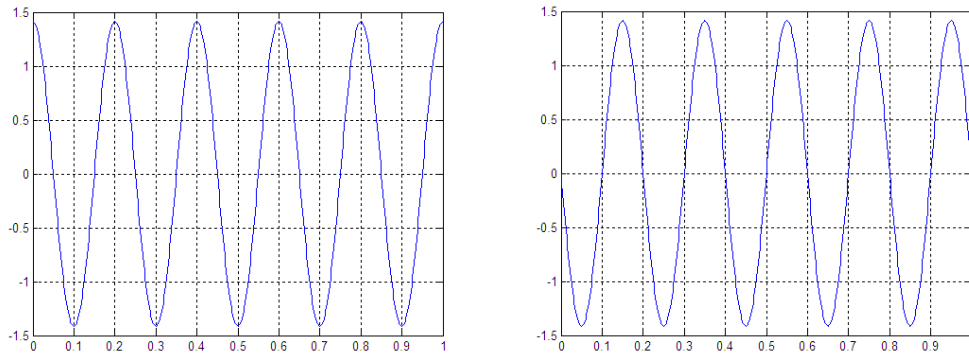


Figura 1 Ejemplo de funciones $\varphi_i(t)$, $\varphi_q(t)$. El eje temporal se halla normalizado al tiempo de símbolo.

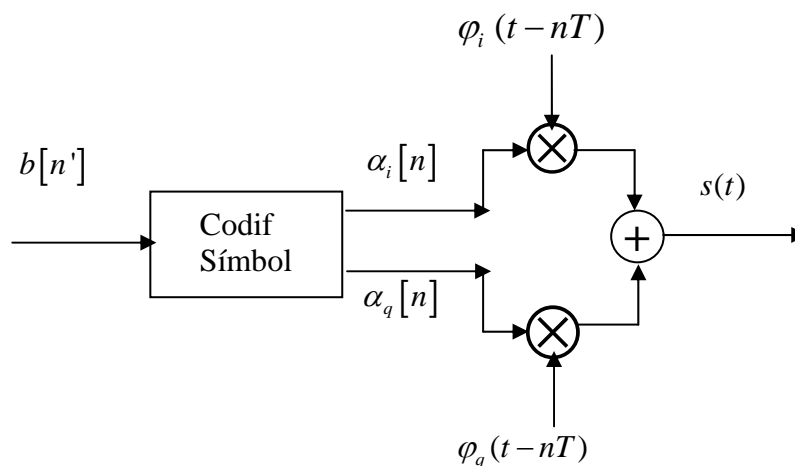
En estas condiciones la señal QAM expresada en (4) queda expresada mediante las funciones (6)

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha_i[n] \varphi_i(t-nT) + \alpha_q[n] \varphi_q(t-nT)) \quad (8)$$

con $\alpha_i[n] = \frac{A_c}{\sqrt{2}} I[n]$ $\alpha_q[n] = \frac{A_c}{\sqrt{2}} Q[n]$

4.3.1 Diagrama de Bloques del Transmisor y del Receptor

En la Figura 2 se presentan el diagrama de bloques funcional del modulador, tanto en la versión espacio de señal, como desde la perspectiva de Up-Conversion. Ambos esquemas son equivalentes y producen la misma señal.



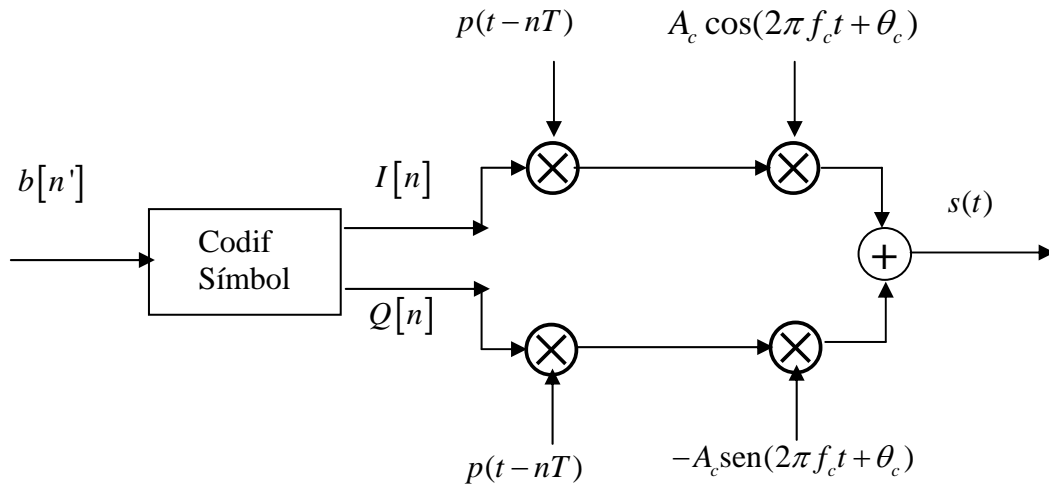
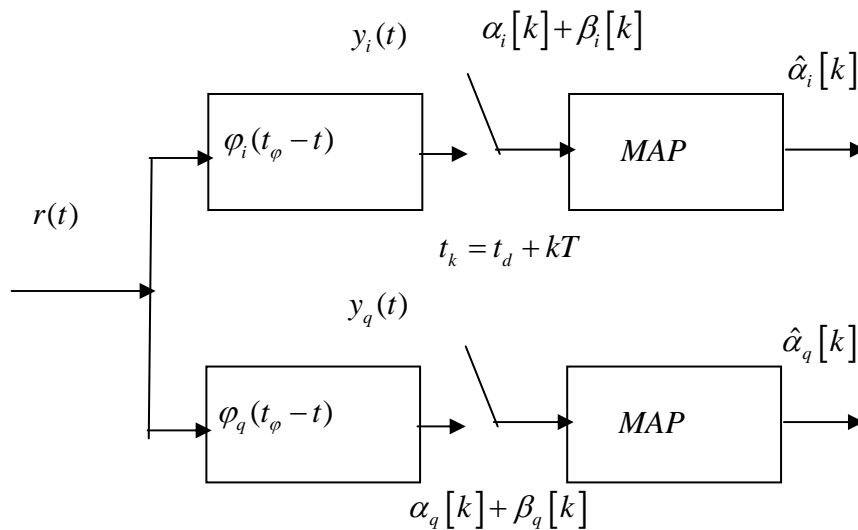


Figura 2 Diagrama de bloques funcional para modulaciones digitales con espacio de señal de dimensión $L=2$. Ambos esquemas son equivalentes. En el primero pueden distinguirse las etapas Software/Hardware. En el segundo pueden distinguirse las etapas Software/Hardware y dentro de la parte Hardware, la parte de conformación de pulso y la parte de Up-Conversion.

En la Figura 2 se presentan el diagrama de bloques funcional del receptor óptimo, tanto en la versión espacio de señal, como desde la perspectiva de Down-Conversion. Ambos esquemas son equivalentes y producen la misma probabilidad de error.



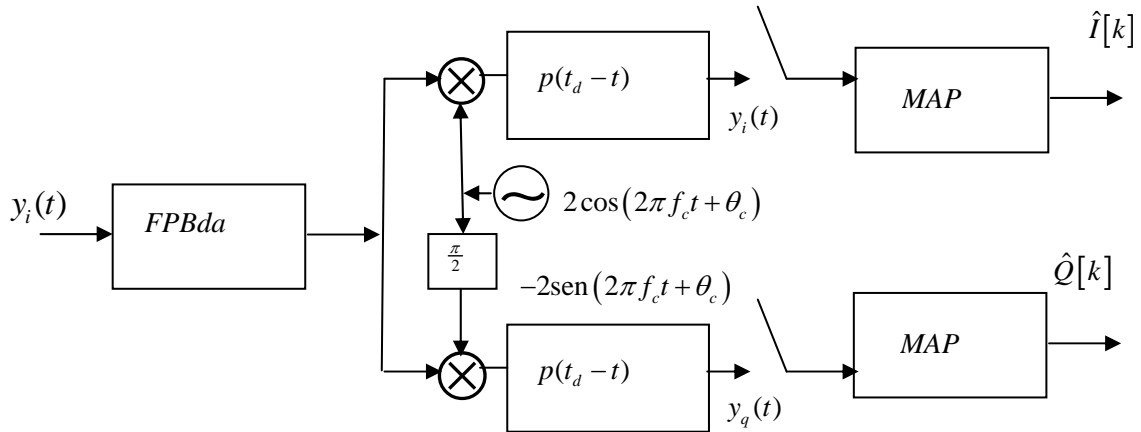


Figura 3 Diagrama de bloques funcional para el receptor óptimo para modulaciones digitales paso-banda lineales. Ambos esquemas son equivalentes. En el primero pueden distinguirse las etapas Hardware/ Software. En el segundo pueden distinguirse las etapas Hardware/ Software y dentro de la parte Hardware, la parte de down-Conversion y la parte de filtro adaptado.

4.3.2 ASK: Amplitude Shift Keying

Mediante este tipo de modulación solo se presenta la componente en fase, la dimensión del espacio de señal resulta $L=1$ y las coordenadas $\alpha_i[n] = \frac{A_c}{\sqrt{2}} I[n]$ modulan directamente la amplitud. El pulso utilizado es rectangular.

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n] p(t - nT) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_i[n] \phi_i(t - nT)$$

Codificación de símbolos y elección de pulso

$$I[n] = 0, A, \dots, (M-1)A$$

$$\alpha_i[n] = \frac{A_c}{\sqrt{2}} (0, A, \dots, (M-1)A) = d (0, 1, \dots, (M-1))$$

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

Energía media de bit:

$$E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{d^2}{b} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} m^2 = \frac{(M-1)(2M-1)}{6} \frac{d^2}{b} = \frac{2M^2 - 3M + 1}{6} \frac{d^2}{b}$$

La BER en detección para canal ideal de atenuación cero dB y ruido gaussiano es

$$BER = P_b = \frac{2(M-1)}{bM} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = \frac{2(M-1)}{bM} Q\left(\sqrt{\frac{3b}{(M-1)(2M-1)} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

4.3.3 PSK (MPSK+QPSK)

Mediante este tipo de modulación la dimensión del espacio de señal resulta $L=2$ y las coordenadas $\alpha_i[n] = \frac{A_c}{\sqrt{2}} I[n]$, $\alpha_q[n] = \frac{A_c}{\sqrt{2}} Q[n]$ modulan directamente la fase de la señal portadora. El pulso utilizado es rectangular.

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha_i[n] \varphi_i(t-nT) + \alpha_q[n] \varphi_q(t-nT)) = \\ &= \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} ((I[n] + jQ[n]) p(t-nT)) A_c e^{j(2\pi f_c t + \theta_c)} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (e^{j(2\pi f_c t + \theta_c + \phi[n])} p(t-nT)) \right] \end{aligned}$$

Codificación de símbolos y elección de pulso

$$\begin{aligned} \alpha_i[n] &= \frac{A_c}{\sqrt{2}} \cos \phi[n] \\ \alpha_q[n] &= \frac{A_c}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \phi[n] \\ \phi_{MPSK}[n] &= \phi_m = \frac{2\pi}{M} (0, 1, \dots, (M-1)) \\ \phi_{QPSK}[n] &= \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \\ p(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \end{aligned}$$

Vector de Señal:

$$\mathbf{s}[n] = \begin{pmatrix} \alpha_i[n] \\ \alpha_q[n] \end{pmatrix} = \frac{A_c}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \phi[n] \\ \operatorname{sen} \phi[n] \end{pmatrix} = \sqrt{bE_b} \begin{pmatrix} \cos \phi[n] \\ \operatorname{sen} \phi[n] \end{pmatrix}$$

Distancia entre dos símbolos y relación con la energía media de bit:

$$\begin{aligned} d^2 &= \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|^2 = bE_b \left\| \begin{pmatrix} \cos \phi_1 \\ \operatorname{sen} \phi_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \phi_2 \\ \operatorname{sen} \phi_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \\ &= bE_b \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{M} \\ \operatorname{sen} \frac{2\pi}{M} \end{pmatrix} \right\|^2 = bE_b (2 - 2 \cos^2 \frac{2\pi}{M}) = 4bE_b \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{M} \end{aligned}$$

La probabilidad de error de símbolo para canal ideal de atenuación cero dB y ruido gaussiano se puede obtener a partir de la cota superior:

$$P_e \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{d}{2\sigma}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{2b \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

4.3.4 Modulaciones QAM Cuadradas

En las modulaciones con constelaciones cuadradas, se tiene que el número total de símbolos es una potencia de 4 y por tanto, el número de bits codificados por símbolo es par.

$$M = 2^b = 2^{2b'}$$

En estas condiciones, cada símbolo resulta $\mathbf{s}[n] = \begin{pmatrix} \alpha_i[n] \\ \alpha_q[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,m} \\ \alpha_{q,m} \end{pmatrix}$ con $\alpha_{i,m}$ un valor cualquiera de $\left(-\frac{\sqrt{M-1}}{2}d, \dots, -\frac{1}{2}d, +\frac{1}{2}d, \dots, +\frac{\sqrt{M-1}}{2}d\right)$ y $\alpha_{q,m}$ un valor cualquiera de $\left(-\frac{\sqrt{M-1}}{2}d, \dots, -\frac{1}{2}d, +\frac{1}{2}d, \dots, +\frac{\sqrt{M-1}}{2}d\right)$.

Es equivalente a tener una codificación polar de $\sqrt{M} = 2^{b'}$ niveles para la componente en fase, obtenida a partir de los bits pares codificados de b' en b' y de forma independiente una codificación polar de $\sqrt{M} = 2^{b'}$ niveles para la componente en cuadratura, obtenida a partir de los bits pares codificados de b' en b' .

En estas condiciones cada una de las ramas fase y cuadratura se puede detectar de forma independiente, y por tanto calcula su probabilidad de error también de forma independiente.

La energía media transmitida por bit se relaciona con la distancia mínima entre símbolos d .

$$E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{1}{b} (\sigma_{\alpha_i}^2 + \sigma_{\alpha_q}^2) = \frac{M-1}{6b} d^2$$

En estas condiciones, la BER en detección para canal ideal de atenuación cero dB y ruido gaussiano se puede calcular únicamente para los bits de una componente, ya que coinciden entre sí.

$$BER = P_b = \frac{2(\sqrt{M}-1)}{\frac{b}{2}\sqrt{M}} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = \frac{4(\sqrt{M}-1)}{b\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3b}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

4.3.5 Errores de sincronismo de portadora

Para evaluar el efecto de los errores de sincronismo de portadora, se considerarán las siguientes funciones en recepción $\varphi_{Rx,i}(t)$, $\varphi_{Tx,q}(t)$, que corresponden a las funciones de la base con un error de fase de portadora: ε_c .

$$\varphi_{Rx,i}(t) = +\sqrt{2}p(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c + \varepsilon_c) = \cos(\varepsilon_c) \varphi_i(t) + \sin(\varepsilon_c) \varphi_q(t)$$

$$\varphi_{Tx,q}(t) = -\sqrt{2}p(t) \sin(2\pi f_c t + \theta_c + \varepsilon_c) = -\sin(\varepsilon_c) \varphi_i(t) + \cos(\varepsilon_c) \varphi_q(t)$$

Por tanto, a la salida del primer filtro adaptado a $\varphi_{Rx,i}(t)$, la señal muestreada, suponiendo canal AWGN ideal de atenuación 0dB, se puede expresar como:

$$y_i(t_k) = y_i[k] = +\cos(\varepsilon_c)\alpha_i[k] + \text{sen}(\varepsilon_c)\alpha_q[k] + \beta_i[k]$$

$$y_q(t_k) = y_q[k] = -\text{sen}(\varepsilon_c)\alpha_i[k] + \cos(\varepsilon_c)\alpha_q[k] + \beta_q[k]$$

Es decir, se ha producido un giro en la constelación de la señal:

$$y_i[k] + jy_q[k] = (\alpha_i[k] + j\alpha_q[k])e^{-j\varepsilon_c} + (\beta_i[k] + j\beta_q[k])$$

o bien de forma matricial:

$$\mathbf{y}[k] = \begin{pmatrix} y_i[k] \\ y_q[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon_c) & \text{sen}(\varepsilon_c) \\ -\text{sen}(\varepsilon_c) & \cos(\varepsilon_c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i[k] \\ \alpha_q[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_i[k] \\ \beta_q[k] \end{pmatrix}$$

Los efectos sobre la constelación de la señal, se pueden ver en la Figura 4.

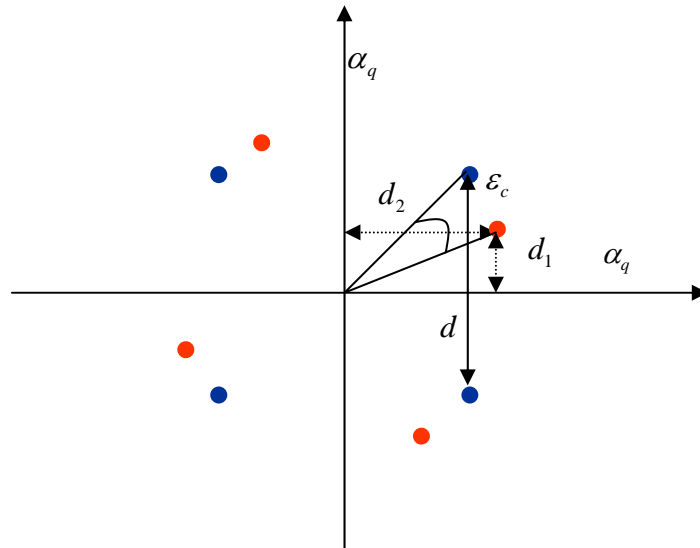


Figura 4 Modulación QPSK. Constelación transmitida en color azul y recibida en color rojo. Se supone $\varepsilon_c < \frac{\pi}{4}$.

Las distancias suponiendo $\varepsilon_c < \frac{\pi}{4}$, por ejemplo del símbolo en el primer cuadrante respecto a cada uno de los ejes, para la señal transmitida son igual a $\frac{d}{2}$ y para la señal recibida son igual a

$$d_1 = \frac{d}{\sqrt{2}} \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon_c\right)$$

$$d_2 = \frac{d}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon_c\right)$$

De este modo, la probabilidad de error de símbolo para nivel alto de $\frac{E_b}{N_0}$ errores de fase ε_c pequeños, se puede aproximar por:

$$P_e \approx Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon_c\right) 4 \frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon_c\right) 4 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

4.3.6 Modulación Offset-QPSK

La modulación Offset-QPSK consiste en una modulación QPSK de pulsos rectangulares, en la que se ha limitado la máxima variación de fase instantánea. Así como en una modulación QPSK convencional, se llegan a producir saltos de $\pm\pi$ rad. entre dos símbolos consecutivos, en la modulación Offset-QPSK (OQPSK) estos saltos de fase instantánea se reducen a la mitad $\pm\frac{\pi}{2}$ rad., evitando que la componente en fase y la componente en cuadratura cambien de signo simultáneamente.

La limitación del máximo salto de fase instantánea, es útil cuando la señal se amplifica mediante amplificadores de alta potencia, próximos a presentar un comportamiento no lineal. Como ejemplo, este tipo de amplificadores son frecuentes en transponders de satélites. El efecto sobre la señal, de las no linealidades empeora con el nivel de salto de fase, por lo que en este sentido OQPSK presenta ventajas respecto a QPSK.

Para evitar que ambas componentes cambien de signo simultáneamente en el transmisor, la componente en cuadratura se retarda temporalmente un tiempo equivalente a medio periodo de símbolo: $\frac{T}{2}$, y posteriormente en recepción, en paso bajo, se retarda la componente en fase temporalmente un tiempo equivalente a medio periodo de símbolo: $\frac{T}{2}$, y de este modo quedan de nuevo las dos componentes sincronizadas.

En la Figura 5 se presenta el diagrama de bloques para el transmisor OQPSK.

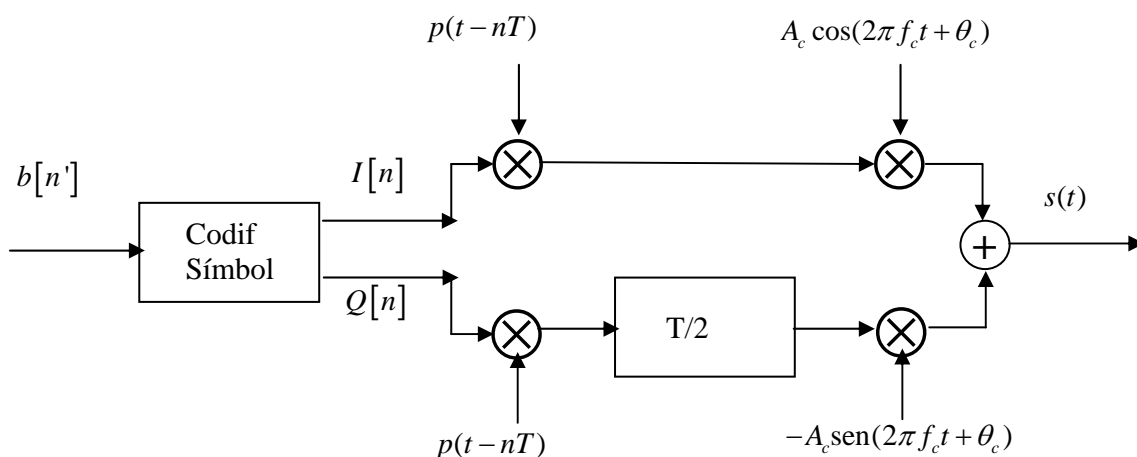


Figura 5 Diagrama de bloques transmisor OQPSK

En la Figura 6 se presenta el diagrama de bloques para el receptor OQPSK.

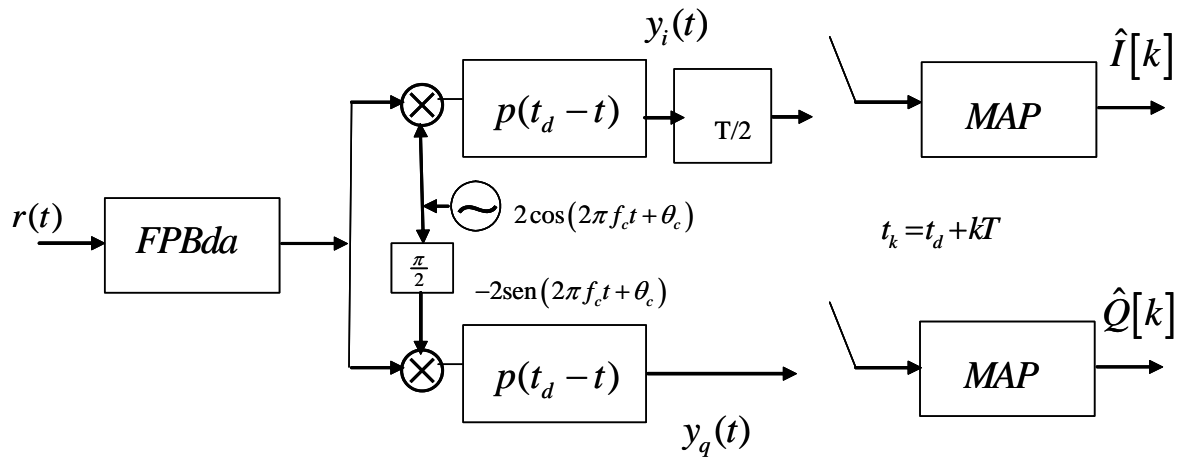


Figura 6 Diagrama de bloques receptor OQPSK

En la Figura 7 se muestra la evolución temporal para las componentes I&Q para modulación QPSK y sobre la constelación de fase se halla indicado el máximo salto de fase instantáneo producido a partir del ejemplo.

En la Figura 8 se muestra la evolución temporal para las componentes I&Q para modulación OQPSK y sobre la constelación de fase se halla indicado el máximo salto de fase instantáneo producido a partir del ejemplo.

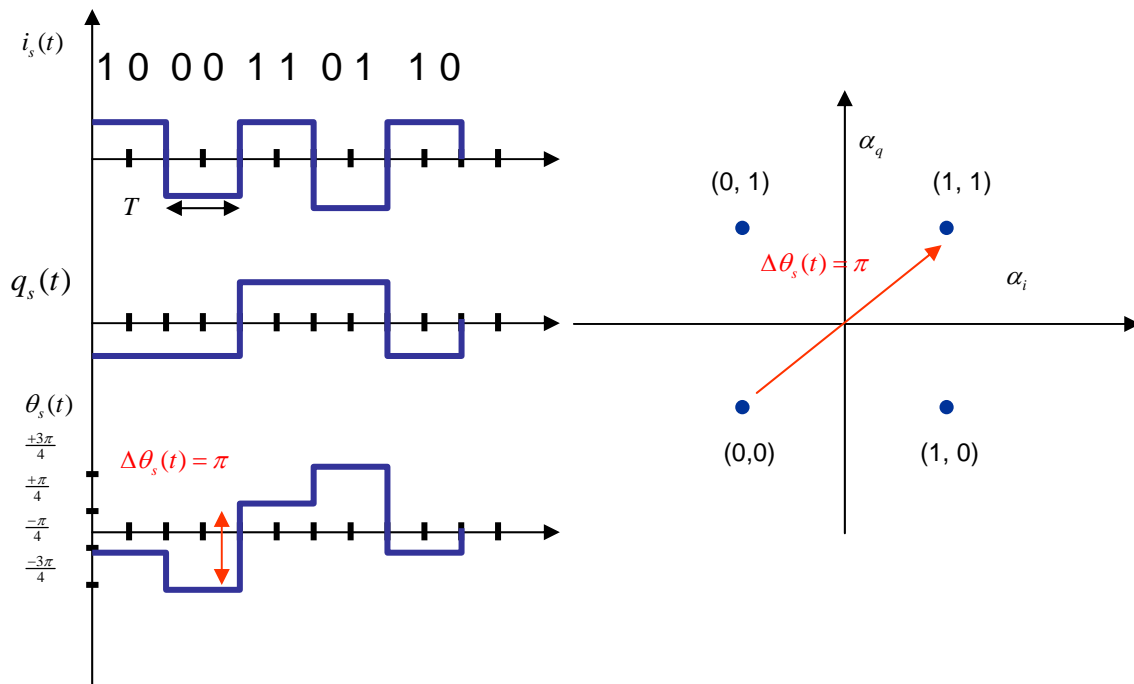


Figura 7 Evolución de las componentes en fase y en cuadratura y diagrama de fase para la modulación QPSK convencional.

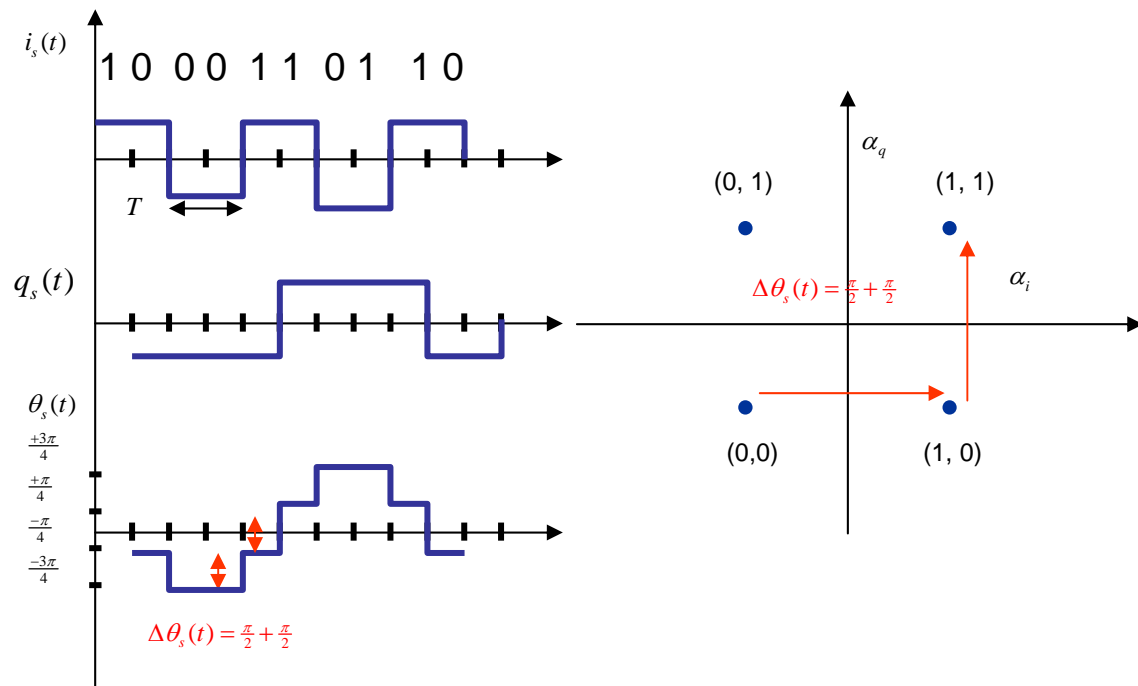


Figura 8 Evolución de las componentes en fase y en cuadratura y diagrama de fase para la modulación Offset-QPSK.

4.3.7 Ejemplo de Comparación

Se van a analizar 5 formatos diferentes para transmitir constelaciones de 16 símbolos y compararlas entre sí. El objetivo final de todas las comparaciones consiste en establecer una escala de menor a mayor aprovechamiento de energía media transmitida por bit, calculando las ganancias relativas de $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}$.

16ASK

Este tipo de modulación es de dimensión $L=1$.

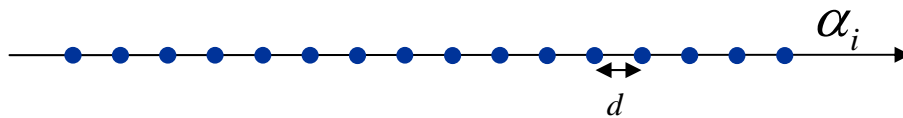


Figura 9 Constelación 16ASK

Cálculo de la energía de bit:

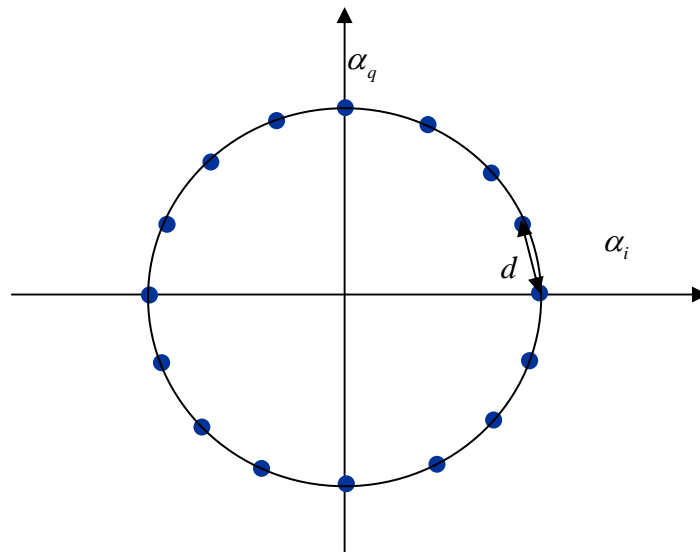
$$E_s = \sum_{m=1}^M \Pr(s_m) E_m = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M ((m-1)d)^2 = \frac{(M-1)M(2M-1)}{6M} d^2 = \frac{(M-1)(2M-1)}{6} d^2 =$$

$$\frac{(M-1)(2M-1)}{6} d^2 = \frac{155}{2} d^2 = 4E_b$$

Por tanto: $E_b = \frac{155}{8} d^2$ y $d^2 = \frac{8}{155} E_b = 0.0516E_b$

Y la BER se aproxima por:

$$BER = P_b = \frac{2(M-1)}{bM} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = \frac{15}{32} Q\left(\sqrt{\frac{0.0516}{2} \frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{15}{32} Q\left(\sqrt{0.0258 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

16PSK**Figura 10** Constelación 16PSK

Cálculo de la distancia mínima d :

$$d^2 = \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \cos \frac{2\pi}{M} \\ \sqrt{E_s} \sin \frac{2\pi}{M} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = E_s \left\| \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{M} - 1 \\ \sin \frac{2\pi}{M} \end{pmatrix} \right\|^2 =$$

$$E_s \left\| \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{M} - 1 \\ \sin \frac{2\pi}{M} \end{pmatrix} \right\|^2 = E_s (2 - 2 \cos \frac{2\pi}{M}) = 4E_s \sin^2 \frac{\pi}{M} = 4bE_b \sin^2 \frac{\pi}{M}$$

Cálculo de la energía de bit:

$$E_b = \frac{1}{4b \sin^2 \frac{\pi}{M}} d^2 = \frac{1}{16 \sin^2 \frac{\pi}{16}} d^2 \text{ y } d^2 = 16 \sin^2 \frac{\pi}{16} E_b = 0.609 E_b$$

Y la BER se aproxima por:

$$BER = P_b = \frac{2}{b} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{0.609}{2} \frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{0.305 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

16 QAM

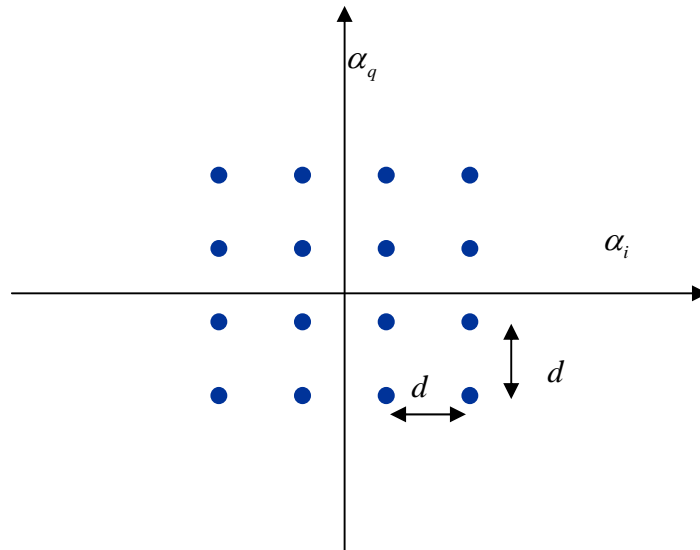


Figura 11 Constelación 16QAM

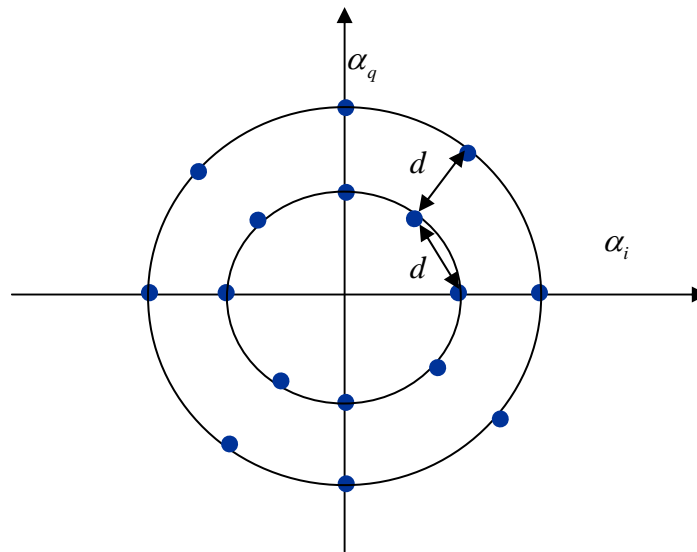
Cálculo de la energía de bit:

$$E_s = \sum_{m=1}^M \Pr(\mathbf{s}_m) E_m = \frac{1}{16} \left(4 \left(\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4} \right) + 8 \left(\frac{9d^2}{4} + \frac{d^2}{4} \right) + 4 \left(\frac{9d^2}{4} + \frac{9d^2}{4} \right) \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{d^2}{2} + 5d^2 + \frac{9d^2}{2} \right) = \frac{5}{2} d^2 = 4E_b$$

Por tanto: $E_b = \frac{5}{8} d^2$ y $d^2 = \frac{8}{5} E_b = 1.6E_b$

Y la BER se aproxima por:

$$BER = P_b = \frac{4(\sqrt{M}-1)}{b\sqrt{M}} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{1.6}{2} \frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{0.8 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

16 Star-QAM**Figura 12** Constelación 16 StarQAM

Cálculo del radio interior respecto a la distancia mínima d :

$$d^2 = 4r^2 \sin^2 \frac{\pi}{8} \Rightarrow r = \frac{d}{2 \sin \frac{\pi}{8}}$$

Cálculo de la energía de bit:

$$E_s = \frac{1}{16} (8r^2 + 8(r+d)^2) = \frac{1}{2} (2r^2 + 2rd + d^2) = d^2 \left(\frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{8}} + \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{8}} + \frac{1}{2} \right) = 3.5137d^2 = 4E_b$$

Por tanto: $E_b = 0.8784d^2$ y $d^2 = 1.1384E_b$

Y la BER se aproxima por:

$$BER = P_b = \frac{3}{4} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{1.1384}{2} \frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{0.5692 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Q²PSK (M=16)

Este tipo de modulación, es de dimensión L=4 y utiliza por tanto 4 funciones ortonormales cuyas coordenadas son binarias.

Las coordenadas respecto a la base de L=4 elementos son: $\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} \pm \frac{d}{2} \\ \pm \frac{d}{2} \\ \pm \frac{d}{2} \\ \pm \frac{d}{2} \end{pmatrix}$

Cálculo de la energía de bit:

$$E_s = \sum_{m=1}^M \Pr(\mathbf{s}_m) E_m = \frac{1}{16} \left(16 \left(\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4} \right) \right) = d^2 = 4E_b$$

Por tanto: $E_b = \frac{1}{4}d^2$ y $d^2 = 4E_b =$

Y la BER se aproxima por:

$$BER = P_b = \frac{3}{4} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Tabla comparativa:

M=16	16ASK	16PSK	16 Star-QAM	16QAM	QQPSK
$d^2 = cteE_b$	$d^2 = 0.0516E_b$	$d^2 = 0.609E_b$	$d^2 = 1.1384E_b$	$d^2 = 1.6E_b$	$d^2 = E_b$
$Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$	$Q\left(\sqrt{0.0258 \frac{E_b}{N_0}}\right)$	$Q\left(\sqrt{0.305 \frac{E_b}{N_0}}\right)$	$Q\left(\sqrt{0.5692 \frac{E_b}{N_0}}\right)$	$Q\left(\sqrt{0.8 \frac{E_b}{N_0}}\right)$	$Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$
Ganancias Relativas de $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}$		$10 \log_{10} \left(\frac{0.305}{0.0258}\right) = 10.72dB$	$10 \log_{10} \left(\frac{0.5692}{0.305}\right) = 2.72dB$	$10 \log_{10} \left(\frac{0.8}{0.5692}\right) = 1.47dB$	$10 \log_{10} \left(\frac{2}{0.8}\right) = 3.98dB$
$Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$ para $\frac{E_b}{N_0} = 10$	0.3057	4 E-2	8.5 E-3	2.3 E-3	3.9 E-6
$Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$ para $\frac{E_b}{N_0} = 20$	0.2363	6.8 E-3	3.7 E-4	3.2 E-5	1.3 E-10

4.4 Modulaciones FSK

Las modulaciones Frequency Shift Keying (FSK), son modulaciones en las que la frecuencia de la señal modulada va variando de forma discreta. Un modo de interpretar este fenómeno es que la frecuencia instantánea coincide con una modulación PAM polar de pulsos rectangulares, según se expresa a continuación.

$$s_{FSK}(t) = A_c \cos \left(2\pi f_c t + \theta_c + 2\pi f_d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \int_{-\infty}^t p(\lambda - nT) d\lambda \right) =$$

$$A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos \left(2\pi f_c t + \theta_c + 2\pi f_d a[n](t - nT) + \phi_s(nT) \right) p(t - nT) \quad (9)$$

$$\phi_s(t) = 2\pi f_d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (t - nT) a[n] + \phi_s(nT); \quad nT \leq t \leq (n+1)T$$

donde f_d representa la sensibilidad de frecuencia, $p(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ y las amplitudes $a[n]$ en general se toman como valores enteros:

$$a[n] = a_m = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1) \quad (10)$$

La señal definida en (9) es de fase instantánea $\phi_s(t)$ continua. Es una característica deseable para mantener el ancho de banda estrecho en las modulaciones de frecuencia.

La frecuencia instantánea de la señal $s_{FSK}(t)$ es igual a:

$$f_s(t) = f_c + f_d a[n]; \quad nT \leq t \leq (n+1)T$$

Por tanto, el parámetro f_d determina la separación entre las frecuencias instantáneas correspondientes a dos símbolos vecinos: $2f_d$ Hz.

A modo de ejemplo se muestra la ocupación frecuencial de este tipo de modulación en la Figura 13.

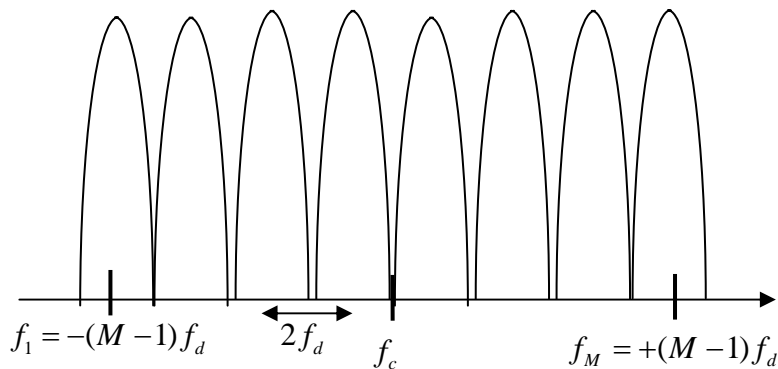


Figura 13 Ocupación espectral de los símbolos 8FSK.

4.4.1 Condición de ortogonalidad

Una condición interesante en el análisis de este tipo de modulación, se presenta cuando los diferentes símbolos transmitidos son ortogonales entre sí. La modulación FSK puede expresarse como:

$$s_{FSK}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_m(t-nT); \quad s_m(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \theta_c + 2\pi f_d a_m t + \phi_s(nT)) p(t) \quad (11)$$

En (11), la fase inicial de cada símbolo es $\phi_s(nT)$ y en general será una variable aleatoria acotada a un número de valores pequeño. Véase como influye para la ortogonalidad.

La condición de ortogonalidad entre dos símbolos se expresa como:

$$\begin{aligned} & \int_{nT}^{(n+1)T} s_m(t-nT) s_j(t-nT) dt = \\ & \frac{A_c^2}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \cos\left(2\pi\left(2f_c + f_d(a_m + a_j)\right)t + 2\theta_c + 2\phi_s(nT)\right) + \cos\left(2\pi f_d(a_m - a_j)t\right) dt = \quad (12) \\ & \frac{A_c^2 T}{2} \delta[m-j] \end{aligned}$$

donde se ha considerado:

$$f_d |a_m - a_j| = \frac{N}{2} r \Rightarrow f_d = \frac{N}{4} r \quad (13)$$

La diferencia mínima entre símbolos $|a_m - a_j|$ es 2, tal como se han definido estas amplitudes en (10). De (13) se deduce que la mínima distancia entre símbolos ($N=1$) para que se cumpla la condición de ortogonalidad entre símbolos es de:

$$f_d = \frac{1}{4} r$$

Para ello se debe cumplir que $f_c \gg r$ y de este modo la integral del primer sumando en (12) se iguala a cero.

En la deducción de (13) se ha asumido que se va a realizar sobre la señal una demodulación coherente. Es decir, para que las señales sigan siendo ortogonales en recepción, el receptor debe diseñarse con el valor exacto de la fase de portadora, tal como se ha generado en transmisión.

Si se realiza una detección no coherente, para preservar la condición de ortogonalidad entre frecuencias la condición debe ser

$$f_d |a_m - a_j| = Nr \Rightarrow f_d = \frac{N}{2} r \quad (14)$$

En la práctica, interesa elegir el mínimo valor del entero N posible, es decir $N=1$, ya que al aproximar las diferentes frecuencias instantáneas de la señal resultante $s_{FSK}(t)$, siempre repercute en mantener el ancho de banda menor que eligiendo mayores valores de N.

4.4.2 Probabilidad de error para FSK ortogonal

Cuando se tenga un alfabeto ortogonal y se realice una detección coherente, se puede analizar la probabilidad de error utilizando la teoría de espacio de señal, tal como se presentó en el tema 3 para modulaciones M ortogonales:

Definiendo las $L=M$ funciones de la base como

$$\varphi_m(t) = \frac{1}{\sqrt{E_m}} s_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t + \theta_c + 2\pi f_d a_m t + \phi_s(0)) p(t)$$

Aunque la fase inicial $\phi_s(0)$ de la función de la base, representa en sí misma una ambigüedad, no influye en la ortogonalidad, entre las diferentes funciones.

Dado que todas las señales del alfabeto presentan igual energía:

$$E_s = bE_b = E_m = \frac{A_c^2 T}{2} = \frac{d^2}{2}; \quad m = 1, \dots, M$$

los vectores de señal resultan

$$\mathbf{s}_m(t) = \sqrt{E_s} \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{d}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow \text{"Coordenada } m\text{"}$$

y por tanto se puede hallar una cota superior para la probabilidad de error:

$$P_e \leq (M-1)Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{b \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

4.4.3 Ejemplo: 2FSK

Este tipo de modulación, se muestra con el objetivo de presentar un ejemplo en el que cumpliéndose la condición $f_d = \frac{1}{2}r$, se obtienen símbolos ortogonales entre sí. Utilizando un único oscilador de señal, la expresión obtenida para los símbolos $s_1(t), s_2(t)$, no es única, pues depende de la fase inicial de la señal al principio de cada símbolo, sin embargo, se mantiene la ortogonalidad y además, la continuidad de fase entre símbolos.

Los posibles símbolos a transmitir son:

$$s_1(t) = \pm A_c \cos\left(2\pi\left(f_c + \frac{r}{2}\right)t + \theta_c\right) p(t) = \begin{cases} A_c \cos\left(2\pi\left(f_c + \frac{r}{2}\right)t + \theta_c\right) p(t) \\ A_c \cos\left(2\pi\left(f_c + \frac{r}{2}\right)t + \theta_c + \pi\right) p(t) \end{cases}$$

$$s_2(t) = \pm A_c \cos\left(2\pi\left(f_c - \frac{r}{2}\right)t + \theta_c\right) p(t) = \begin{cases} A_c \cos\left(2\pi\left(f_c - \frac{r}{2}\right)t + \theta_c\right) p(t) \\ A_c \cos\left(2\pi\left(f_c - \frac{r}{2}\right)t + \theta_c + \pi\right) p(t) \end{cases}$$

En la Figura 14 se muestra la evolución de la señal temporal para este ejemplo, a lo largo de 4 símbolos. Se ha utilizado $f_c = 2r$, para facilitar la visualización de la señal. Puede apreciarse las dos formas diferenciadas resultantes para cada uno de los dos símbolos generados $s_1(t), s_2(t)$.

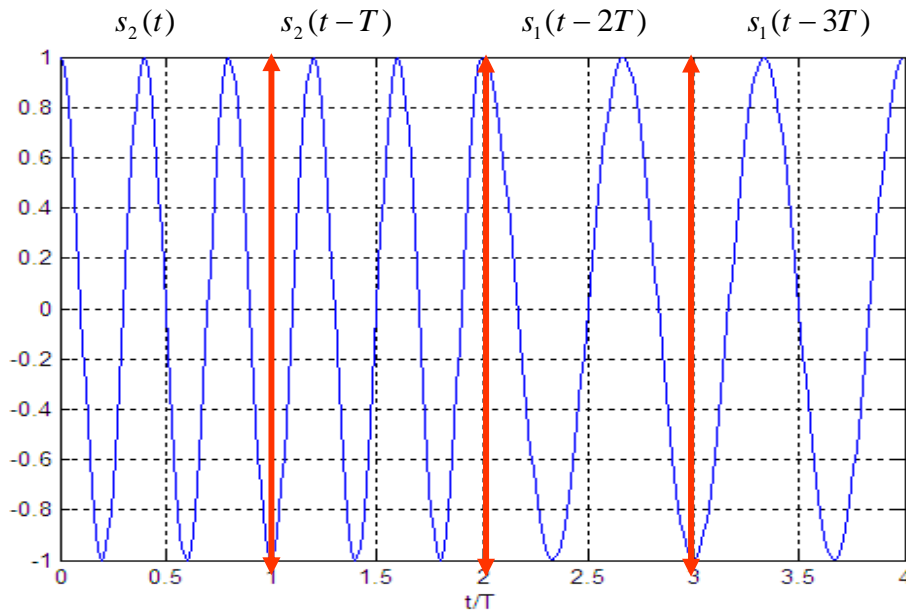


Figura 14 Ejemplo de modulación 2FSK, generada a partir de un único oscilador y considerando $\theta_c = 0$.

Análisis de la densidad espectral de 2FSK.

El análisis de la función de densidad espectral se puede plantear de forma análoga a lo desarrollado en el apartado 4.2, pero particularizado a esta modulación. Como paso previo se identifican las componentes en fase y en cuadratura de la señal.

$$i_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\phi_s(nT) + \pi r t) \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\pm \pi r t) \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) = \cos(\pi r t)$$

$$q_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sen}(\phi_s(nT) + \pi r t) \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sen}(\pm \pi r t) \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q[n] \text{sen}(\pi r t) \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right);$$

$$Q[n] = \pm 1 \quad \text{con equiprobabilidad y sin memoria}$$

Por lo que la densidad espectral para las componentes en fase y en cuadratura para este tipo de modulación resulta:

$$S_{i_s}(f) = \frac{1}{4} \left(\delta\left(f - \frac{r}{2}\right) + \delta\left(f + \frac{r}{2}\right) \right)$$

$$S_{q_s}(f) = \frac{4}{\pi^2 r} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi f}{r}\right)}{\left(\frac{2f}{r}\right)^2 - 1} \right)^2$$

$$S_{q_{i_s}}(f) = S_{i_{q_s}}(f) = 0$$

y para la señal paso banda:

$$S_s(f) = \frac{A_c^2}{4} \left(S_{i_s}(f - f_c) + S_{q_s}(f - f_c) + S_{i_s}(f + f_c) + S_{q_s}(f + f_c) \right)$$

Sustituyendo adecuadamente, se obtiene la función de densidad espectral para la modulación 2FSK.

4.5 Modulaciones CPM: Continuous Phase Modulation

Se trata de una modulación de frecuencia en la que los dos principales objetivos consisten en:

- Mantener el ancho de banda de transmisión acotado.
- Mantener continuidad en la fase instantánea de la modulación $\phi_s(t)$. En general, no es suficiente que la fase instantánea sea continua, sino que cuanto mayor número de derivadas tenga continuas, el ancho de banda permanece más acotado.

4.5.1 Modulación y expresión de la señal CPM

Para garantizar la continuidad de fase se utiliza un único oscilador según se muestra en la figura adjunta.

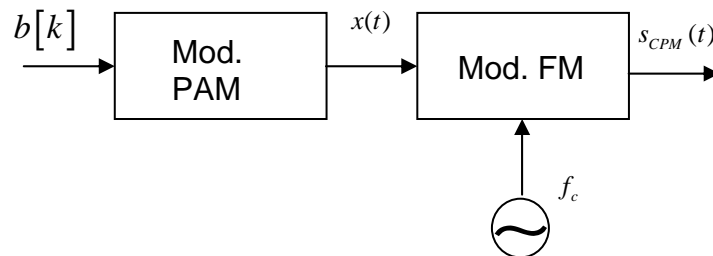


Figura 15 Esquema Modulador CPM

La señal a la salida del Modulador PAM se puede expresar como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] p(t - nT) \quad (1.15)$$

Las amplitudes $\alpha[n]$ corresponden a un alfabeto de M símbolos. M en general es potencia de 2, ya que se codifican b bits por símbolo. $M = 2^b$.

$$\begin{aligned} \alpha[n] &= \alpha_m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(M-1) = -M-1 + 2m \\ m &= 1..M \\ \Pr[\alpha_m] &= \frac{1}{M} \end{aligned}$$

El modulador FM genera la siguiente señal de salida:

$$s(t) = A_c \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \right) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \quad (1.16)$$

Observaciones sobre la señal anterior:

Frecuencia instantánea de la señal $s(t)$:

$$f_s(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(2\pi f_c t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (2\pi f_c t + \phi(t)) = 2\pi f_c + 2\pi f_d x(t)$$

Componentes en Fase y en Cuadratura:

$$i_s(t) = \cos \phi(t)$$

$$q_s(t) = \sin \phi(t)$$

Energía Media Transmitida por bit: $E_b = \frac{E_s}{b} = P_s T_b = \frac{A_c^2}{2} T_b$

4.5.2 Análisis de la fase instantánea:

El mensaje determina de forma explícita la fase instantánea de la señal CPM y según ello la expresión queda:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= 2\pi f_d \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda = \\ 2\pi f_d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] \int_{-\infty}^t p(\lambda - nT) d\lambda &= 2\pi f_d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] \int_{-\infty}^{t-nT} p(\gamma) d\gamma = \\ 2\pi f_d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha[n] q(t-nT) \end{aligned} \quad (17)$$

donde: $q(t) = \int_{-\infty}^t p(\lambda) d\lambda$

Suponiendo pulsos $p(t)$ causales de duración LT seg.,

$$\begin{aligned} q(0) &= \int_{-\infty}^0 p(\lambda) d\lambda = 0 \\ q(t) \Big|_{t \geq LT} &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda) d\lambda = P(0) \end{aligned}$$

Con las consideraciones anteriores, la expresión (17) se simplifica. La fase de la señal CPM en el intervalo de análisis $kT \leq t \leq (k+1)T$ se expresa como:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= 2\pi f_d \sum_{n=-\infty}^{k-L} \alpha[n] P(0) + 2\pi f_d \sum_{n=k-L+1}^k \alpha[n] \int_{-\infty}^{t-nT} p(\gamma) d\gamma = \\ 2\pi f_d \sum_{n=-\infty}^{k-L} \alpha[n] P(0) + 2\pi f_d \sum_{n=k-L+1}^k \alpha[n] q(t-nT) &= \\ 2\pi f_d \sum_{n=-\infty}^{k-L} \alpha[n] P(0) + 2\pi f_d \sum_{l=1}^L \alpha[k-l+1] q(t-(k-l+1)T) \end{aligned}$$

Es muy frecuente trabajar con pulsos $p(t)$ normalizados, tal que $P(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = T$. En estas ocasiones al cociente $h = f_d T = \frac{f_d}{r}$, sin unidades, se le suele denominar índice de la modulación.

La decisión de símbolos suele realizarse a partir de las muestras en instantes de muestreo que sean múltiplos del periodo de símbolo. Para tales muestras, los valores de la fase en $kT \leq t \leq (k+1)T$ son:

$$\begin{aligned} \phi(t_k) &= \phi((k+1)T) = \\ &2\pi f_d T \sum_{n=-\infty}^{k-L} \alpha[n] + 2\pi f_d \sum_{l=1}^L \alpha[k-l+1]q(lT) = \\ &2\pi h \sum_{n=-\infty}^{k-L+1} \alpha[n] + 2\pi f_d \sum_{l=1}^{L-1} \alpha[k-l+1]q(lT) \end{aligned} \quad (18)$$

En la expresión anterior (última línea), el primer sumando representa la influencia de los símbolos transmitidos hasta $t \leq (k-L+1)T$ y es debida a la integral del modulador de FM. El segundo sumando se halla influenciado por los $L-1$ últimos símbolos recibidos y en general cuando la duración del pulso $p(t)$, L es ≥ 1 se interpreta como ISI, o también CISI, (Controlled ISI) ya que es una ISI introducida deliberadamente en el transmisor con el objeto de mantener el espectro acotado.

En los apartados siguientes se revisan dos casos particulares de modulaciones CPM. Para particularizar en cada caso se ha de determinar:

- Número de niveles de la modulación M .
- Sensibilidad de frecuencias f_d que normalmente se da normalizada a la velocidad de símbolo ($h = \frac{f_d}{r}$).
- Pulso base de la modulación PAM.

4.5.3 Modulación Minimum Shift Keying (MSK)

Consiste en un caso particular de modulación binaria CPM. Se trabaja con la mínima separación frecuencial necesaria para conservar ortogonalidad entre las dos portadoras:

$$M = 2 \Rightarrow \alpha_m = \pm 1,$$

$$f_d = \frac{1}{4} r = \frac{1}{4} r_b = \frac{1}{4} \frac{1}{T_b} \Rightarrow h = f_d T = \frac{1}{4}$$

y el pulso elegido para la modulación PAM es el rectangular:

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \Rightarrow q(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 \leq t \leq T \\ T = P(0) & T \leq t \end{cases}$$

En esta situación la fase instantánea de la señal $s(t)$ es:

$$\phi(t) = 2\pi f_d \sum_{n=-\infty}^{k-L} \alpha[n] P(t) + 2\pi f_d \alpha[k] \int_0^{t-kT} p(\gamma) d\gamma = \phi(kT) + \frac{\pi}{2} r \alpha[k] (t - kT) \tag{19}$$

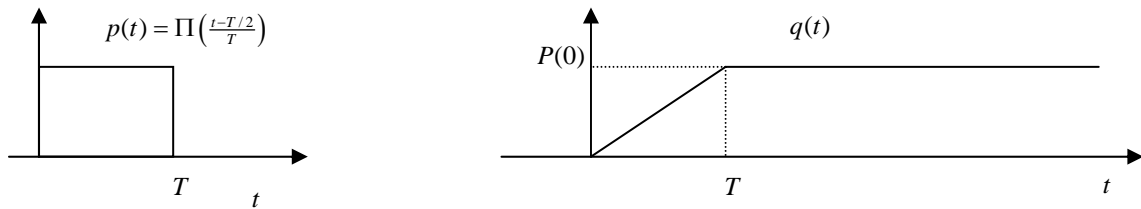


Figura 16 Pulsos de la fase y la frecuencia instantáneas de MSK

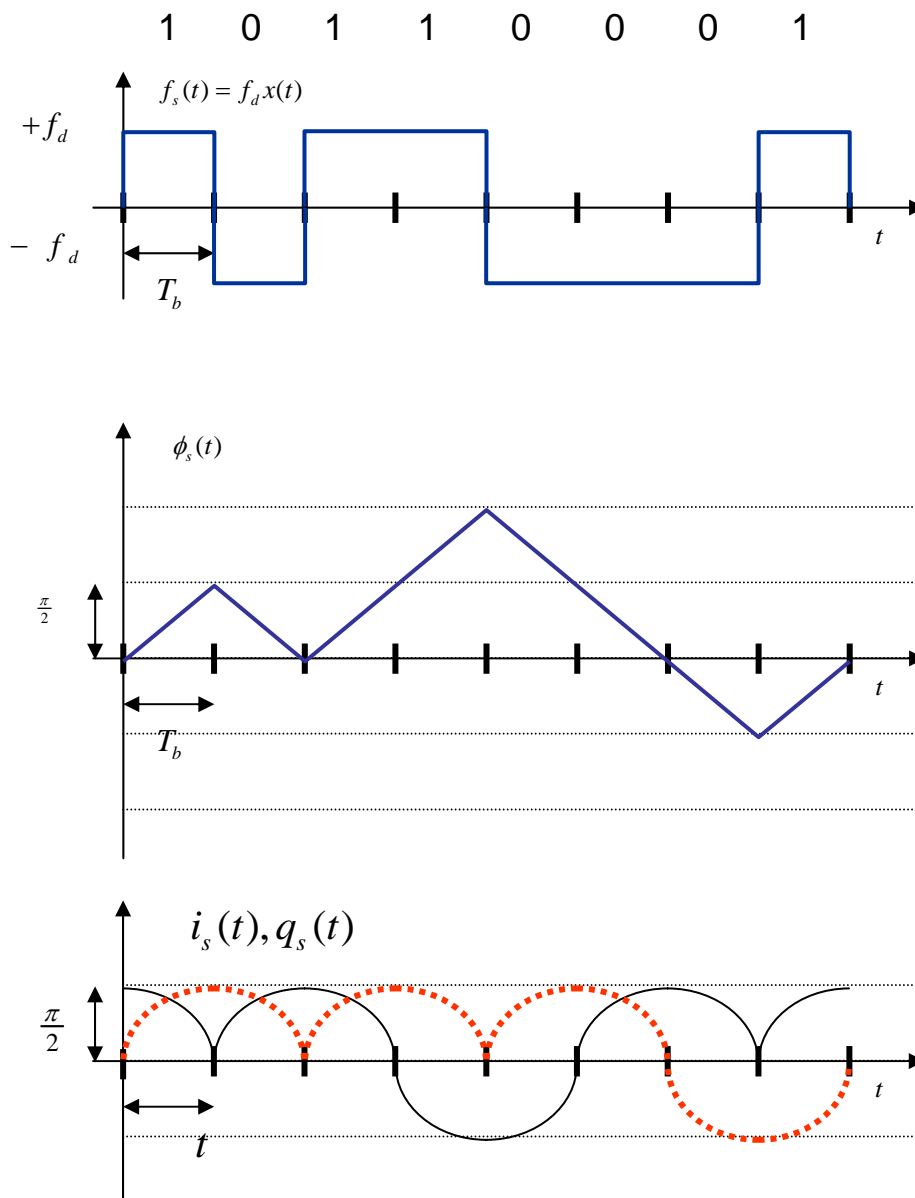


Figura 17 Frecuencia y fase instantáneas de la modulación MSK y componentes en fase (continua) y cuadratura (discontinua) para una secuencia de bits determinada.

Como puede observarse para el ejemplo de la Figura 17, la forma temporal de las señales I&Q es similar a la de Offset-QPSK. Esta similitud facilita el análisis de la densidad espectral. En cuanto a la demodulación de ambas señales (MSK y Offset-QPSK) es diferente entre sí.

Componentes en fase y en cuadratura resultantes:

$$i_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I[k] \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{t-k2T_b}{T_b}\right) \Pi\left(\frac{t-k2T_b}{2T_b}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I[k] g(t-2kT_b)$$

$$q_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Q[k] \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{t-k2T_b-T_b}{T_b}\right) \Pi\left(\frac{t-k2T_b-T_b}{2T_b}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Q[k] g(t-2kT_b-T_b)$$

Las componentes I&Q son análogas a las obtenidas para Offset-QPSK con pulso conformador igual a

$$g(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{t}{T_b}\right) \Pi\left(\frac{t}{2T_b}\right)$$

$$I[k] = \cos(\phi(2kT_b)) = \pm 1$$

$$Q[k] = \sin(\phi((2k+1)T_b)) = \pm 1$$

Aunque el modulador y el demodulador para OQPSK y para MSK son diferentes entre sí la analogía anterior es útil para analizar el espectro de la modulación MSK.

Considerando la siguiente propiedad fácilmente comprobable:

$$R_{i_s}(t+\tau, t) = R_{q_s}(t+\tau, t)$$

$$R_{i_s, q_s}(t+\tau, t) = -R_{q_s, i_s}(t+\tau, t) = 0$$

Y dado que las componentes en fase y en cuadratura presentan la misma densidad espectral, se cumple que

$$S_s(f) = TF \left[+A_c^2 \hat{R}_{i_s}(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) \right] = \frac{A_c^2}{2} S_{i_s}(f-f_c) + \frac{A_c^2}{2} S_{i_s}(f+f_c)$$

con

$$S_{i_s}(f) = \frac{1}{2T_b} \sigma_I^2 |P(f)|^2 = \frac{1}{8T_b} \left(\frac{\sin(2\pi(f-\frac{f_b}{4})T_b)}{\pi(f-\frac{f_b}{4})} + \frac{\sin(2\pi(f+\frac{f_b}{4})T_b)}{\pi(f+\frac{f_b}{4})} \right)^2 =$$

$$\frac{16}{8\pi^2 T_b r_b^2} \left(\frac{-\cos(2\pi f T_b)}{\frac{4f}{r_b} - 1} + \frac{+\cos(2\pi f T_b)}{\frac{4f}{r_b} + 1} \right)^2 = \frac{8}{\pi^2 r_b} \left(\frac{\cos(2\pi f T_b)}{\left(\frac{4}{r_b} f\right)^2 - 1} \right)^2$$

Con lo que:

$$\begin{aligned}
S_s(f) &= \frac{A_c^2}{4} S_{i_s}(f - f_c) + \frac{A_c^2}{4} S_{q_s}(f - f_c) + \frac{A_c^2}{4} S_{i_s}(f + f_c) + \frac{A_c^2}{4} S_{q_s}(f + f_c) = \\
&= \frac{A_c^2}{2} S_{i_s}(f - f_c) + \frac{A_c^2}{2} S_{i_s}(f + f_c) = \\
&= \frac{4A_c^2}{\pi^2 r_b} \left(\frac{\cos(2\pi(f+f_c)T_b)}{\left(\frac{A}{b}(f+f_c)\right)^2 - 1} \right)^2 + \frac{4A_c^2}{\pi^2 r_b} \left(\frac{\cos(2\pi(f-f_c)T_b)}{\left(\frac{A}{b}(f-f_c)\right)^2 - 1} \right)^2 = \frac{8E_b}{\pi^2} \left(\frac{\cos(2\pi(f+f_c)T_b)}{\left(\frac{A}{b}(f+f_c)\right)^2 - 1} \right)^2 + \frac{8E_b}{\pi^2} \left(\frac{\cos(2\pi(f-f_c)T_b)}{\left(\frac{A}{b}(f-f_c)\right)^2 - 1} \right)^2
\end{aligned}$$

Detección Sub-óptima de MSK

A partir de (19), se analiza a continuación las prestaciones de la modulación en cuanto a probabilidad de error, mediante un procedimiento de detección diferencial.

Se considera un canal AWGN ideal de respuesta impulsional $\delta(t)$ y ruido aditivo gaussiano blanco de densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$. En condiciones de cociente $\frac{E_b}{N_0}$ elevado, los efectos del ruido aditivo sobre la fase de la modulación se pueden aproximar del siguiente modo:

$$r(t) = s(t) + n(t) \cong A_c \cos\left(2\pi f_c t + \phi_s(t) + \frac{q_n(t)}{A_c}\right) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_r(t)) \quad (20)$$

Para detectar la secuencia de símbolos $\alpha[k]$, a partir del ángulo de señal recibida $\phi_r(t)$, previo muestreo a $t_k = kT$, se utiliza la información diferencial $y[k]$ definida como:

$$y[t_k] = \phi_r(t_k) - \phi_r(t_{k-1}) \quad (21)$$

La Figura 20 muestra el esquema completo.

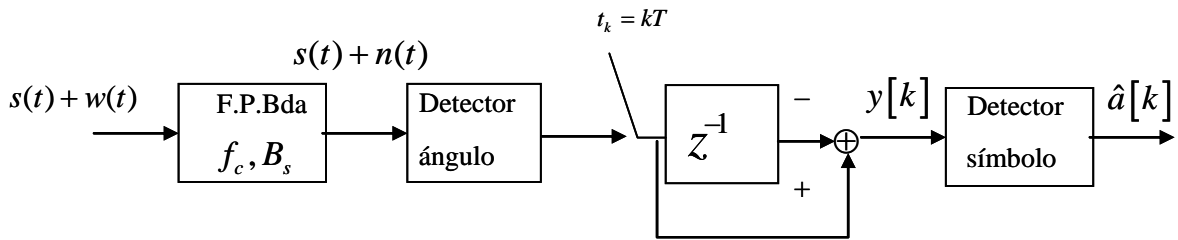


Figura 18 Detector subóptimo de MSK

Las muestras de señal en (21), se particularizan al considerar por un lado la ecuación (20) y por otro, de (19) se obtiene $\phi(kT) = 2\pi f_d \sum_{n=-\infty}^{k-1} \alpha[n] P(0) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{k-1} \alpha[n]$:

$$\begin{aligned}
y(t_k) = y[k] &= \phi_r(t_k) - \phi_r(t_{k-1}) = \phi(t_k) - \phi(t_{k-1}) + \frac{q_n(t_k)}{A_c} - \frac{q_n(t_{k-1})}{A_c} = \\
&= \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{k-1} \alpha[n] - \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{k-2} \alpha[n] + \beta[k] = \\
&= \frac{\pi}{2} \alpha[k-1] + \beta[k]
\end{aligned}$$

A partir de la propiedad anterior se deduce que la regla de decisión es:

$$y(t_k) \begin{cases} > \hat{a}^{[k-1]=+1} \\ < \hat{a}^{[k-1]=-1} \end{cases} 0$$

Para el cálculo de la probabilidad de error del sistema es necesario caracterizar la componente de ruido resultante. Para expresar la probabilidad de error se debe obtener la potencia del ruido en detección a partir de la señal $q_n(t)$, componente en cuadratura del ruido filtrado paso banda $n(t)$.

$$\beta[k] = \frac{q_n(t_k)}{A_c} - \frac{q_n(t_{k-1})}{A_c}$$

A continuación se caracteriza estadísticamente la componente del ruido, empezando por el ruido paso banda resultante a la salida del filtro receptor. Se asume que el ancho de banda aproximado es $B_s = 2r$.

La densidad espectral del ruido paso banda $n(t)$ es:

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f-f_c}{B_s}\right) + \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f+f_c}{B_s}\right)$$

La densidad espectral de la componente en cuadratura $q_n(t)$ es:

$$S_{q_n}(f) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{B_s}\right)$$

La autocorrelación de la componente en cuadratura $q_n(t)$ es:

$$R_{q_n}(\tau) = TF^{-1}(S_{q_n}(f)) = N_0 B_s \text{sinc}(\tau B_s)$$

La autocorrelación de la componente de ruido $\beta[k]$ es:

$$\begin{aligned} R_\beta[m] &= E[\beta[k+m]\beta[k]] = \\ &= \frac{1}{(A_c)^2} (2R_{q_n}(mT) - R_{q_n}((m-1)T) - R_{q_n}((m+1)T)) = \\ &= \frac{1}{(A_c)^2} N_0 B_s (2\text{sinc}(2m) - \text{sinc}(2(m+1)) - \text{sinc}(2(m-1))) = \\ &= \frac{2}{(A_c)^2} N_0 2r \delta[m] = \frac{2N_0}{E_b} \delta[m] \end{aligned}$$

La función de densidad de probabilidad del ruido es gaussiana:

$$\begin{aligned} \beta[k] &: N(0, \sigma^2) \\ \sigma^2 &= \frac{2N_0}{E_b} \end{aligned}$$

Una vez caracterizado el ruido la probabilidad de error resulta, considerando umbral de decisión igual a cero:

$$P_e = Q\left(\frac{\pi/2}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{8} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

4.5.4 Modulación Gaussian MSK

Consiste en un caso particular de modulación binaria CPM similar a MSK. Se utiliza también la misma separación frecuencial pero cambia el pulso elegido para la frecuencia instantánea, ya que se elige un pulso gaussiano, en lugar de elegirlo rectangular como en la modulación MSK. El objetivo de utilizar un pulso gaussiano, es el de reducir el ancho de banda de la señal modulada. Para ello, se genera una fase continua y de varias derivadas continuas. Como contrapartida, aparece ISI en la fase instantánea y en la frecuencia instantánea de la señal, por lo que la demodulación de la señal deberá hacerse recurriendo a algoritmos con mayor memoria que los utilizados para la modulación MSK. Corresponde a la modulación utilizada en el sistema de telefonía móvil GSM.

$$M = 2 \Rightarrow \alpha_m = \pm 1,$$

$$f_d = \frac{1}{4}r = \frac{1}{4}r_b = \frac{1}{4} \frac{1}{T_b} \Rightarrow h = f_d T = \frac{1}{4}$$

$$g(t) = \frac{1}{2T} \left(Q\left(2\pi B_b \frac{t-T/2}{\sqrt{\ln 2}}\right) - Q\left(2\pi B_b \frac{t+T/2}{\sqrt{\ln 2}}\right) \right) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \sqrt{\frac{2\pi}{\ln 2}} B_b \exp\left(-\frac{2\pi^2 B_b^2}{\ln 2} t^2\right)$$

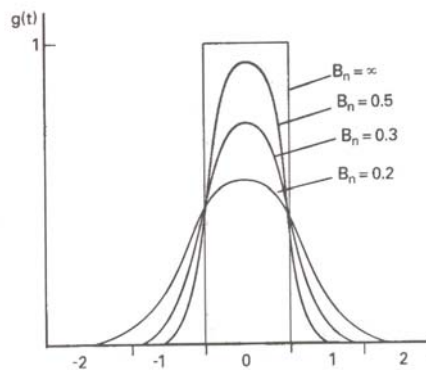


Figura 19 Pulsos de la fase instantánea de GMSK. Donde el ancho de banda se halla normalizado. $B_n = \frac{B_b}{r}$

El ancho de banda del pulso se puede aproximar por B_b y en telefonía GSM se utiliza $B_b = 0.3r$

Aproximando la duración de los pulsos anteriores a 3 periodos de símbolo, la fase instantánea de la señal $s(t)$ se puede expresar como.

$$\begin{aligned}
\phi(t)|_{t=kT} &= 2\pi f_d \sum_{n=-\infty}^{k-L} \alpha[n]G(0) + 2\pi f_d \sum_{n=k-L+1}^k \alpha[n] \int_{-\infty}^{t-nT} g(\gamma)d\gamma \cong \\
\frac{\pi}{2} r \sum_{n=-\infty}^{k-2} \alpha[n] + 2\pi f_d \alpha[k-2] \int_{-\infty}^{2T} g(\gamma)d\gamma + 2\pi f_d \alpha[k-1] \int_{-\infty}^T g(\gamma)d\gamma &= \\
\frac{\pi}{2} r \sum_{n=-\infty}^{k-2} \alpha[n] + 2\pi f_d \alpha[k-2]q(2T) + 2\pi f_d \alpha[k-1]q(T) & \\
\text{con } q(t) = \int_{-\infty}^t g(\gamma)d\gamma &
\end{aligned} \tag{22}$$

Nota (Detección de modulaciones CPM):

La detección de las modulaciones CPM, no se plantea desde la perspectiva de espacio de señal, debido a la complejidad que supondría este planteamiento con este tipo de modulaciones.

En la práctica se aborda la etapa de detección mediante alguno de los dos planteamientos siguientes:

- Detección óptima implementada mediante el algoritmo de Viterbi.
- Detección subóptima basada en demodulación diferencial.

Detección Sub-óptima de GMSK

A partir de (22), se analiza a continuación las prestaciones de la modulación en cuanto a probabilidad de error, mediante un procedimiento de detección sub-óptima.

Se considera un canal AWGN ideal de respuesta impulsional $\delta(t)$ y ruido aditivo gaussiano blanco de densidad espectral $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$. En condiciones de cociente $\frac{E_b}{N_0}$ elevado, los efectos del ruido aditivo sobre la fase de la modulación se pueden aproximar del siguiente modo:

$$r(t) = s(t) + n(t) \cong A_c \cos\left(2\pi f_c t + \phi_s(t) + \frac{q_n(t)}{A_c}\right) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_r(t)) \tag{23}$$

Para detectar la secuencia de símbolos $\alpha[k]$, a partir del ángulo de señal recibida $\phi_r(t)$, previo muestreo a $t_k = kT$, se utiliza la información diferencial $y[k]$ definida como:

$$y[t_k] = \phi_r(t_k) - \phi_r(t_{k-1}) \tag{24}$$

La Figura 20 muestra el esquema completo.

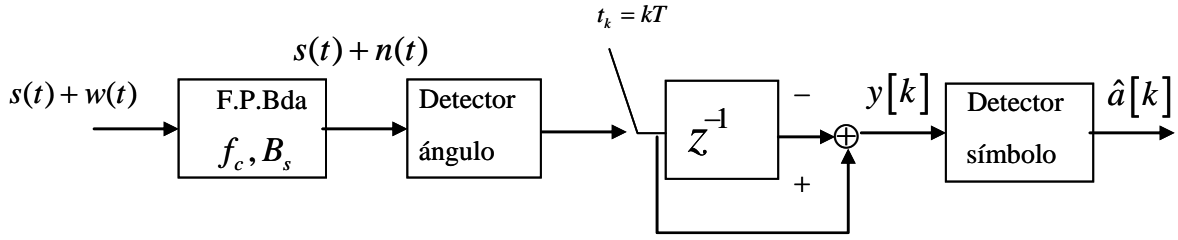


Figura 20 Detector subóptimo de GMSK

Sustituyendo (22) en la ecuación (24) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 y(t_k) = y[k] &= \phi_r(t_k) - \phi_r(t_{k-1}) = \phi(t_k) - \phi(t_{k-1}) + \frac{q_n(t_k)}{A_c} - \frac{q_n(t_{k-1})}{A_c} = \\
 &= 2\pi h r \sum_{n=-\infty}^{k-1} \alpha[n] \int_{-\infty}^{kT} g(\gamma - nT) d\gamma - 2\pi h r \sum_{n=-\infty}^{k-2} \alpha[n] \int_{-\infty}^{(k-1)T} g(\gamma - nT) d\gamma + \beta[k] = \\
 &= \frac{\pi}{2} r \sum_{n=-\infty}^{k-1} \alpha[n] \int_{-\infty}^{(k-n)T} g(\lambda) d\lambda - \frac{\pi}{2} r \sum_{n=-\infty}^{k-2} \alpha[n] \int_{-\infty}^{(k-n-1)T} g(\lambda) d\lambda + \beta[k] = \\
 &= \frac{\pi}{2} r \sum_{n=-\infty}^{k-1} \alpha[n] \int_{(k-n-1)T}^{(k-n)T} g(\lambda) d\lambda + \beta[k] = \begin{cases} k-n > 0 & n < k \\ k-n-1 \leq L & k-1-L \leq n \end{cases} \\
 &= \frac{\pi}{2} r \sum_{n=k-1-L}^{k-1} \alpha[n] \int_{(k-n-1)T}^{(k-n)T} g(\lambda) d\lambda + \beta[k] = \frac{\pi}{2} r \sum_{m=1}^L \alpha[k-m] \int_{(m-1)T}^{mT} g(\lambda) d\lambda + \beta[k] = \\
 &+ \frac{\pi}{2} r \alpha[k-1] \int_0^T g(\gamma) d\gamma + \frac{\pi}{2} r \alpha[k-2] \int_T^{2T} g(\gamma) d\gamma + \frac{\pi}{2} r \alpha[k-3] \int_{2T}^{3T} g(\gamma) d\gamma + \beta[k] = \\
 &\rho_1 \alpha[k-1] + \rho_2 \alpha[k-2] + \rho_3 \alpha[k-3] + \beta[k]
 \end{aligned}$$

Donde por simetría (observar la Figura 19) se asume:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \frac{\pi}{2} r \int_0^T g(\gamma) d\gamma; \quad \rho_2 = \frac{\pi}{2} r \int_T^{2T} g(\gamma) d\gamma; \quad \rho_3 = \frac{\pi}{2} r \int_{2T}^{3T} g(\gamma) d\gamma; \\
 \rho_1 &= \rho_3 \ll \rho_2
 \end{aligned}$$

A partir de la propiedad anterior se deduce que la regla de decisión es:

$$y(t_k) \begin{cases} > \hat{a}[k-2]=+1 \\ < \hat{a}[k-2]=-1 \end{cases} 0$$

Para el cálculo de la probabilidad de error del sistema es necesario caracterizar a componente de ruido resultante. Para expresar la probabilidad de error se debe obtener la potencia del ruido en detección a partir de la señal $q_n(t)$, componente en cuadratura del ruido filtrado paso banda $n(t)$.

$$\beta[k] = \frac{q_n(t_k)}{A_c} - \frac{q_n(t_{k-1})}{A_c}$$

Resumiendo, en la variable de decisión:

$$y(t_k) = \rho_2 \alpha[k-2] + \rho_1 (\alpha[k-3] + \alpha[k-1]) + \beta[k]$$

$\rho_1 (\alpha[k-1] + \alpha[k-3])$ representa la ISI y $\beta[k]$ la muestra de ruido.

A continuación se caracteriza estadísticamente la componente del ruido, de forma análoga a la caracterización realizada para MSK. Se asume que el ancho de banda aproximado es $B_s = 2B_b = 0.6r$.

La densidad espectral del ruido paso banda $n(t)$ es:

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f-f_c}{B_s}\right) + \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f+f_c}{B_s}\right)$$

La densidad espectral de la componente en cuadratura $q_n(t)$ es:

$$S_{q_n}(f) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{B_s}\right)$$

La autocorrelación de la componente en cuadratura $q_n(t)$ es:

$$R_{q_n}(\tau) = TF^{-1}(S_{q_n}(f)) = N_0 B_s \text{sinc}(\tau B_s)$$

La autocorrelación de la componente de ruido $\beta[k]$ es:

$$\begin{aligned} R_\beta[m] &= E[\beta[k+m]\beta[k]] = \\ &= \frac{1}{(A_c)^2} (2R_{q_n}(m) - R_{q_n}((m-1)T) - R_{q_n}((m+1)T)) = \\ &= \frac{1}{(A_c)^2} N_0 B_s (2\text{sinc}(0.6m) - \text{sinc}(0.6(m+1)) - \text{sinc}(0.6(m-1))) \end{aligned}$$

Por tanto no puede decirse que el ruido resultante sobre la variable de decisión sea temporalmente incorrelado.

La función de densidad de probabilidad del ruido es gaussiana:

$$\begin{aligned} \beta[k] &: N(0, \sigma^2) \\ \sigma^2 &= R_\beta[0] = \frac{2}{(A_c)^2} N_0 B_s (1 - \text{sinc}(0.6)) = \frac{2 \cdot 0.6}{(A_c)^2} N_0 r (1 - \text{sinc}(0.6)) = \end{aligned}$$

Una vez caracterizado el ruido la probabilidad de error resulta, considerando umbral de decisión igual a cero y energía media de bit $E_b = \frac{(A_c)^2}{2r}$:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2} Q\left(\frac{\rho_0}{\sigma}\right) + \frac{1}{4} Q\left(\frac{\rho_0 - 2\rho_1}{\sigma}\right) + \frac{1}{4} Q\left(\frac{\rho_0 + 2\rho_1}{\sigma}\right) = \\ &= \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{(\rho_0)^2}{0.6(1-\text{sinc}(0.6))^2} \frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{4} Q\left(\sqrt{\frac{(\rho_0 - 2\rho_1)^2}{0.6(1-\text{sinc}(0.6))^2} \frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{4} Q\left(\sqrt{\frac{(\rho_0 + 2\rho_1)^2}{0.6(1-\text{sinc}(0.6))^2} \frac{E_b}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

4.6 Ejercicios Propuestos

4.6.1 Ejercicio 1: DPSK

Sea la modulación DPSK (Diferencial PSK), en la que la información de símbolo reside en la diferencia de fases entre cada dos símbolos consecutivos. Mediante este tipo de modulación se evita la necesidad de la detección coherente. Trabajando con $M=4$ símbolos, las fases de la señal $s(t)$ se codifican diferencialmente según la tabla:

$$\phi_k = \phi_{k-1} + \Delta\phi_k \quad s(t) = \operatorname{Re} \left[A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{j(2\pi f_c t + \theta_c + \phi[n])} p(t - nT) \right) \right]$$

bits	00	01	11	10
$\Delta\phi$	0 rad.	$\pi/2$ rad.	π rad.	$3\pi/2$ rad.

Suponiendo que se cumple la condición $f_c = Nr; N \gg 1$, interprete la modulación anterior como una modulación CPM según la expresión dada en (17), es decir identifique las funciones $p(t), q(t)$. Dibuje la fase instantánea de la señal para la secuencia de bits 0100111010 y observe que en realidad DPSK no es de fase continua.