Comunicaciones II

Tema 4: Ejemplos
Transmisión digital PAM a través de canales AWGN limitados en banda

Javier Rodríguez Fonollosa

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

FSK Ortogonal

- Ejemplo de modulación *M*-Ortogonal (vista en los Ejemplos del Tema 2):

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_s} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{s}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sqrt{E_s} \end{pmatrix}$$

- Recordando el criterio MAP (Todos tienen la misma energía media):

$$\hat{\mathbf{s}}_m = \underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmin}} \left[\tfrac{\|\mathbf{y}-\mathbf{s}_m\|^2}{N_0} - \ln\left(\Pr\{\mathbf{s}_m\}\right) \right] = \underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmax}} \left[\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle - \tfrac{E_m}{2} + \tfrac{N_0}{2} \ln\left(\Pr\{\mathbf{s}_m\}\right) \right] =$$

$$= \underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y}-\mathbf{s}_m\|^2 = \underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmax}} \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle = \underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmax}}\, \mathbf{y}^T \mathbf{s}_m$$

- La decisión se toma a partir del máximo de las correlaciones:

$$\underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmax}} \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle = \underset{\mathbf{s_m}}{\operatorname{argmax}}\, y_m$$

FSK Ortogonal (II)

- La expresión exacta de la probabilidad de error resulta demasiado complicada y se recurre a la cota de la unión que es una buena aproximación en este caso al ser los símbolos equidistantes:

$$d_{ij}=\sqrt{2E_s} \quad ; \quad P(e)\le (M-1)Q\left(\frac{d_{MIN}}{\sqrt{2N_0}}\right)=(M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}\right)=(M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b\log_2 M}{N_0}}\right)$$

- En esta caso además la codificación Gray no es posible. BER?

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\}\text{Símbolos en los que no hay error el en primer bit}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \end{matrix} \longleftarrow \text{Símbolo transmitido}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\}\text{Símbolos en los que hay error el en primer bit}$$

$$BER=\frac{M/2}{M-1}P(e)=\frac{M}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_b\log_2 M}{N_0}}\right)$$

FSK Ortogonal (III)

- Forma de onda de la señal transmitida:

$$s(t)=\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(2\pi(f_c+s_{m[n]}\Delta f)t+\theta_c\right)\varphi(t-nT)$$

$$s_{m[n]}\in\{0,1,\cdots,M-1\}$$

- Equivale a definir una funciones de la base ortonormal ($L=M$) suponiendo $f_c=N/T$

$$\varphi_m(t)=\sqrt{2}\cos\left(2\pi(f_c+s_m\Delta f)t+\theta_c\right)\varphi(t)$$

- La condición de ortonormalidad implica el cálculo de:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(t)\varphi_n(t)dt=2\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(2\pi(f_c+m\Delta f)t+\theta_c\right)\cos\left(2\pi(f_c+n\Delta f)t+\theta_c\right)\varphi(t)\varphi(t)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(2\pi(m-n)\Delta ft\right)\varphi^2(t)dt+\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(2\pi(2f_c+(n+m)\Delta f)t+2\theta_c\right)\varphi^2(t)dt$$

FSK Ortogonal (IV)

- Utilizando pulso rectangular:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(t)\varphi_n(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(2\pi(m-n)\Delta f t\right)dt = \frac{\sin\left(2\pi(m-n)\Delta f T\right)}{2\pi(m-n)\Delta f T}$$

- La condición de ortonormalidad implica:

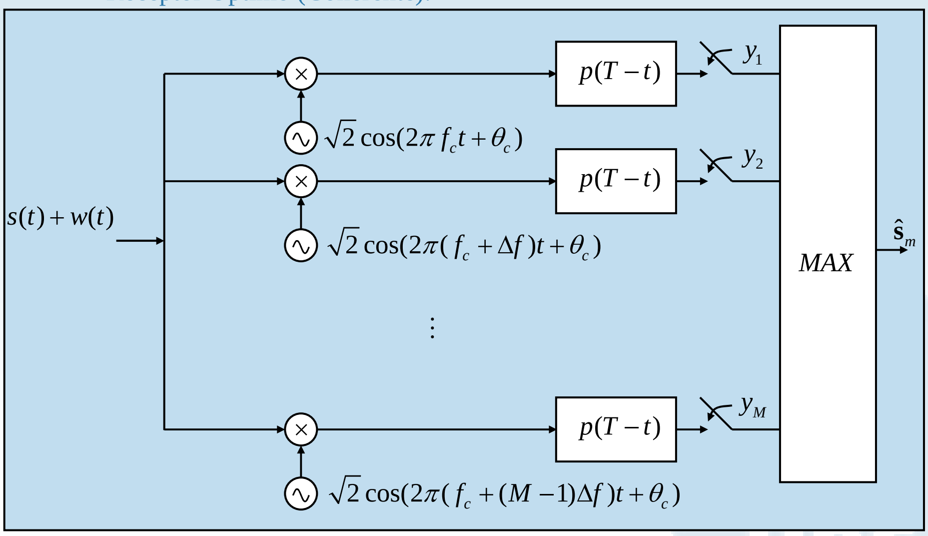
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(t)\varphi_n(t)dt = \delta[m-n] \Rightarrow \Delta f = N/2T$$

donde N es un número entero arbitrario. Por tanto la separación mínima es:

$$\Delta f_{\min} = 1/2T$$

FSK Ortogonal (V)

- Receptor Óptimo (Coherente):



FSK Ortogonal (VI)

- El receptor se puede plantear sin conocimiento de la fase de la portadora (la frecuencia se supone conocida de forma perfecta)
- Supondremos una modulación *On-Off Keying* (OOK):

$$\left.\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cos(2\pi f_c t + \theta_c)\varphi(t-nT) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left[\cos(2\pi f_c t)\cos\theta_c - \sin(2\pi f_c t)\sin\theta_c\right]\varphi(t-nT) \end{aligned}\right\} A_n \in \{A_c, 0\}$$

- El receptor se supone formado por una base ortonormal de dimensión *L*=2.

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi f_c t)\varphi(t)$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi f_c t)\varphi(t)$$

- De esta forma la señal se puede expresar como:

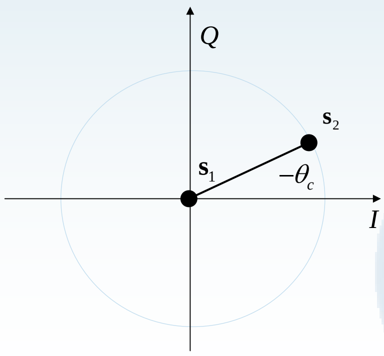
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{2}}\left[\cos\theta_c \varphi_1(t-nT) - \sin\theta_c \varphi_2(t-nT)\right]$$

FSK Ortogonal (VII)

- De forma que la constelación de la modulación resulta:

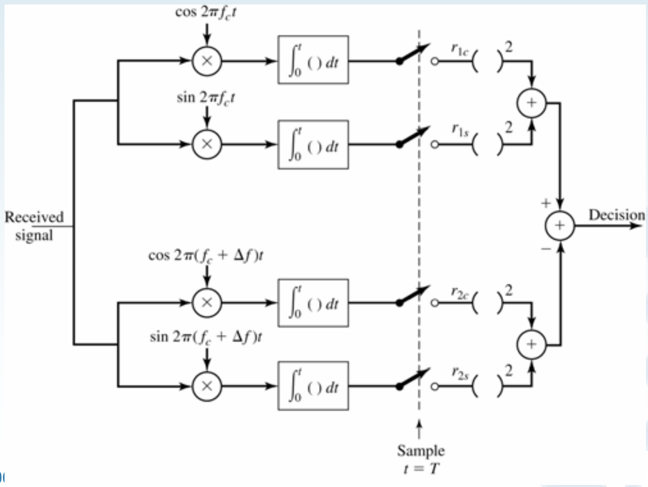
$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{s}_2 = \sqrt{2E_b}\begin{bmatrix} \cos\theta_c \\ -\sin\theta_c \end{bmatrix}$$

- Al ser el ángulo desconocido resulta adecuado un detector de envolvente



FSK Ortogonal (VIII)

- La estructura del receptor no coherente resulta por tanto de la combinación de un filtro paso banda seguido de un detector de envolvente



FSK Ortogonal (IX)

- La expresión de la probabilidad de error resulta:

$$BER \approx \tfrac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{2N_0}}$$

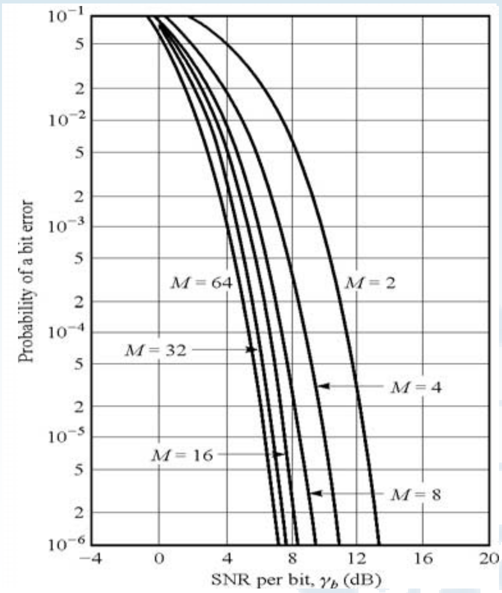
frente a:

$$BER_{coh} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

lo que supone una pérdida de aprox. 1dB.

- En el caso multinivel:

$$BER_{coh} = \frac{M}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$



FSK Ortogonal (X)

- La condición de otogonalidad suponiendo error de fase resulta (pulso rectangular):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(t)\varphi_n(t)dt = 2\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(2\pi(f_c+m\Delta f)t+\theta_c\right)\cos\left(2\pi(f_c+n\Delta f)t+\theta_l\right)\varphi(t)\varphi(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(2\pi(m-n)\Delta ft+\Delta\theta\right)\varphi^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(2\pi(2f_c+(n+m)\Delta f)t+\theta_c+\theta_l\right)\varphi^2(t)dt =$$

$$= \tfrac{1}{T}\int_{0}^{T}\cos\left(2\pi(m-n)\Delta ft+\Delta\theta\right)dt = \frac{\sin\left(2\pi(m-n)\Delta fT+\Delta\theta\right)-\sin\Delta\theta}{2\pi(m-n)\Delta fT}$$

En general sin referencia de fase:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(t)\varphi_n(t)dt = \delta[m-n] \Rightarrow 2\pi\Delta fT = k\times 2\pi \Rightarrow \Delta f_{\min} = \frac{1}{T}$$

Por el contrario cuando la fase es conocida, $\Delta\theta = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(t)\varphi_n(t)dt = \delta[m-n] \Rightarrow 2\pi\Delta fT = k\times \pi \Rightarrow \Delta f_{\min} = \frac{1}{2T}$$