

Comunicaciones II

Tema 4 Modulaciones digitales con portadora

Javier Rodríguez Fonollosa



Departament de Teoria
del Senyal i Comunicacions



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Indice del Tema 4 Modulaciones Digitales con portadora

- **4.1 Introducción**
- **4.2 Densidad espectral de potencia**
- **4.3 Modulaciones lineales**
- **4.4 Modulaciones no lineales**
- **4.5 Receptor óptimo y errores de sincronismo**

31/10/2006

COM II

T4-2



4.1 Introducción

Motivación las modulaciones paso-banda

- Muchos de los canales de transmisión presentan una naturaleza paso banda
- La asignación de bandas de frecuencia permite la compartición del canal por distintos sistemas.
- Dentro de la asignación de un sistema permite en algunos casos la compartición por diferentes usuarios (FDMA).
- Cuestiones prácticas asociadas al tamaño de las antenas y la atenuación en comunicaciones vía radio.
- Se definirán a partir de cierta frecuencia portadora f_c con un determinado ancho de banda B_T . En general $f_c \gg B_T$
- Los objetivos genéricos serán maximizar la tasa de transmisión minimizando el ancho de banda y la tasa de error

31/10/2006

COM II

T4-3

Introducción (II)

- Ejemplo:

$$s(t) = A_c i_s(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) - A_c q_s(t) \sin(2\pi f_c t + \theta_c)$$

- En donde

$$i_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_i[n] p(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I[n] p(t-nT): \text{Componente en fase}$$

$$q_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_q[n] p(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q[n] p(t-nT): \text{Componente en cuadratura}$$

- Además se supondrá media cero e independencia entre las componentes:

$$E[I[n]Q[k]] = 0, \text{ para todo } n, k$$

- Comparación con $L=2$ en el Tema 2

31/10/2006

COM II

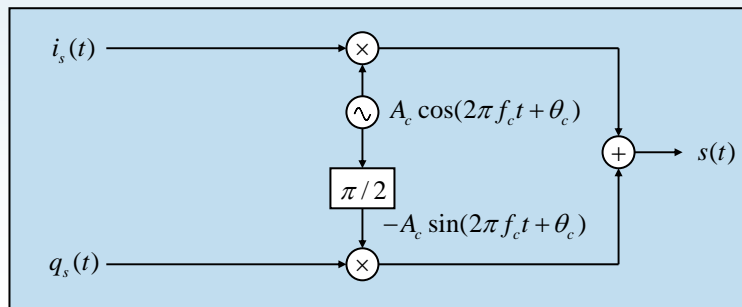
T4-4

4.2 Densidad espectral de potencia

- Consideraremos el cálculo de la densidad espectral de potencia para modulaciones lineales paso banda:

$$s(t) = A_c i_s(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) - A_c q_s(t) \sin(2\pi f_c t + \theta_c)$$

$$i_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I[n] p(t-nT) \quad ; \quad q_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q[n] p(t-nT)$$



31/10/2006

COM II

T4-5

Densidad espectral de potencia (II)

- En primer lugar consideraremos el cálculo de la media estadística de la señal transmitida:

$$\begin{aligned} \mu_s(t) &= E[s(t)] = E[A_c i_s(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) - A_c q_s(t) \sin(2\pi f_c t + \theta_c)] = \\ &= A_c \cos(2\pi f_c t + \theta_c) E[i_s(t)] - A_c \sin(2\pi f_c t + \theta_c) E[q_s(t)] \end{aligned}$$

- Que depende de las esperanzas de las componentes en fase y cuadratura:

$$E[i_s(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[I[n]] p(t-nT) = 0$$

$$E[q_s(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[Q[n]] p(t-nT) = 0$$

- Que se anulan suponiendo modulaciones con media nula en sus coordenadas y por tanto:

$$\mu_s(t) = 0$$

31/10/2006

COM II

T4-6

Densidad espectral de potencia (III)

- A continuación se calcula la función de autocorrelación de la señal transmitida:

$$\begin{aligned}
 R_s(t+\tau, t) &= E[s(t+\tau)s(t)] = \\
 &= E\left[\left(A_c i_s(t+\tau) \cos(2\pi f_c(t+\tau) + \theta_c) - A_c q_s(t+\tau) \sin(2\pi f_c(t+\tau) + \theta_c) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left(A_c i_s(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) - A_c q_s(t) \sin(2\pi f_c t + \theta_c) \right) \right] = \\
 &= A_c^2 \cos(2\pi f_c(t+\tau) + \theta_c) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) E[i_s(t+\tau)i_s(t)] - \\
 &\quad - A_c^2 \cos(2\pi f_c(t+\tau) + \theta_c) \sin(2\pi f_c t + \theta_c) E[i_s(t+\tau)q_s(t)] - \\
 &\quad - A_c^2 \sin(2\pi f_c(t+\tau) + \theta_c) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) E[q_s(t+\tau)i_s(t)] + \\
 &\quad + A_c^2 \sin(2\pi f_c(t+\tau) + \theta_c) \sin(2\pi f_c t + \theta_c) E[q_s(t+\tau)q_s(t)] =
 \end{aligned}$$

- Donde se ha supuesto independencia entre las componentes en fase y cuadratura

31/10/2006

COM II

T4-7

Densidad espectral de potencia (IV)

- Agrupando términos:

$$\begin{aligned}
 R_s(t+\tau, t) &= \frac{A_c^2}{2} R_{i_s}(t+\tau, t) \left[\cos(2\pi f_c \tau) + \cos(2\pi f_c(2t+\tau) + \theta_c) \right] + \\
 &\quad + \frac{A_c^2}{2} R_{q_s}(t+\tau, t) \left[\cos(2\pi f_c \tau) - \cos(2\pi f_c(2t+\tau) + \theta_c) \right]
 \end{aligned}$$

- En el Tema 3 vimos que en el caso de PM la función de autocorrelación era periódica de periodo T en t (cicloestacionaria en autocorrelación con periodo T)

$$R_{i_s}(t+\tau, t) = R_{i_s}(t+mT+\tau, t+mT) \quad ; \quad R_{q_s}(t+\tau, t) = R_{q_s}(t+mT+\tau, t+mT)$$

- Los términos de $\cos(\)$ son periódicos en t con periodo $1/f_c$. En general supondremos:

$$T = N \frac{1}{f_c} \text{ en donde } N \text{ representa un número entero}$$

31/10/2006

COM II

T4-8

Densidad espectral de potencia (IV)

- De esta forma la función de autocorrelación:

$$R_s(t + \tau, t) = \frac{A_c^2}{2} R_{i_s}(t + \tau, t) [\cos(2\pi f_c \tau) + \cos(2\pi f_c (2t + \tau) + \theta_c)] + \frac{A_c^2}{2} R_{q_s}(t + \tau, t) [\cos(2\pi f_c \tau) - \cos(2\pi f_c (2t + \tau) + \theta_c)]$$

resulta periódica de periodo T (cicloestacionaria en la autocorrelación con periodo T)

$$R_s(t + \tau, t) = R_s(t + mT + \tau, t + mT)$$

y la densidad espectral se puede obtener a partir de la función de correlación promediada en un periodo (Teorema de Wiener-Khinchin)

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \int R_s(t + \tau, t) dt$$

31/10/2006

COM II

T4-9

Densidad espectral de potencia (IV)

- La función de correlación promediada en un periodo resulta:

$$\begin{aligned} \hat{R}_s(\tau) &= \frac{1}{T} \int R_s(t + \tau, t) dt = \\ &= \frac{A_c^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) \frac{1}{T} \int R_{i_s}(t + \tau, t) dt + \\ &+ \frac{A_c^2}{2} \frac{1}{T} \int R_{i_s}(t + \tau, t) \cancel{\cos(2\pi f_c (2t + \tau) + \theta_c)} dt + \\ &+ \frac{A_c^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) \frac{1}{T} \int R_{q_s}(t + \tau, t) dt - \\ &- \frac{A_c^2}{2} \frac{1}{T} \int R_{q_s}(t + \tau, t) \cancel{\cos(2\pi f_c (2t + \tau) + \theta_c)} dt \approx \\ &\approx \frac{A_c^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) [\hat{R}_{i_s}(\tau) + \hat{R}_{q_s}(\tau)] \end{aligned}$$

Se supondrán despreciables

31/10/2006

COM II

T4-10

Densidad espectral de potencia (V)

- Finalmente:

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{A_c^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) [\hat{R}_i(\tau) + \hat{R}_q(\tau)]$$

$$S_s(f) = \frac{A_c^2}{4} [S_i(f - f_c) + S_i(f + f_c) + S_q(f - f_c) + S_q(f + f_c)]$$

Además:

$$P_s = \hat{R}_s(0) = \frac{A_c^2}{2} [\hat{R}_i(0) + \hat{R}_q(0)] = \frac{A_c^2}{2} [P_i + P_q]$$

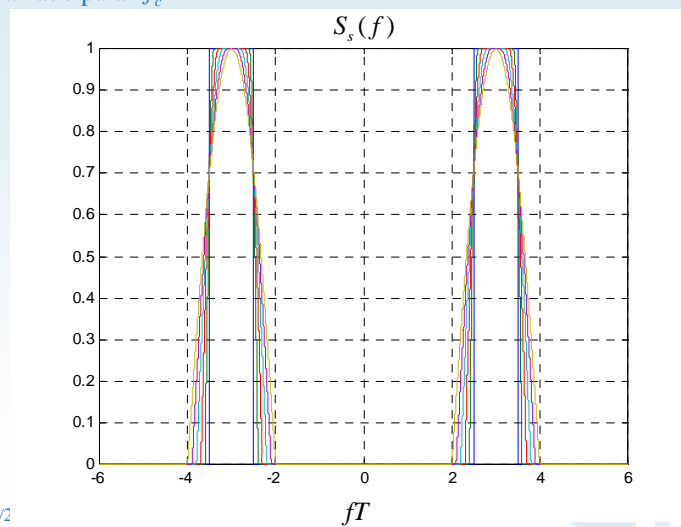
31/10/2006

COM II

T4-11

Densidad espectral de potencia (VI)

- Ejemplo: Modulación en fase y cuadratura utilizando pulsos de coseno realizado para $f_c = 3/T$



31/10/2

T4-12

4.3 Modulaciones lineales

- Modulación lineal de amplitud: ASK
 - Se utiliza una modulación PAM (unipolar) en la componente en fase. La componente en cuadratura es nula

$$s(t) = A_c i_s(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) \quad ; \quad i_s(t) \sim \text{PAM (unipolar)}$$

- Consideraremos $f_c = N \frac{1}{T}$
- De esta forma podemos expresar la señal utilizando la notación del Tema 2:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n [n] \varphi_1(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I[n] \varphi_1(t - nT)$$

$$I[n] \in \{0, 1, 2, \dots, (M-1)\} \times A_c \sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c)$$

31/10/2006

COM II

T4-13

Modulaciones lineales (II)

- Ejemplo 4-ASK

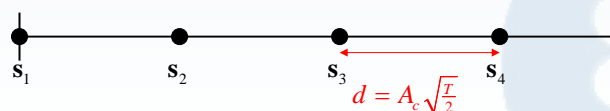
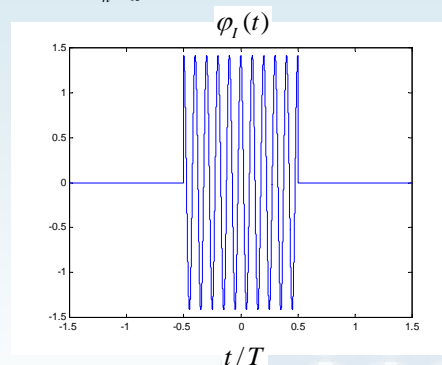
$$\theta_c = 0 \quad ; \quad f_c = 10/T$$

$$\varphi(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \cos(2\pi f_c t + \theta_c)$$

$$I[n] = s_m \in \{0, 1, 2, 3\} \times A_c \sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I[n] \varphi_1(t - nT)$$



31/10/2006

COM II

T4-14

Modulaciones lineales (III)

- Cuando se modulan tanto la componente en fase como la componente en cuadratura conviene recurrir a la notación compleja del equivalente paso bajo. La parte real se corresponde con las componentes en fase y la imaginaria con la componente en cuadratura.
- Equivalen a las coordenadas del primer y segundo elemento de la base en el espacio de la señal.

Notación compleja

Notación de espacio de la señal

$$\begin{aligned}
 s(t) &= A_c i_s(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) - A_c q_s(t) \sin(2\pi f_c t + \theta_c) = \\
 &= A_c \sqrt{\frac{2}{T}} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (I[n] + jQ[n]) e^{j(2\pi f_c t + \theta_c)} \right\} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (I[n] \varphi_I(t - nT) + Q[n] \varphi_Q(t - nT))
 \end{aligned}$$

$$\varphi_I(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) \quad ; \quad \varphi_Q(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \varphi(t) \sin(2\pi f_c t + \theta_c)$$

31/10/2006

COM II

T4-15

Modulaciones lineales (IV)

- Funciones base sin la restricción $f_c = N \frac{1}{T}$
 - La restricción anterior no es necesaria para definir funciones base equivalentes a las señales en fase y cuadratura.
 - Si no se cumple sin embargo estas funciones *cambian en cada periodo de símbolo*:

Notación compleja

Notación de espacio de la señal

$$\begin{aligned}
 s(t) &= A_c i_s(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) - A_c q_s(t) \sin(2\pi f_c t + \theta_c) = \\
 &= A_c \sqrt{\frac{2}{T}} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (I[n] + jQ[n]) e^{j(2\pi f_c t + \theta_c)} \right\} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (I[n] \varphi_{I[n]}(t) + Q[n] \varphi_{Q[n]}(t))
 \end{aligned}$$

$$\varphi_{I[n]}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi(t - nT) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) \quad ; \quad \varphi_{Q[n]}(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \varphi(t - nT) \sin(2\pi f_c t + \theta_c)$$

31/10/2006

COM II

T4-16

Modulaciones lineales (V)

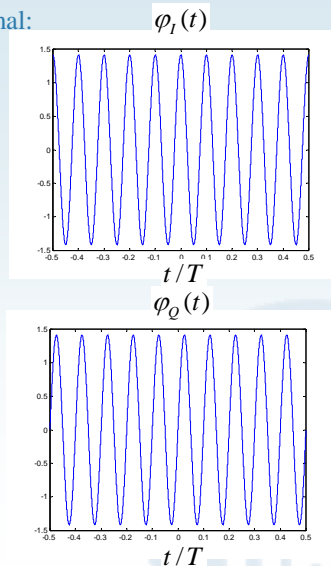
- Ejemplo: Funciones de la base ortonormal:

$$\theta_c = 0 \quad ; \quad f_c = 10/T$$

$$\varphi(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

$$\varphi_I(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \cos(2\pi f_c t + \theta_c)$$

$$\varphi_Q(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \sin(2\pi f_c t + \theta_c)$$



31/10/2006

COM II

T4-17

Modulaciones lineales (VI)

- Modulaciones de fase PSK

$$\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} I_m \\ Q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \cos\left(\frac{2\pi(m-1)}{M}\right) \\ \sqrt{E_s} \sin\left(\frac{2\pi(m-1)}{M}\right) \end{pmatrix}$$

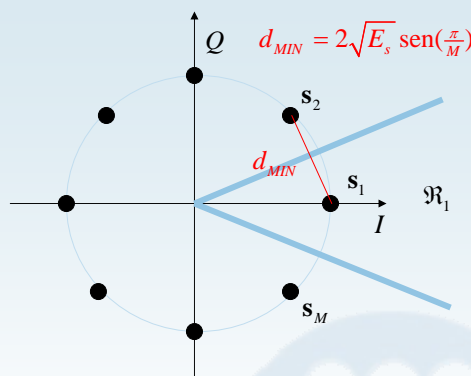
$$\mathbf{y} \in \mathfrak{R}_1 \Leftrightarrow \left| \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \right| < \frac{\pi}{M}$$

- En notación compleja

$$I_m + jQ_m = \sqrt{E_s} e^{j\left(\frac{2\pi(m-1)}{M}\right)} = \sqrt{E_s} e^{j\phi_m}$$

- Probabilidad de error vista en el Tema 2

$$BER_{Gray} \approx \frac{2}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)$$



31/10/2006

COM II

T4-18

Modulaciones lineales (VII)

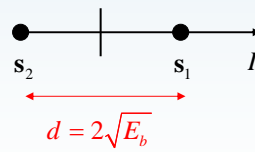
- Ejemplos de modulaciones de fase PSK: $M=2$

$$\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} I_m \\ Q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \cos(\pi(m-1)) \\ \sqrt{E_s} \sin(\pi(m-1)) \end{pmatrix} = \sqrt{E_b} \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La componente en cuadratura es nula

- En notación compleja

$$I_m + jQ_m = \sqrt{E_s} e^{j(\pi(m-1))} = \sqrt{E_s} e^{j\phi_m} = \{1, -1\} \quad ; \quad Q_m = 0 \quad ; \quad \phi_m \in \{0, \pi\}$$



- Resulta totalmente equivalente al 2PAM

31/10/2006

COM II

T4-19

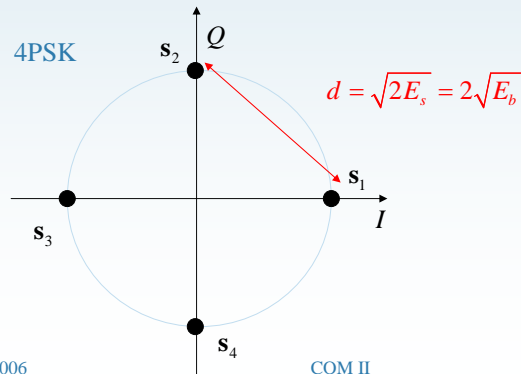
Modulaciones lineales (VIII)

- Ejemplos de modulaciones de fase PSK: $M=4$

$$\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} I_m \\ Q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \cos(\frac{\pi}{2}(m-1)) \\ \sqrt{E_s} \sin(\frac{\pi}{2}(m-1)) \end{pmatrix}$$

- En notación compleja

$$I_m + jQ_m = \sqrt{E_s} e^{j(\frac{\pi}{2}(m-1))} = \sqrt{E_s} e^{j\phi_m} \quad ; \quad \phi_m \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$$



31/10/2006

COM II

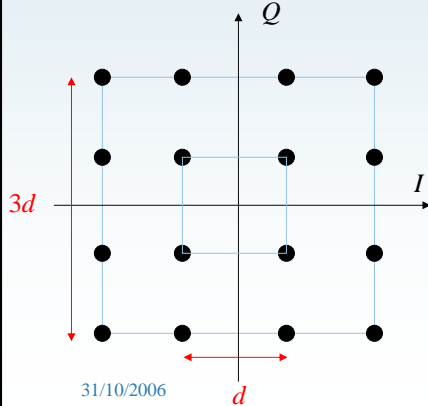
T4-20

Modulaciones lineales (IX)

- Modulaciones QAM (Quadrature Amplitude Modulation)
- Los bits se distribuyen de forma independiente en cada dimensión:

$$b = 2b' \quad ; \quad M = 2^b = 2^{2b'}$$

- De esta forma en cada dimensión se tiene el equivalente a una modulación PAM de dimensión $M' = \sqrt{M}$



$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (I[n]\phi_1(t-nT) + Q[n]\phi_2(t-nT))$$

Ejemplo con:

$$M = 16 = 2^4 = 2^{2 \times 2}; M' = \sqrt{M} = 4$$

$$b = 4 = 2b'$$

31/10/2006

COM II

T4-21

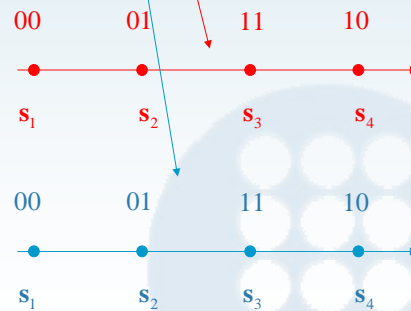
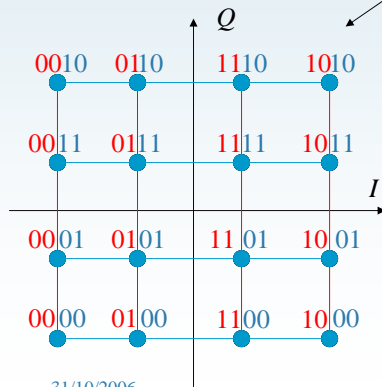
Modulaciones lineales (X)

- La expresión de los símbolos resulta:

$$M = 16 = 2^4 = 2^{2 \times 2}; M' = \sqrt{M} = 4$$

$$b = 4 = 2b'$$

$$\mathbf{s}_m^{16-QAM} = \begin{pmatrix} s_{m_1}^{4-PAM} \\ s_{m_2}^{4-PAM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}$$



31/10/2006

COM II

T4-22

Modulaciones lineales (XI)

- Energías de símbolo, bit y probabilidad de error vistas en el Tema 2:

$$\mathbf{s}_m^{M-QAM} = \begin{pmatrix} s_{m1}^{M'-PAM} \\ s_{m2}^{M'-PAM} \end{pmatrix} \Rightarrow E_{s_m^{M-QAM}} = E_{s_{m1}^{M'-PAM}} + E_{s_{m2}^{M'-PAM}} = 2E_{s_{m1}^{M'-PAM}}$$

$$E_b^{M-QAM} = \frac{1}{b} E_{s_m^{M-QAM}} = \frac{2}{b} E_{s_{m1}^{M'-PAM}} = \frac{1}{b'} E_{s_{m1}^{M'-PAM}} = E_{b'}^{M'-PAM} = E_b$$

- Expresión de la BER. Equivalente a PAM con codificación Gray:

$$BER \approx \frac{2M'-2}{M' \log_2 M'} Q\left(\sqrt{\frac{6b'}{M'^2-1} \frac{E_b^{M'-PAM}}{N_0}}\right) = \frac{2M'-2}{M' \log_2 M'} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M'}{M'^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right) =$$

$$= 4 \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M} \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{4}{\log_2 M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- La expresión de la BER para cada componente coincide con la BER total

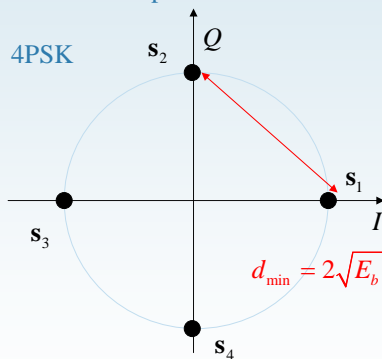
31/10/2006

COM II

T4-23

Modulaciones lineales (XII)

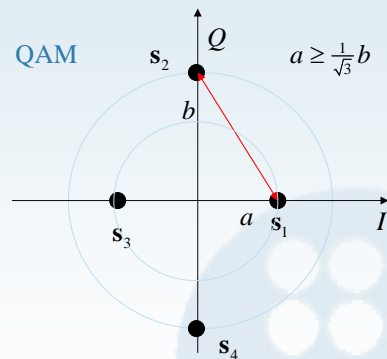
- Comparación entre modulaciones PSK y QAM: $M=4$
 - ¿Existe alguna forma óptima de distribuir estos símbolos en el espacio de la señal?



– Resultan equivalentes

31/10/2006

COM II

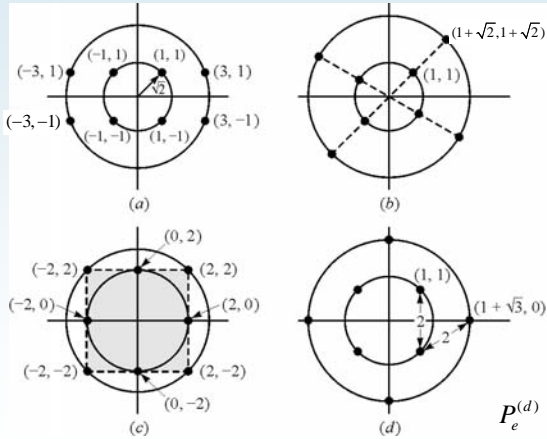


$$\left. \begin{aligned} E_s &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \\ d_{\min} &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned} \right\} d_{\min} = 2\sqrt{E_b}$$

T4-24

Modulaciones lineales (XIII)

- QAM óptima para $M=8$
 - Distribución con mayor d_{\min} para la misma E_b ?



- Todos los casos tienen la misma distancia mínima ($d_{\min}=2A$)
 - $E_s^{(a)} = 6A^2 = E_s^{(c)}$
 - $E_s^{(b)} = 6,83A^2$
 - $E_s^{(d)} = 4,73A^2$
- La constelación (d) consigue la misma distancia mínima con menos energía

$$P_e^{(d)} \approx 4Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = 4Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{1,62N_0}}\right)$$

(Proakis, p.277)

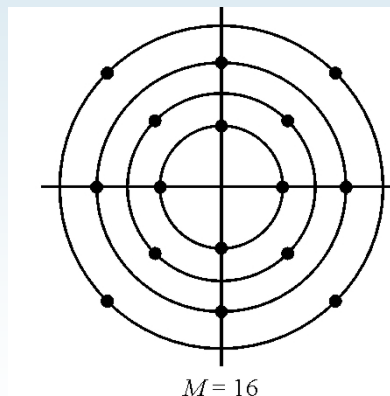
31/10/2006

COM II

T4-25

Modulaciones lineales (XIV)

- QAM óptima para $M=16$
 - La distribución óptima para $M=8$ puede generalizarse a $M=16$:



(Proakis, p.175)

$M=16$

pero deja de ser óptima!

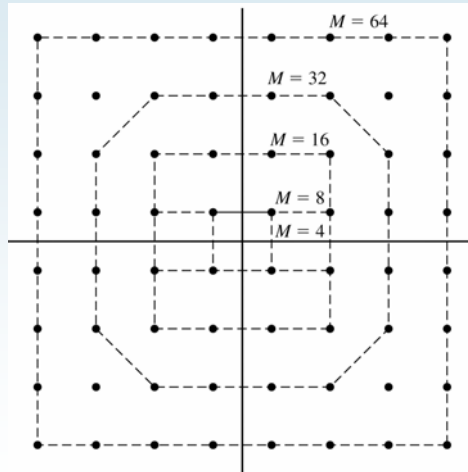
31/10/2006

COM II

T4-26

Modulaciones lineales (XV)

- Distribuciones QAM rectangulares hasta $M=64$



- En las constelaciones cuadradas:

$$\mathbf{S}_m^{M-QAM} = \begin{pmatrix} S_{m1}^{M'-PAM} \\ S_{m2}^{M'-PAM} \end{pmatrix} \Rightarrow E_{S_m^{M-QAM}} = 2E_{S_{m1}^{M'-PAM}}$$

$$E_b^{M-QAM} = E_{b'}^{M'-PAM} = E_b$$

$$BER \approx \frac{4}{\log_2 M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

31/10/2006

(Proakis, p.175)

COM II

T4-27

Modulaciones lineales (XVI)

- Comparación entre la P(e) de QAM cuadradas y PSK:
 - Para QAM cuadrada hemos visto:

$$BER_{QAM} \approx \frac{4}{\log_2 M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right) \approx \frac{4}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- Mientras que en PSK:

$$BER_{PSK} \approx \frac{2}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0} \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}\right)$$

- En general la BER vendrá dominada por el argumento de la función $Q(\cdot)$. Expresando la relación entre estos argumentos como:

$$R(M) = \frac{3}{2(M-1) \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} \begin{cases} R(8) = 1,65dB \\ R(16) = 4,20dB \\ R(32) = 7,02dB \\ R(64) = 9,95dB \end{cases}$$

31/10/2006

COM II

T4-28

4.4 Modulaciones no lineales

- Modulaciones digitales en frecuencia: FSK
 - Como alternativa a la utilización de un espacio de la señal de dimensión $L=2$ se puede considerar la utilización de M formas de onda ortonormales mediante la modulación en frecuencia
 - La función base paso bajo (compleja) será:

$$\varphi_m(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} e^{j2\pi m \Delta f t} \quad ; \quad m \in \{1, 2, \dots, M\} \quad ; \quad 0 \leq t \leq T$$

y la señal transmitida:

$$s_m(t) = \text{Re} \left\{ \sqrt{2E_s} \varphi_m(t) e^{j2\pi f_c t} \right\} = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi(f_c + m\Delta f)t) \quad ; \quad m \in \{1, 2, \dots, M\} \quad ; \quad 0 \leq t \leq T$$

- La condición de ortogonalidad es:

$$\begin{aligned} \rho_{km} &\triangleq \langle \varphi_k(t), \varphi_m(t) \rangle = \int_0^T \varphi_k(t) \varphi_m^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{j2\pi(k-m)\Delta f t} dt = \\ &= \frac{\text{sen } \pi T(m-k)\Delta f}{\pi T(m-k)\Delta f} e^{j\pi(m-k)\Delta f} = \delta[m-k] \quad ; \quad m, k \in \{1, 2, \dots, M\} \end{aligned}$$

31/10/2006

COM II

T4-29

Modulaciones no lineales (II)

- Los valores de la separación de frecuencia mínimos necesarios se obtienen como:

$$\begin{aligned} |\rho_{km}| = \delta[m-n] &\Rightarrow \Delta f = 1/T \\ \text{Re}\{\rho_{km}\} = \delta[m-n] &\Rightarrow \Delta f = 1/2T \end{aligned}$$

- Como veremos en el diseño del receptor para funciones base complejas es suficiente asegurar $\text{Re}\{\rho_{km}\} = 0$
- La modulación FSK es equivalente a una constelación M -ortogonal (sin memoria):

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_s} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{s}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sqrt{E_s} \end{pmatrix}$$

con distancia mínima: $d_{\min} = \sqrt{2E_s}$

31/10/2006

COM II

T4-30

Modulaciones no lineales (II)

- FSK de fase continua: CPFSK
 - La modulación FSK genera cambios bruscos de frecuencia en la señal transmitida que se reflejan en colas espectrales significativas.
 - Como alternativa se plantea la modulación en frecuencia manteniendo constante la fase de la portadora
 - Esta señal se obtendrá mediante la modulación en frecuencia de una señal de características similares a una PAM:

$$d(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_{m[k]} g(t-kT) \quad ; \quad s_{m[k]} \in \{\pm 1, \pm 3, \pm(M-1)\} \quad ; \quad g(t) = \frac{1}{2T} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

- Esta señal se utiliza para modular la portadora de forma que el equivalente paso bajo es:

$$s_l(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T}} \exp\left(j\left(4\pi T f_d \int_{-\infty}^t d(\tau) d\tau + \phi_0\right)\right)$$

31/10/2006

COM II

T4-31

Modulaciones no lineales (III)

- La señal transmitida resulta:

$$s(t) = \operatorname{Re}\{s_l(t) e^{j2\pi f_c t}\} = \sqrt{\frac{2E_b}{T}} \cos(2\pi f_c t + \phi(t; \mathbf{S}) + \phi_0)$$

$$\phi(t; \mathbf{S}) = 4\pi T f_d \int_{-\infty}^t d(\tau) d\tau = 4\pi T f_d \int_{-\infty}^t \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_{m[k]} g(\tau - kT) \right] d\tau$$

de forma que, pese a que la señal $d(t)$ presenta discontinuidades, su integral es continua y la fase de la señal transmitida se mantiene continua. La fase depende de t y de \mathbf{S} , la secuencia de símbolos transmitida.

- La fase de la portadora en el intervalo $nT \leq t \leq (n+1)T$

$$\begin{aligned} \phi(t; \mathbf{S}) &= 4\pi T f_d \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{n-1} s_{m[k]} + 4\pi T f_d \int_{-\infty}^t s_{m[n]} g(\tau - nT) d\tau = \\ &= 2\pi T f_d \sum_{k=-\infty}^{n-1} s_{m[k]} + (t - nT) 2\pi T f_d s_{m[n]} = \\ &= \theta_n + 2\pi h s_{m[n]} q(t - nT) \end{aligned}$$

31/10/2006

T4-32

Modulaciones no lineales (IV)

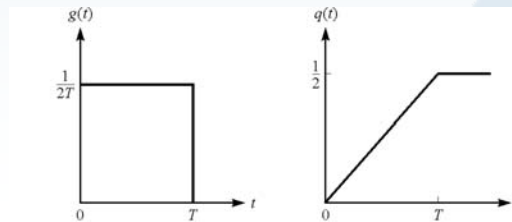
- Resulta: $\phi(t; \mathbf{S}) = \theta_n + 2\pi h s_{m[n]} q(t - nT)$

donde se ha definido:

$h \triangleq 2f_d T$: Índice de modulación

$\theta_n \triangleq \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-1} s_{m[k]}$: Fase acumulada debida a los símbolos anteriores

$q(t) \triangleq \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/2T & 0 \leq t \leq T \\ \frac{1}{2} & t > T \end{cases}$: Integral del pulso rectangular

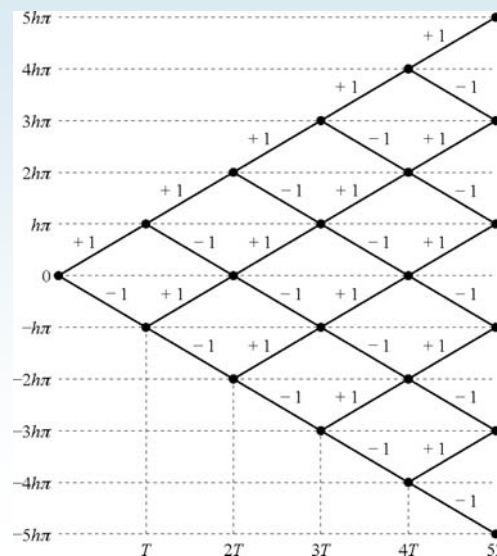


31/10/2006

T4-33

Modulaciones no lineales (V)

- Ejemplos de posibles evoluciones de la fase de la portadora ($M=2$):

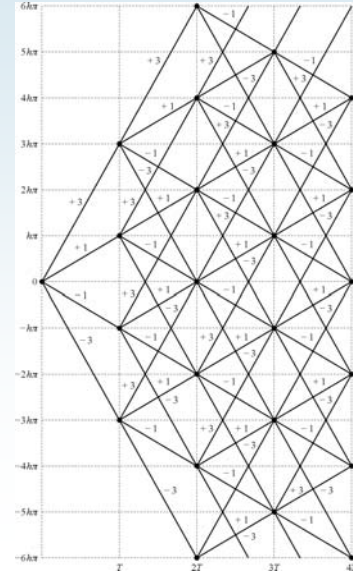


31/10/2006

T4-34

Modulaciones no lineales (VI)

- Ejemplos de posibles evoluciones de la fase de la portadora ($M=4$):

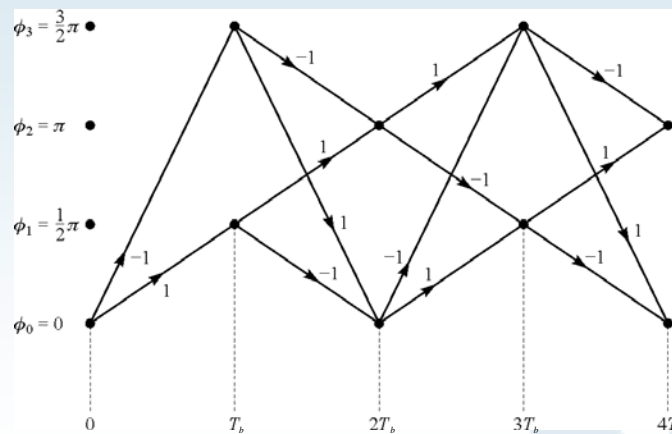


31/10/2006

T4-35

Modulaciones no lineales (VII)

- La fase suele representarse módulo 2π es decir, para el caso $M=2$ y para $h=1/2$



31/10/2006

COM II

T4-36

Modulaciones no lineales (VIII)

- *Minimum Shift Keying (MSK)*: CPFSK binaria con $h=1/2$
 - En este caso, la fase de la portadora puede expresarse como:

$$\phi(t; \mathbf{S}) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{n-1} s_{m[k]} + \pi s_{m[n]} q(t - nT_b) = \theta_n + \frac{(t - nT_b) \pi}{T_b} \frac{\pi}{2} s_{m[n]} ; \begin{cases} nT_b \leq t \leq (n+1)T_b \\ s_{m[n]} \in \{1, -1\} \end{cases}$$

y por tanto la señal transmitida como:

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re} \left\{ A e^{j\phi(t; \mathbf{S})} e^{j2\pi f_c t} \right\} = A \cos \left(2\pi f_c t + \theta_n + \frac{(t - nT_b) \pi}{T_b} \frac{\pi}{2} s_{m[n]} \right) = \\ &= A \cos \left(2\pi \left(f_c + \frac{1}{4T_b} s_{m[n]} \right) t - \frac{1}{2} n\pi s_{m[n]} + \theta_n \right) ; nT_b \leq t \leq (n+1)T_b \end{aligned}$$

lo que indica que la señal MSK se puede expresar como una senoide que posee dos posibles frecuencias:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_{ins} | (s_{m[n]} = -1) = f_c - \frac{1}{4T_b} \\ f_2 &= f_{ins} | (s_{m[n]} = 1) = f_c + \frac{1}{4T_b} \end{aligned}$$

31/10/2006

T4-37

Modulaciones no lineales (IX)

- De esta forma según el símbolo transmitido la señal tiene la expresión:

$$s(t) | (s_{m[n]} = -1) = A \cos \left(2\pi \left(f_c - \frac{1}{4T_b} \right) t + \frac{1}{2} n\pi + \theta_n \right)$$

$$s(t) | (s_{m[n]} = 1) = A \cos \left(2\pi \left(f_c + \frac{1}{4T_b} \right) t - \frac{1}{2} n\pi + \theta_n \right)$$

- La separación entre frecuencias es la mínima que garantiza ortogonalidad:

$$f_2 - f_1 = \frac{1}{2T_b}$$

31/10/2006

COM II

T4-38

Modulaciones no lineales (X)

- Calculando las componentes en fase y cuadratura de la señal transmitida para $n=2p$ (par):

$$\phi(t; \mathbf{S}) = \phi(2pT_b + \tau; \mathbf{S}) = \theta_{2p} + \frac{\pi}{2T_b} \tau s_{m[2p]}; \begin{cases} 0 \leq \tau \leq T_b \\ s_{m[2p]} \in \{1, -1\} \\ \theta_{2p} \in \{0, \pi\} \end{cases}$$

$$i_s(2pT_b + \tau) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(\theta_{2p} + \frac{\pi}{2T_b} \tau s_{m[2p]}\right) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos \theta_{2p} \cos\left(\frac{\pi}{2T_b} \tau\right)$$

$$\begin{aligned} q_s(2pT_b + \tau) &= \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin\left(\theta_{2p} + \frac{\pi}{2T_b} \tau s_{m[2p]}\right) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} s_{m[2p]} \cos \theta_{2p} \sin\left(\frac{\pi}{2T_b} \tau\right) = \\ &= \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin \theta_{2p+1} \sin\left(\frac{\pi}{2T_b} \tau\right) \end{aligned}$$

31/10/2006

COM II

T4-39

Modulaciones no lineales (XI)

- Calculando las componentes en fase y cuadratura de la señal transmitida para $n=2p+1$ (impar):

$$\phi(t; \mathbf{S}) = \phi((2p+1)T_b + \tau; \mathbf{S}) = \theta_{2p+1} + \frac{\pi}{2T_b} \tau s_{m[2p+1]}; \begin{cases} 0 \leq \tau \leq T_b \\ s_{m[2p+1]} \in \{1, -1\} \\ \theta_{2p+1} \in \{\pi/2, 3\pi/2\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} i_s((2p+1)T_b + \tau) &= \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(\theta_{2p+1} + \frac{\pi}{2T_b} \tau s_{m[2p+1]}\right) = \\ &= -\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} s_{m[2p+1]} \sin \theta_{2p+1} \sin\left(\frac{\pi}{2T_b} \tau\right) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos \theta_{2p+2} \sin\left(\frac{\pi}{2T_b} \tau\right) \end{aligned}$$

$$q_s((2p+1)T_b + \tau) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin\left(\theta_{2p+1} + \frac{\pi}{2T_b} \tau s_{m[2p+1]}\right) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin \theta_{2p+1} \cos\left(\frac{\pi}{2T_b} \tau\right)$$

31/10/2006

COM II

T4-40

Modulaciones no lineales (XII)

- Resultando para cualquier valor de t :

$$i_s(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \cos \theta_{2p} \cos\left(\frac{\pi(t-2pT_b)}{2T_b}\right) \Pi\left(\frac{t-2pT_b}{2T_b}\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sqrt{2E_b} \cos \theta_{2p} \varphi(t-2pT_b) =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} s'_{m[2p]} \varphi(t-pT) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} s'_{m[2p]} \varphi(t-pT)$$

$$q_s(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sin \theta_{2p+1} \cos\left(\frac{\pi(t-(2p+1)T_b)}{2T_b}\right) \Pi\left(\frac{t-(2p+1)T_b}{2T_b}\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sqrt{2E_b} \sin \theta_{2p+1} \varphi(t-(2p+1)T_b)$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} s''_{m[2p+1]} \varphi(t-pT-T_b) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} s''_{m[2p+1]} \varphi(t-pT-T_b)$$

- Con: $T = 2T_b$; $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{T_b}} \cos\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \Pi\left(\frac{t}{2T_b}\right) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$

$$s'_{m[2p]} = \sqrt{2E_b} \cos \theta_{2p} = \sqrt{2E_b} \cos\left(\frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{2p-1} s_{m[k]}\right) \in \sqrt{2E_b} \times \{1, -1\}$$

$$s''_{m[2p+1]} = \sqrt{2E_b} \sin \theta_{2p+1} = \sqrt{2E_b} \sin\left(\frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{(2p+1)-1} s_{m[k]}\right) \in \sqrt{2E_b} \times \{1, -1\}$$

31/10/2006

Modulaciones no lineales (XIII)

- Finalmente la modulación MSK admite una representación lineal:

$$i_s(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} s'_{m[2p]} \varphi(t-pT)$$

$$q_s(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} s''_{m[2p+1]} \varphi(t-pT-T_b)$$

- Donde:

$$T = 2T_b$$

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$s'_{m[2p]} \in \sqrt{2E_b} \times \{1, -1\}$$

$$s''_{m[2p+1]} \in \sqrt{2E_b} \times \{1, -1\}$$

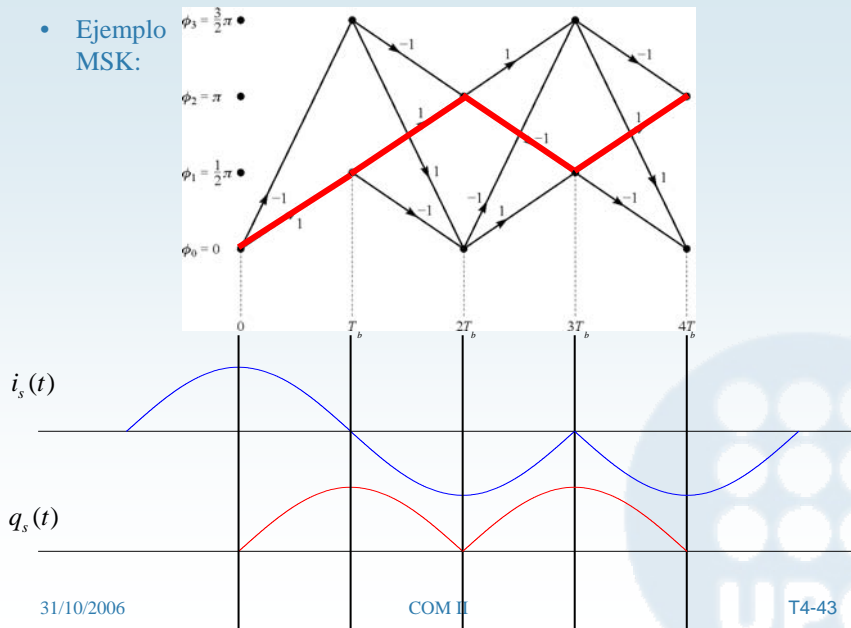
31/10/2006

COM II

T4-42

Modulaciones no lineales (XIV)

- Ejemplo MSK:



Modulaciones no lineales (XV)

- Finalmente resulta interesante compararla con la modulación lineal sin memoria Offset QPSK (OQPSK) definida como:

$$i_s(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} s_{m[2p]} g_T(t-pT) \quad ; \quad q_s(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} s_{m[2p+1]} g_T(t-pT - T_b)$$

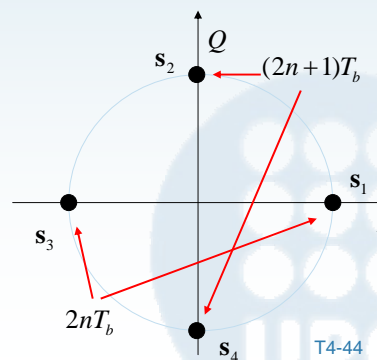
$$T = 2T_b$$

Sin este término sería QPSK

que puede interpretarse como una modulación de cuatro símbolos en $L=2$ con cambios de coordenadas cada periodo de bit T_b (equivalen a saltos de fase de $\pm\pi/2$)

- La modulación MSK es equivalente a OQPSK si ésta utiliza un pulso de tipo:

$$g_T(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$



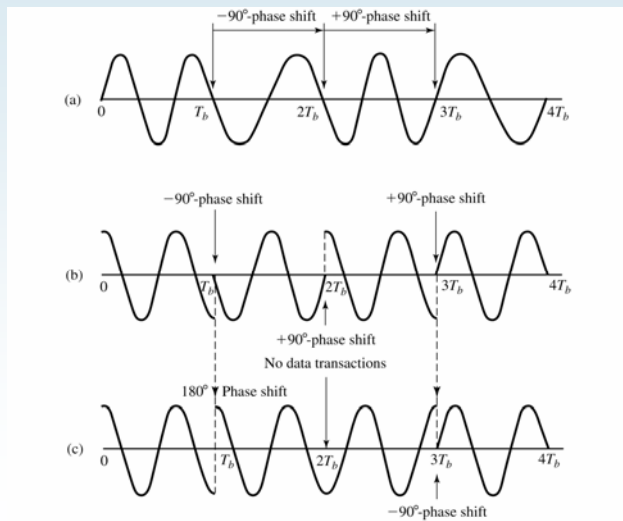
31/10/2006

COM II

T4-44

Modulaciones no lineales (XVI)

- Comparación entre MSK, OQPSK y QPSK:



31/10/2006

T4-45

Modulaciones no lineales (XVII)

- Comparación entre MSK, OQPSK y QPSK: Densidad espectral de potencia
 - En general el cálculo de la densidad espectral de las modulaciones no lineales es complicado.
 - La representación lineal de MSK permite el cálculo sencillo aplicando la expresión calculada para modulaciones lineales

$$S_s(f) = \frac{A_c^2}{4} [S_{i_s}(f - f_c) + S_{i_s}(f + f_c) + S_{q_s}(f - f_c) + S_{q_s}(f + f_c)]$$

en función de las densidades espectrales de sus componentes en fase y cuadratura:

$$i_s(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} s'_{m[2p]} \varphi(t - pT) \quad ; \quad q_s(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} s'_{m[2p+1]} \varphi(t - pT - T_b)$$

con símbolos equiprobables y:

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

31/10/2006

COM II

T4-46

Modulaciones no lineales (XVIII)

- Por tanto para MSK:

$$S_{i_s}(f) = S_{q_s}(f) = \frac{2E_b}{T} |\Phi(f)|^2 = \frac{16E_b}{\pi^2} \left[\frac{\cos 2\pi f T_b}{1 - 16f^2 T_b^2} \right]^2$$

$$S_s^{MSK}(f) = \frac{8E_b}{\pi^2} \left\{ \left[\frac{\cos 2\pi(f - f_c)T_b}{1 - 16(f - f_c)^2 T_b^2} \right]^2 + \left[\frac{\cos 2\pi(f + f_c)T_b}{1 - 16(f + f_c)^2 T_b^2} \right]^2 \right\}$$

- La densidad espectral para OQPSK y QPSK es la misma y suponiendo pulsos rectangulares resulta:

$$S_{i_s}(f) = S_{q_s}(f) = \frac{2E_b}{T} |\Phi(f)|^2 = 2E_b \left[\frac{\sin 2\pi f T_b}{2\pi f T_b} \right]^2$$

$$S_s^{QPSK}(f) = E_b \left\{ \left[\frac{\sin 2\pi(f - f_c)T_b}{2\pi(f - f_c)T_b} \right]^2 + \left[\frac{\sin 2\pi(f + f_c)T_b}{2\pi(f + f_c)T_b} \right]^2 \right\}$$

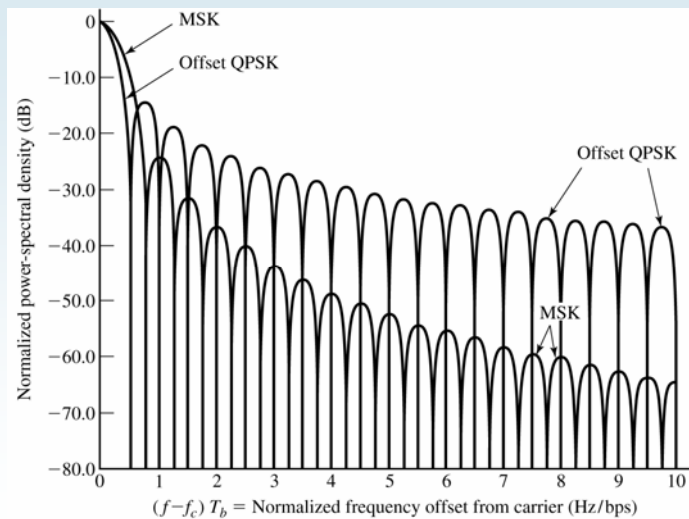
31/10/2006

COM II

T4-47

Modulaciones no lineales (XIX)

- Representación gráfica del espectro de MSK y OQPSK (QPSK)



31/10/2006

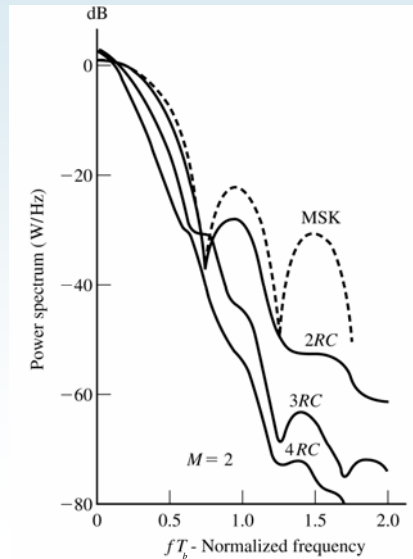
COM II

T4-48

Modulaciones no lineales (XIX)

- Densidad espectral de MSK con pulsos de respuesta parcial

- La densidad espectral de MSK puede modelarse mediante la utilización de pulsos de mayor duración temporal y reducir su ancho de banda efectivo
- 2RC, 3RC y 4RC indican pulsos de duración efectiva 2, 3 y $4T_b$ respectivamente.

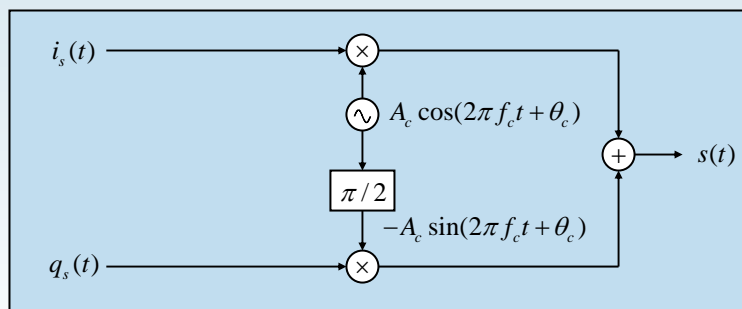


31/10/2006

COM II

4.5 Receptor óptimo y errores de sincronismo

- El transmisor de modulaciones lineales paso-banda seguía la estructura siguiente:



$$i_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I[n]p(t-nT) \quad ; \quad q_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q[n]p(t-nT)$$

$$s(t) = A_c i_s(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) - A_c q_s(t) \sin(2\pi f_c t + \theta_c)$$

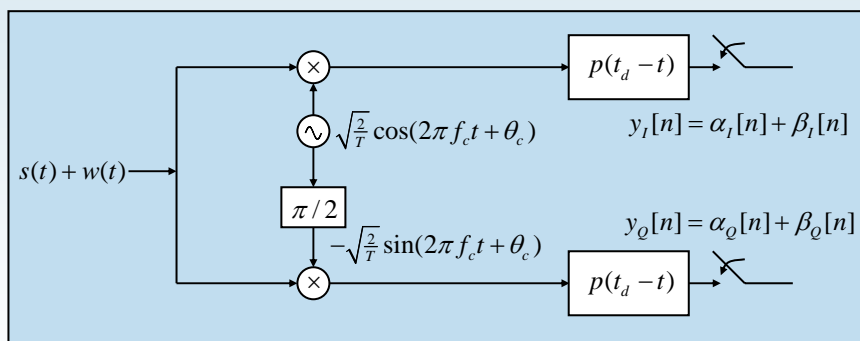
31/10/2006

COM II

T4-50

Receptor óptimo y errores de sincronismo (II)

- Para proporcionar la recepción óptima de la componentes en fase y cuadratura se utilizará un esquema de recepción coherente:



31/10/2006

COM II

T4-51

Receptor óptimo y errores de sincronismo (III)

- El la práctica sin embargo serán inevitables ciertos errores de sincronismo, tanto de la frecuencia portadora como de fase del oscilador local:

$$\text{Referencia: } \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi(f_c + \Delta f_c)t + \theta_c + \Delta \theta_c)$$

- Consideraremos errores de fase exclusivamente. Teniendo en cuenta:

$$\sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t + \theta_c + \Delta \theta_c) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t + \theta_c) \cos(\Delta \theta_c) - \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t + \theta_c) \sin(\Delta \theta_c)$$

$$-\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t + \theta_c + \Delta \theta_c) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t + \theta_c) \cos(\Delta \theta_c) - \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t + \theta_c) \sin(\Delta \theta_c)$$

- De esta forma la señal muestreada a la salida de los filtros adaptados es:

$$y_I[n] = \alpha_I[n] \cos(\Delta \theta_c) + \alpha_Q[n] \sin(\Delta \theta_c) + \beta'_I[n]$$

$$y_Q[n] = \alpha_Q[n] \cos(\Delta \theta_c) - \alpha_I[n] \sin(\Delta \theta_c) + \beta'_Q[n]$$

31/10/2006

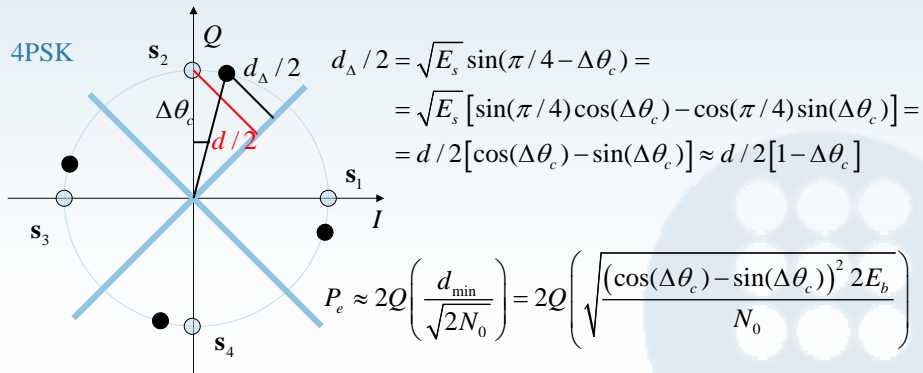
COM II

T4-52

Receptor óptimo y errores de sincronismo (IV)

- Supongamos el error de fase determinista. Esta distorsión equivale a un giro en la constelación de la señal recibida con respecto a la esperada:

$$y_I[n] + jy_Q[n] = (\alpha_I[n] + j\alpha_Q[n])e^{-j\Delta\theta_c} + \beta_I[n] + j\beta_Q[n]$$



31/10/2006

COM II

T4-53

Receptor óptimo y errores de sincronismo (IV)

- En general el error será desconocido (si fuera conocido se podría compensar) por lo que resulta más adecuado considerarlo aleatorio.
 - Lo supondremos aleatorio, gaussiano, de media cero y de valor pequeño:

$$y_I[n] = \alpha_I[n]\cos(\Delta\theta_c) + \alpha_Q[n]\sin(\Delta\theta_c) + \beta'_I[n] \approx \alpha_I[n] + \alpha_Q[n]\Delta\theta_c + \beta_I[n] = \alpha_I[n] + \beta_I^\Delta[n]$$

$$y_Q[n] = \alpha_Q[n]\cos(\Delta\theta_c) - \alpha_I[n]\sin(\Delta\theta_c) + \beta'_Q[n] \approx \alpha_Q[n] + \alpha_I[n]\Delta\theta_c + \beta_Q[n] = \alpha_Q[n] + \beta_Q^\Delta[n]$$

– Donde:

$$\left. \begin{aligned} \beta_I^\Delta[n] &= \alpha_Q[n]\Delta\theta_c + \beta_I[n] \\ \beta_Q^\Delta[n] &= \alpha_I[n]\Delta\theta_c + \beta_Q[n] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}|\beta_I^\Delta[n]|^2 = \frac{E_s}{2}\mathbb{E}|\Delta\theta_c|^2 + \frac{N_0}{2} = \frac{1}{2}(E_s E_{\Delta\theta_c} + N_0) \\ \mathbb{E}|\beta_Q^\Delta[n]|^2 = \frac{E_s}{2}\mathbb{E}|\Delta\theta_c|^2 + \frac{N_0}{2} = \frac{1}{2}(E_s E_{\Delta\theta_c} + N_0) \end{cases}$$

31/10/2006

COM II

T4-54

Receptor óptimo y errores de sincronismo (IV)

- De esta forma el error de sincronismo se traduce en un aumento del ruido efectivo:

$$\beta_I^\Delta[n] \sim N\left(0, \frac{1}{2}(E_s E_{\Delta\theta_c} + N_0)\right)$$
$$\beta_Q^\Delta[n] \sim N\left(0, \frac{1}{2}(E_s E_{\Delta\theta_c} + N_0)\right)$$

- Por ejemplo en QPSK:

$$P_e \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{2E_b E_{\Delta\theta_c} + N_0}}\right)$$