

Tema 5: Modulaciones Avanzadas:
Parte 1
Espectro Ensanchado y CDMA

COMII
ETSETB-UPC

Este documento pretende ser una ayuda para el estudio del tema 5 de la asignatura COMII de la ETSETB (Plan de Ing. en Telecomunicaciones), UPC.

Margarita Cabrera
Javier Rodríguez Fonollosa
Jaume Riba

Profesores de Comunicaciones II
Dept. TSC
ETSETB-UPC
Septiembre, 2009

1	Modulaciones de Espectro Ensanchado	2
1.1	Ejemplo de DSSS-BPSK.....	2
1.2	CDMA: Code Division Multiple Access.....	4
1.3	Espacio de Señal.....	5
1.4	Secuencias Binarias.....	7
1.5	Detector de CDMA.....	9
1.5.1	Estadística del vector de ruido.....	9
1.5.2	Interferencia de Múltiple acceso o MAI.....	11
1.5.3	Detector multiusuario óptimo.....	11
1.6	Ejemplo: Sistema con dos usuarios.....	13
1.6.1	Detector Monousuario	13
1.6.2	Decorrelador de señal + detección monousuario.....	13
1.6.3	Óptimo (Ortogonalización aplicando GS).....	14
1.7	CDMA Detector Multiusuario en comunicaciones Asíncronas	19
1.8	Proposición Gaussiana.....	21

1 Modulaciones de Espectro Ensanchado

Este tipo de modulaciones también se denominan de Espectro esparcido y el caso más habitual es el denominado DSSS (Direct Sequence Spectrum Signal). En este tipo de modulación, la señal modulada consiste en el producto de una modulación convencional de tipo QAM por una señal formada a partir de una secuencia pseudoaleatoria. De este modo, la señal resultante ocupa un ancho de banda mucho mayor que la señal original. En el demodulador debe generarse la misma secuencia pseudoaleatoria que en el modulador para poder detectar los símbolos. De ahí que una interpretación de este tipo de modulación es que la secuencia pseudoaleatoria actúa como una señal portadora.

1.1 Ejemplo de DSSS-BPSK

La Figura 1 muestra un ejemplo utilizando como modulación base una señal BPSK

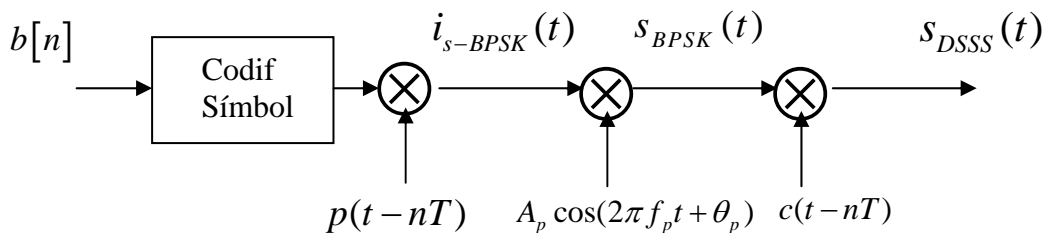


Figura 1. Diagrama de funciones del modulador DSSS

La señal $c(t)$ representa la señal generada a partir del código pseudoaleatorio y se multiplica por cada uno de los símbolos BPSK. Su envolvente es constante e igual a la unidad. Un ejemplo de este tipo de señal se muestra en la Figura 2

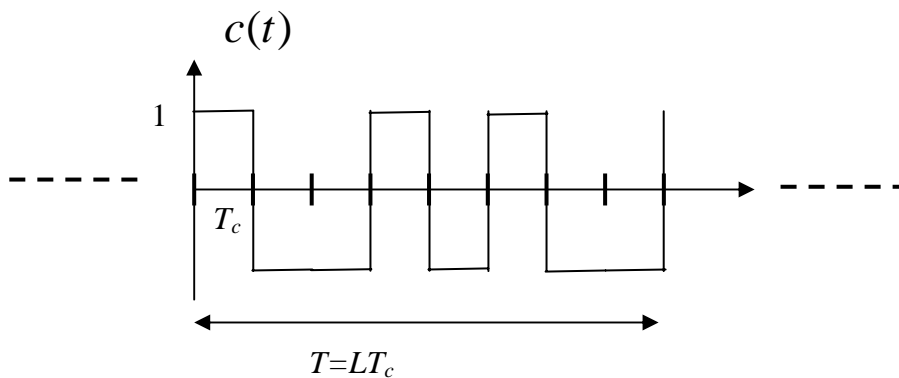


Figura 2. Ejemplo de señal pseudoaleatoria.

El tiempo de un símbolo queda dividido en L_c intervalos o tiempos de chip. El tiempo o periodo de chip T_c resulta:

$$T = L_c T_c \quad \Rightarrow \quad T_c = \frac{T}{L_c}$$

$$c(t) = \sum_{l=0}^{L_c-1} c[l] \Pi\left(\frac{t - \frac{T_c}{2} - lT_c}{T_c}\right) \quad c[l] = \pm 1$$

La secuencia $c[l]$; $l = 0, 1, \dots, L_c - 1$ representa el código binario pseudoaleatorio y a cada uno de sus valores se le denomina chip.

En el dominio de la frecuencia, la convolución con la transformada de Fourier de la señal $c(t)$, repercute en un ensanchamiento o esparcimiento frecuencial del orden de L_c tal como se representa en la Figura 3.

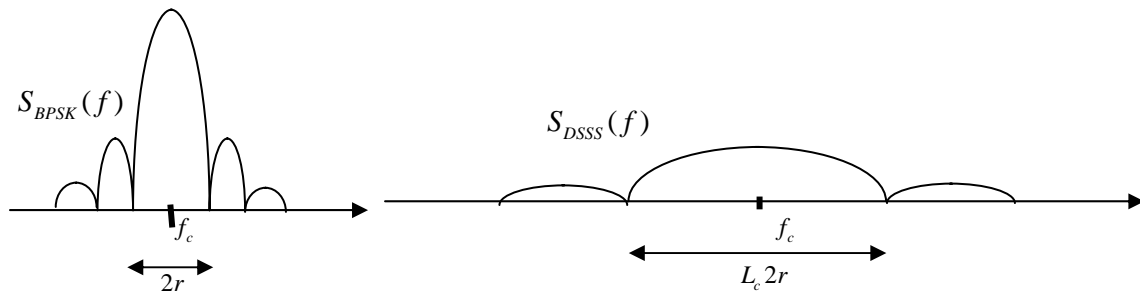


Figura 3. Ensanchamiento del espectro en DSSS-BPSK.

La constante L_c recibe el nombre de factor de esparcimiento o “spreading factor”.

En la Figura 4 se muestra el diagrama de funciones del demodulador.

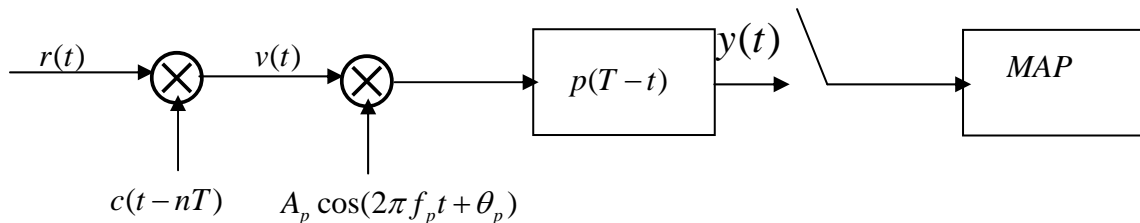


Figura 4. Diagrama de funciones del demodulador DSSS

De la Figura 4, se puede analizar la señal recibida, en la que además de la señal útil y el la señal de ruido se ha considerado la presencia de una interferencia $s_i(t)$.

$$r(t) = s_{DSSS}(t) + n(t) + s_i(t)$$

La primera etapa del demodulador mostrado, consiste en el de-spreading de la señal, utilizando el mismo código $c(t)$ con el que se ha modulado.

$$\begin{aligned} v(t) &= r(t)c(t) = \\ &= c^2(t)s_{BPSK}(t) + n(t)c(t) + s_i(t)c(t) = \\ &= s_{BPSK}(t) + n(t)c(t) + s_i(t)c(t) \end{aligned}$$

Se concluye que la señal útil se demodula correctamente, la señal de ruido, inicialmente blanco, no cambia sus propiedades estadísticas, y la interferencia ha quedado espectralmente ensanchada y por tanto su potencia a través del filtro adaptado quedara dividida por aproximadamente el factor L_c , con lo que afectará en menor grado a la detección de los símbolos de la modulación BPSK.

Se concluye de este ejemplo que mediante DSSS se obtiene un tipo de señal modulada de banda ancha, robusta frente a interferencias de banda estrecha que puedan aparecer o coexistir en el canal de comunicaciones.

1.2 CDMA: Code Division Multiple Access.

Las modulaciones presentadas en los temas anteriores (QAM y CPM), permiten una multiplexación en tiempo o una multiplexación en frecuencia, según se realice un reparto temporal o un reparto frecuencial de los recursos. La técnica de reparto frecuencial se denomina FDMA (Frequency Division Multiple Access). La técnica de multiplexado temporal se denomina TDMA (Time Division Multiple Access) y consiste en enviar los bits o símbolos por tramas. En cada trama se transmite un determinado número de símbolos de cada uno de los diferentes usuarios que comparten la modulación.

Con la modulación DSSS se puede utilizar la técnica de multiplexado CDMA, en la que los diferentes usuarios o señales moduladas que acceden al medio, comparten tiempo y frecuencia y se diferencian entre sí mediante asignación de códigos binarios ortogonales. En la Figura 5, se muestra un esquema sencillo de la ocupación tiempo frecuencia de cada una de las tres técnicas.

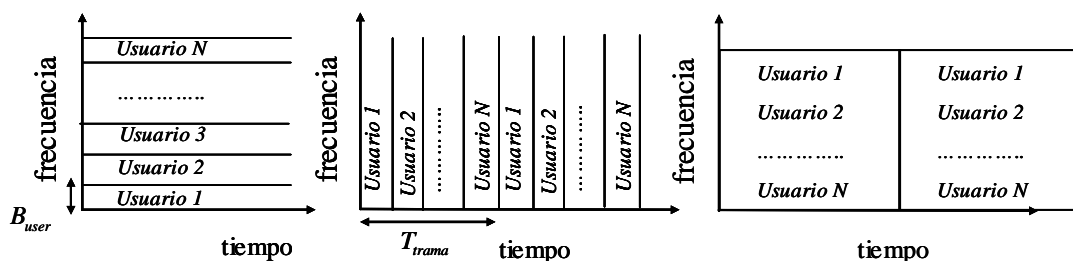


Figura 5. Asignación tiempo – frecuencia en FDMA, TDMA y CDMA.

Los puntos a destacar de este sistema de múltiple acceso (CDMA) son entre otros:

- Diferentes usuarios comparten ancho de banda y tiempo, mediante la ortogonalización entre sí a través de un código binario pseudoaleatorio. Es decir, a cada usuario se le asigna un código pseudoaleatorio, consistente en una secuencia de bits (denominados chips).
- Como resultado su ocupación espectral es mucho mayor que la de una modulación QAM convencional.

- Para la detección de la señal se requiere el conocimiento del código y se puede plantear como detección monousuario o como detección multiusuario.

Así, por ejemplo en un sistema comunicaciones móviles en el que cada usuario acceda a la estación base mediante un código diferente, en principio en el modem de la estación base se requiere el conocimiento de los códigos de todos los usuarios para poder modular y demodular cada una de las correspondientes señales, mientras que en el terminal de cada usuario únicamente se necesita el conocimiento del propio código.

1.3 Espacio de Señal

En este apartado se introduce la nomenclatura vectorial a través de la interpretación desde la perspectiva de espacio de señal, para la situación en que se tengan varios usuarios compartiendo el medio. Dado que se deben ortogonalizar los usuarios, se asignará a cada uno de ellos una función de la base generadora formada a partir del código pseudoaleatorio correspondiente. Para simplificar el análisis se supondrá que la modulación base de cada usuario es BPSK.

La explicación se proporciona de forma pautada.

Se asignan funciones ortogonales entre sí para distintos usuarios.

Factor de “Spreading” o “Número de Chips por símbolo”: $L_c = \frac{T}{T_c}$

Código pseudoaleatorio para el usuario “i”: $c_i[l]$; $l = 0, 1, \dots, L_c - 1$

Donde el código está formado por los chips: $c_i[l] = \pm 1$

Función base para el usuario “i” en paso-banda:
$$\varphi_i(t) = \sum_{l=0}^{L_c-1} c_i[l] \Pi\left(\frac{t - \frac{T_c}{2} - lT_c}{T_c}\right) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_p t)$$

Función base para el usuario “i” en banda base:
$$\varphi_i(t) = \sum_{l=0}^{L_c-1} c_i[l] \Pi\left(\frac{t - \frac{T_c}{2} - lT_c}{T_c}\right) \sqrt{\frac{1}{T}}$$

Definiendo: $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1}{T_c}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T_c}{2}}{T_c}\right)$ para banda base o bien

$\varphi_0(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T_c}{2}}{T_c}\right) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_p t)$; $T_c = NT_p = N \frac{1}{f_p}$ para paso banda:

La función base para el usuario “i” se puede expresar como:

$$\varphi_i(t) = \sum_{l=0}^{L_c-1} c_i[l] \sqrt{\frac{1}{L_c}} \varphi_0(t - lT_c)$$

La ortogonalidad entre funciones correspondientes a distintos usuarios depende de la ortogonalidad entre los códigos digitales. En (1) se muestra la covarianza cruzada entre códigos.

$$\begin{aligned}
C_{ij} &= \int_0^T \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \\
&= \frac{1}{L_c} \sum_{l=0}^{L_c-1} c_i[l] \sum_{p=0}^{L_c-1} c_j[p] \int_0^T \varphi_0(t-lT_c) \varphi_0(t-pT_c) dt = \\
&= \frac{1}{L_c} \sum_{l=0}^{L_c-1} c_i[l] \sum_{p=0}^{L_c-1} c_j[p] \delta[l-p] = \\
&= \frac{1}{L_c} \sum_{l=0}^{L_c-1} c_i[l] c_j[l] = \rho_{ij}
\end{aligned} \tag{1}$$

La correlación cruzada entre dos funciones de la base muestreada a tiempo de chip coincide con la correlación cruzada entre dos palabras código. Para su demostración se calcula inicialmente la correlación cruzada entre dos funciones y posteriormente se muestrea a tiempo de chip.

$$\begin{aligned}
R_{\varphi_i \varphi_j}(\tau) &= \varphi_i(\tau) * \varphi_j(-\tau) = \frac{1}{L_c} \sum_{l=0}^{L_c-1} c_i[l] \sum_{p=0}^{L_c-1} c_j[p] \varphi_0(\tau-lT_c) * \varphi_0(-\tau-pT_c) = \\
&= \frac{1}{L_c} \sum_{l=0}^{L_c-1} c_i[l] \sum_{p=0}^{L_c-1} c_j[p] R_{\varphi_0}(\tau-lT_c+pT_c)
\end{aligned} \tag{2}$$

En el muestreo de la función (2) a tiempo de chip, $t_m = mT_c$ se utiliza la siguiente propiedad:

$$R_{\varphi_0}(mT_c) = \delta[m]$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
R_{\varphi_i \varphi_j}(mT_c) &= \frac{1}{L_c} \sum_{l=0}^{L_c-1} c_i[l] \sum_{p=0}^{L_c-1} c_j[p] R_{\varphi_0}(mT_c-lT_c+pT_c) = \\
&= \frac{1}{L_c} \sum_{l=0}^{L_c-1} c_i[l] \sum_{p=0}^{L_c-1} c_j[p] \delta[m-l+p] = \frac{1}{L_c} \sum_{p=0}^{L_c-1} c_i[p+m] c_j[p] = \frac{1}{L_c} R_{c_i c_j}[m]
\end{aligned} \tag{3}$$

Se concluye las siguientes recomendaciones para las secuencias a utilizar:

En detección asíncrona entre usuarios interesa que en la medida de lo posible los códigos cumplan la siguiente propiedad:

$$R_{\varphi_i \varphi_j}(mT_c) = \frac{1}{L_c} R_{c_i c_j}[m] \cong \delta[m] \delta[i-j] \tag{4}$$

En detección síncrona es suficiente que se cumpla:

$$R_{\varphi_i \varphi_j}(0) = \frac{1}{L_c} R_{c_i c_j}[0] = \rho_{ij} \cong \delta[i-j] \tag{5}$$

1.4 Secuencias Binarias.

Existen diferentes tipos de secuencias binarias que pueden ser utilizadas como códigos para el multiplexado CDMA. En este apartado se presentan dos tipos diferenciados.

El primer tipo se basa en las denominadas funciones de Walsh, que son útiles cuando todos los usuarios o señales se hallan perfectamente sincronizados. El segundo tipo de secuencias son las que se basan en las secuencias pseudoaleatorias que son las que presentan las mejores prestaciones cuando los usuarios pueden no estar sincronizados entre sí. Este tipo de propiedades se deducen a partir de la covarianza cruzada y de la correlación cruzada entre los diferentes códigos.

Funciones de Walsh

Mediante las funciones de Walsh se pueden crear códigos perfectamente ortogonales. La longitud de este tipo de códigos es siempre potencia de 2 ($L_c = 2^{N_u}$). El exponente N_u es el número de potenciales usuarios ortogonales a utilizar. Los códigos se forman asignando valores positivos y negativos a los chips de forma secuencial, tal como se muestra a continuación para un ejemplo sencillo.

Ejemplo para $L_c = 8$, $N_u = 3$

Código del usuario "1": $c_1[l] = \{+1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, -1\}$

Código del usuario "2": $c_2[l] = \{+1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, -1\}$

Código del usuario "3": $c_3[l] = \{+1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1\}$

En general, para obtener N_u palabras código de longitud $L_c = 2^{N_u}$ a partir de la $\frac{N_u}{2}$ palabras código de longitud $\frac{L_c}{2} = 2^{N_u-1}$ se puede utilizar la siguiente fórmula recursiva:

$$c_{2n}(1..L_c) = \left\{ +c_n\left(1..\frac{L_c}{2}\right) + c_n\left(1..\frac{L_c}{2}\right) \right\}$$

$$c_{2n+1}(1..L_c) = \left\{ +c_n\left(1..\frac{L_c}{2}\right) - c_n\left(1..\frac{L_c}{2}\right) \right\}$$

En Figura 6, se muestra la forma temporal de las 3 funciones obtenidas para el ejemplo de longitud $L_c = 8$. En la Figura 7, se muestran las 3 funciones de autocorrelación de cada las tres palabras código generadas y finalmente en la Figura 8 se muestran las funciones de autocorrelación cruzada. En el origen las tres funciones de la Figura 7, se anulan pero para otros valores, a tiempo de chip, se puede llegar a obtener valores de hasta el 25% respecto al máximo de la autocorrelación (igual a la unidad en este ejemplo debido a la normalización).

Estas características de las secuencias de Walsh, provocan que no sean útiles cuando los usuarios pueden llegar no sincronizados y en estas situaciones es más conveniente utilizar otro tipo de secuencias como por ejemplo las denominadas de Gold y las de Kasami, cuyas principales propiedades se comentan a continuación.

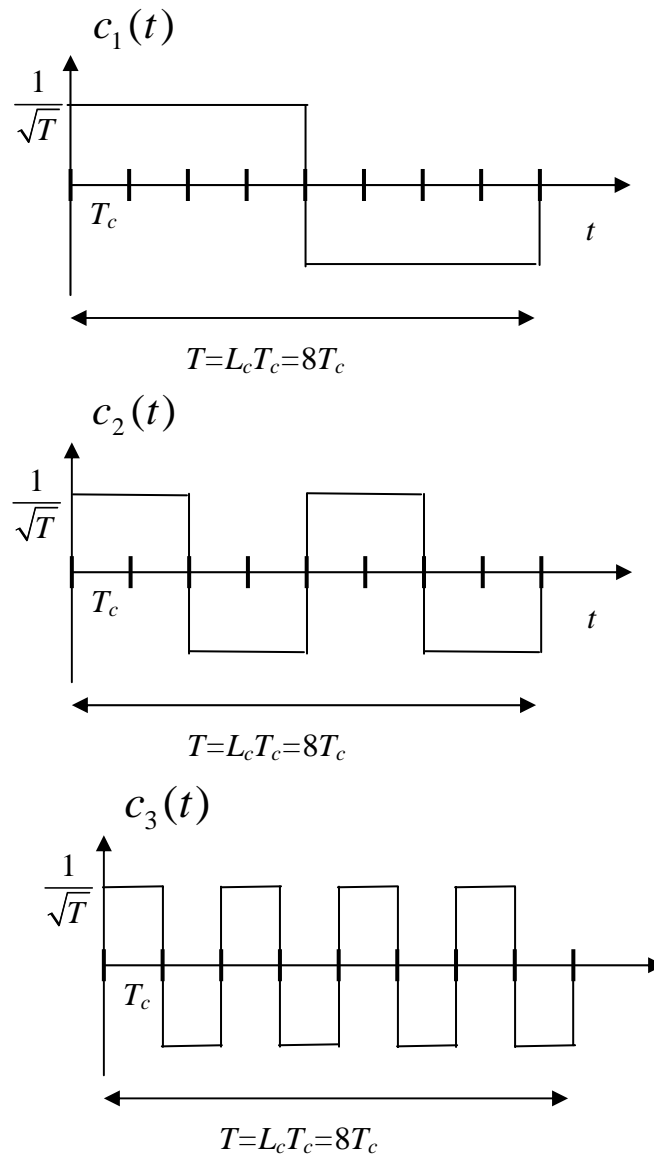


Figura 6. Ejemplo de funciones de Walsh para $L=8$

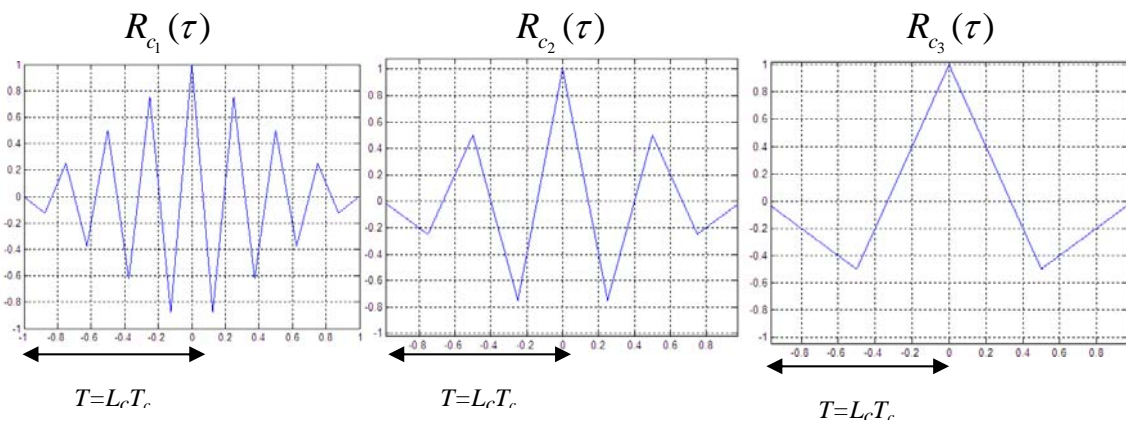


Figura 7. Funciones de autocorrelación de funciones de Walsh para $L_c=8$

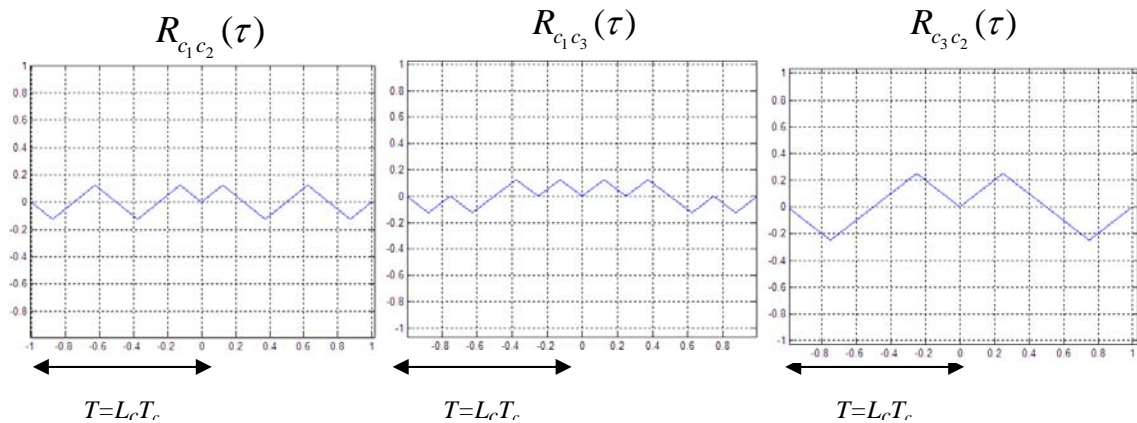


Figura 8. Funciones de correlación cruzada de funciones de Walsh para $L_c=8$

Códigos de Gold y códigos de Kasami.

Mediante los códigos pseudoaleatorios Gold y Kasami, se obtiene una aproximación de la ecuación (4), limitando los valores que deberían ser nulos a aproximadamente un valor del orden de $\frac{1}{L_c}$.

Es decir, con este tipo de códigos no se obtienen señales perfectamente ortogonales, pero se limitan los valores máximos de todas las funciones de autocorrelación cruzadas. Típicamente, en estándares como UMTS o similares, se trabaja con códigos de longitud igual a 128 ó 256, por lo que la reducción es al menos del orden de 0,78% muy inferior al 25% de las secuencias de Walsh

1.5 Detector de CDMA.

1.5.1 Estadística del vector de ruido

En este apartado se analiza la estadística del vector recibido, suponiendo un sistema síncrono de comunicaciones y un receptor en el que se demodulan las señales de todos los usuarios, en total L_u . El hecho de considerar el sistema síncrono se traduce en que la señal recibida se modela como:

$$r(t) = \sum_{l=1}^{L_u} h_l s_l(t) + w(t)$$

a diferencia de la que se debería considerar en un sistema asíncrono:

$$r_{ASINCRONO}(t) = \sum_{l=1}^{L_u} h_l s_l(t - \tau_l) + w(t)$$

En la Figura 9 se muestran los diagramas de bloques funcionales correspondientes a un receptor multiusuario y a un receptor monousuario.

Para demodular las señales de todos los usuarios, se requiere conocer los códigos de todos ellos, con el objeto de implementar los filtros adaptados a todas las funciones de la base. En la detección de la señal de un único usuario, únicamente se requiere el

conocimiento del código correspondiente al usuario en cuestión. Aunque la representación en la Figura 9 es sencilla a partir de los filtros adaptados, en la práctica, la implementación de cada uno de los filtros adaptados se realiza según el esquema de la Figura 10, en la que se muestra un diagrama de bloques detallado del receptor monousuario para el usuario “i”. Resulta por tanto equivalente al filtro adaptado mostrado en el detector monousuario de la Figura 9. De hecho si se representara el detector multiusuario, la parte de hardware sería común y únicamente se requeriría duplicar el esquema a partir del muestreo y a realizar por software. Es decir, para cada usuario se utilizaría el código correspondiente.

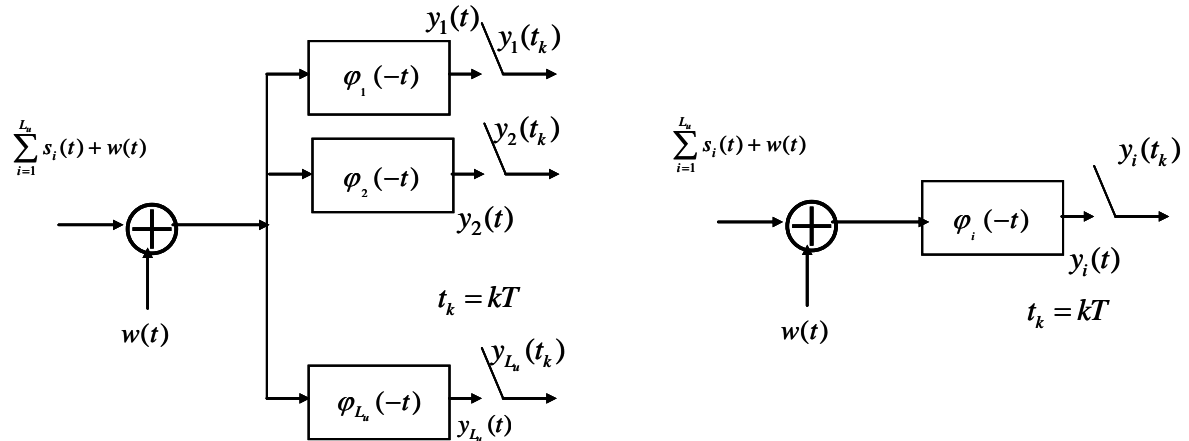


Figura 9. Esquema receptor CDMA multiusuario / monousuario.

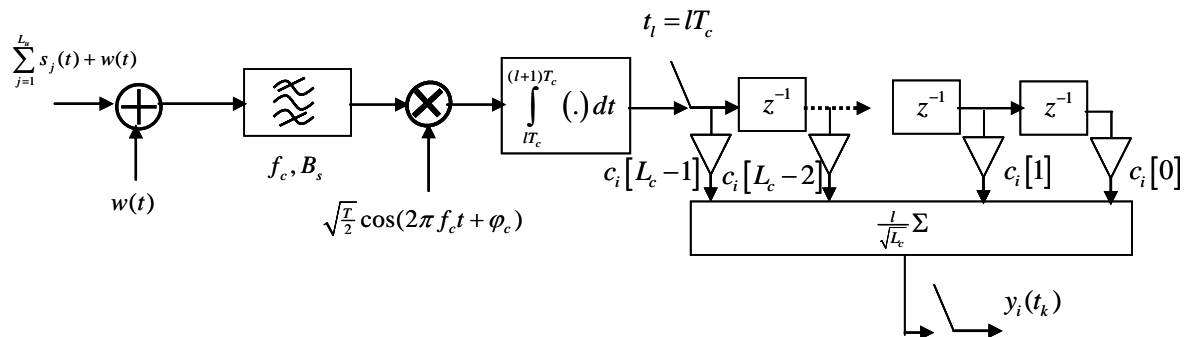


Figura 10. Esquema receptor CDMA monousuario detallado.

Cada una de las coordenadas del vector recibido puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
 y_i(t) &= \sum_{l=1}^{L_u} h_l s_l(t) * \varphi_l(T-t) + \beta_i(t) = \\
 &= \sum_{l=1}^{L_u} h_l \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_l[n] \varphi_l(t-nT) * \varphi_l(T-t) + \beta_i(t) = \\
 &= \sum_{l=1}^{L_u} h_l \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_l[n] R_{\varphi_l \varphi_l}(t-(n+1)T) + \beta_i(t)
 \end{aligned} \tag{6}$$

Suponiendo símbolos BPSK, para simbolizar la energía E_i con que llega cada bit correspondiente al usuario “i” al sistema, se utiliza la siguiente nomenclatura:

$$\alpha_i[k] = \pm 1; h_i = \sqrt{E_i}$$

Muestreando en $t_k = kT + T$:

$$y_i(t_k) = \sum_{l=1}^{L_u} \sqrt{E_l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_l[n] R_{\phi_l \phi_l}((k-n)T) + \beta_i(t_k) \quad (7)$$

Para el caso de funciones limitadas en tiempo a la duración del símbolo T, se puede asegurar que $R_{\phi_l \phi_l}((n)T) = \rho_{il} \delta[n]$ y la ecuación anterior se simplifica a:

$$y_i(t_k) = \sum_{l=1}^{L_u} \sqrt{E_l} \rho_{il} \alpha_l[k] + \beta_i(t_k) \quad (8)$$

Y en notación vectorial:

$$\mathbf{y}(t_k) = \begin{pmatrix} y_1(t_k) \\ y_2(t_k) \\ \vdots \\ y_{L_u}(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \vdots & \rho_{1L_u} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \vdots & \rho_{2L_u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{L_u 1} & \rho_{L_u 2} & \vdots & \rho_{L_u L_u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E_1} \alpha_1[k] \\ \sqrt{E_2} \alpha_2[k] \\ \vdots \\ \sqrt{E_{L_u}} \alpha_{L_u}[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1(t_k) \\ \beta_2(t_k) \\ \vdots \\ \beta_{L_u}(t_k) \end{pmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{s}_m[k] + \mathbf{n}[k] \quad (9)$$

Distribución del vector de ruido y del vector de señal:

$$\mathbf{n}[k] : N\left(0, \frac{N_0}{2} \mathbf{C}\right) \Rightarrow \mathbf{y}[k] : N\left(\mathbf{C} \mathbf{s}_m[k], \frac{N_0}{2} \mathbf{C}\right) \Rightarrow$$

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{L_u} |\mathbf{C}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{C} \mathbf{s}_m)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{C} \mathbf{s}_m)\right)$$

1.5.2 Interferencia de Múltiple acceso o MAI

La señal proyectada sobre un código o equivalentemente sobre una función del espacio de señal y muestreada a tiempo de símbolo, mostrada en (8) se puede desglosar a su vez en tres términos: señal útil, interferencia MAI y muestra de ruido:

$$y_i[k] = y_i(t_k) = \sqrt{E_i} \rho_{ii} \alpha_i[k] + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{L_u} \sqrt{E_l} \rho_{il} \alpha_l[k] + \beta_i(t_k) \quad (10)$$

El segundo término en (10) es MAI y es la interferencia que sobre el usuario "i" provocan el resto de los usuarios.

1.5.3 Detector multiusuario óptimo

El detector óptimo consiste en buscar

$$\min_{\mathbf{s}_m} \left((\mathbf{y} - \mathbf{C} \mathbf{s}_m)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{C} \mathbf{s}_m) \right)$$

lo que equivale a evaluar 2^{N_u} métricas diferentes, computacionalmente inoperativo.

La decorrelación consiste en multiplicar el vector recibido por una matriz: \mathbf{A} , que puede ser utilizada para decorrelar la señal útil o para decorrelar el ruido:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{y}[k]: N(\mathbf{C}\mathbf{s}_m[k], \frac{N_0}{2}\mathbf{C}) \Rightarrow \mathbf{y}[k]: N(\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{s}_m[k], \frac{N_0}{2}\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A})$$

- Si se incorrela la señal útil: $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \Rightarrow \mathbf{y}[k]: N(\mathbf{s}_m[k], \frac{N_0}{2}\mathbf{C}^{-1})$
- Si se incorrela el ruido: $\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{C}^{-1}}$, mediante la denominada descomposición de Choleski, tal que: $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \Rightarrow \mathbf{y}[k]: N(\mathbf{A}^T\mathbf{s}_m[k], \frac{N_0}{2}\mathbf{I})$

Como alternativa al detector óptimo, en la práctica se suelen aplicar técnicas subóptimas que permitan detectar la secuencia de cada uno de los usuarios de forma independiente. La estrategia más habitual consiste en decorrelar la señal útil y detectar cada usuario por separado.

Si se utiliza la estrategia de incorrelación del ruido, es equivalente a un cambio de base de funciones generadoras. Originariamente se tiene la base de funciones $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_{L_u}(t)\}$ no ortogonales y se obtiene una nueva base $\{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{L_u}(t)\}$ de funciones ortogonales. Los vectores de señal respecto a la nueva base se pueden expresar como:

$$\mathbf{s}_m'[k] = \mathbf{A}^T\mathbf{s}_m[k] = \sqrt{\mathbf{C}^{-1}}\mathbf{s}_m[k]$$

En la Figura 11 se muestran dos estructuras equivalentes para la implementación de esta estrategia. De hecho, dado que la base generadora de señal ortonormal no es única, una alternativa distinta para incorrelar el ruido consiste en la aplicación de Gram-Schmidt y así hallar un nuevo conjunto de funciones $\{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{L_u}(t)\}$.

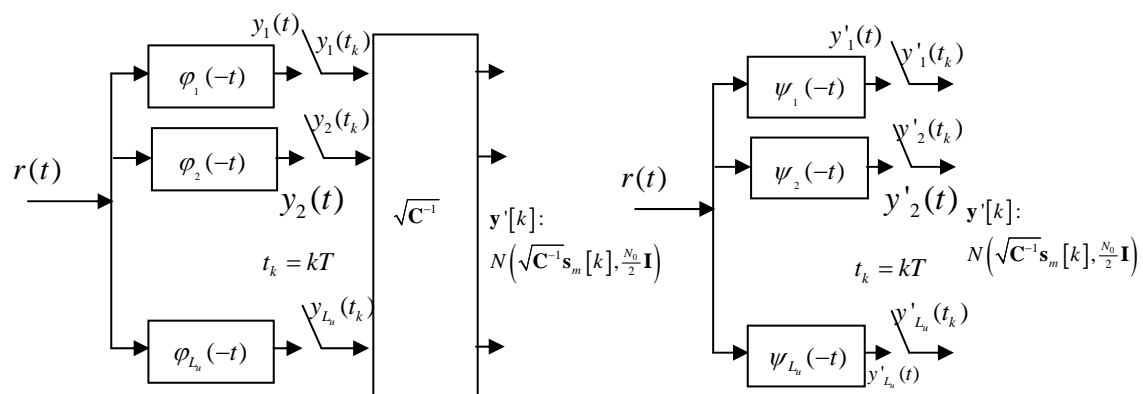


Figura 11. Esquema detector multiusuario decorrelador de ruido, estructuras equivalentes.

1.6 Ejemplo: Sistema con dos usuarios.

Se elige en este apartado un caso sencillo para comparar las diferentes estrategias de detección comentadas en el apartado anterior.

Sea un sistema de dos usuarios ($L_u = 2$), cuya matriz de correlaciones entre funciones código es $\mathbf{R}_s = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$. El vector de señal recibido es:

$$\mathbf{y}(t_k) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E_1}\alpha_1 \\ \sqrt{E_2}\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_1}\alpha_1 + \rho\sqrt{E_2}\alpha_2 + \beta_1 \\ \rho\sqrt{E_1}\alpha_1 + \sqrt{E_2}\alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix}$$

1.6.1 Detector Monousuario

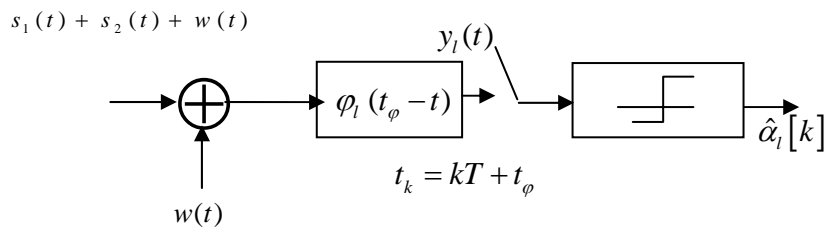


Figura 12. Esquema detector monousuario

Para el usuario 1, se recibe: $y_1[k] = y_1 = \sqrt{E_1}\alpha_1 + \rho\sqrt{E_2}\alpha_2 + \beta_1$

Por tanto: $BER_1 \approx \frac{1}{2} \max \left(Q \left(\frac{\sqrt{E_1} - \rho\sqrt{E_2}}{\sigma} \right), Q \left(\frac{\sqrt{E_1} + \rho\sqrt{E_2}}{\sigma} \right) \right) = \frac{1}{2} Q \left(\sqrt{\left(1 - |\rho| \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right)^2 \frac{E_1}{N_0}} \right)$

Para el usuario 2, se recibe: $y_2[k] = y_2 = \rho\sqrt{E_1}\alpha_1 + \sqrt{E_2}\alpha_2 + \beta_2$

Por tanto: $BER_2 \approx \frac{1}{2} \max \left(Q \left(\frac{\sqrt{E_2} - \rho\sqrt{E_1}}{\sigma} \right), Q \left(\frac{\sqrt{E_2} + \rho\sqrt{E_1}}{\sigma} \right) \right) = \frac{1}{2} Q \left(\sqrt{\left(1 - |\rho| \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \right)^2 \frac{E_2}{N_0}} \right)$

1.6.2 Decorrelador de señal + detección monousuario

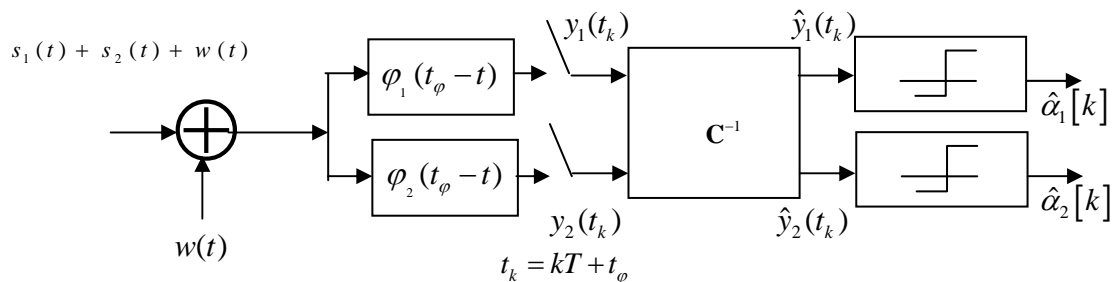


Figura 13. Esquema decorrelador de señal + detector monousuario

El vector de señal utilizado en la detección es:

$$\hat{\mathbf{y}}(t_k) = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_1}\alpha_1 \\ \sqrt{E_2}\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} : N \left(\begin{pmatrix} \sqrt{E_1}\alpha_1 \\ \sqrt{E_2}\alpha_2 \end{pmatrix}, \frac{N_0}{2} \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Cada uno de los dos usuarios se detecta independientemente al resto de usuarios. Así la detección resulta subóptima, tanto más a medida que se tengan usuarios más correlados entre sí.

Para el usuario 1, se detecta: $\hat{y}_1[k] = \hat{y}_1 = \sqrt{E_1}\alpha_1 + \hat{\beta}_1$

Por tanto: $BER_1 = Q\left(\frac{\sqrt{E_1}}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{(1-\rho^2)}2\frac{E_1}{N_0}\right)$

Para el usuario 2, se detecta: $\hat{y}_2[k] = \hat{y}_2 = \sqrt{E_2}\alpha_2 + \hat{\beta}_2$

Por tanto: $BER_2 = Q\left(\frac{\sqrt{E_2}}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{(1-\rho^2)}2\frac{E_2}{N_0}\right)$

1.6.3 Óptimo (Ortogonalización aplicando GS)

Finalmente se plantea para este ejemplo el cálculo de la BER utilizando un esquema de detección óptimo (En general no utilizado en la práctica debido al elevado número de usuarios que suelen compartir un sistema de múltiple acceso):

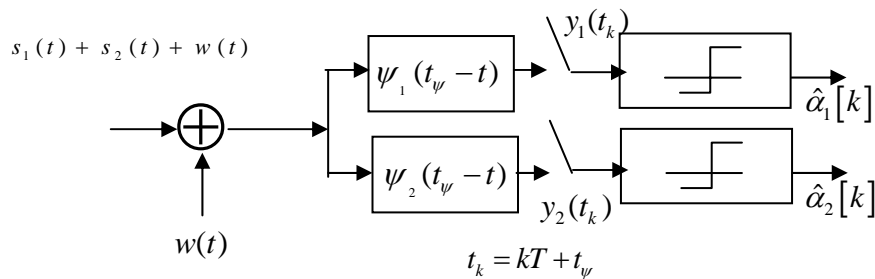


Figura 14. Esquema detector óptimo multiusuario

Las funciones orthogonalizadas por Gramm-Schmidt son:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \varphi_1(t) \\ \psi_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\varphi_2(t) - \rho\varphi_1(t)) \end{aligned}$$

Para la nueva base de funciones el vector recibido es:

$$\mathbf{y}(t_k) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_1}\alpha_1 + \rho\sqrt{E_2}\alpha_2 \\ \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{E_2}\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} : N \left(\begin{pmatrix} \sqrt{E_1}\alpha_1 + \rho\sqrt{E_2}\alpha_2 \\ \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{E_2}\alpha_2 \end{pmatrix}, \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

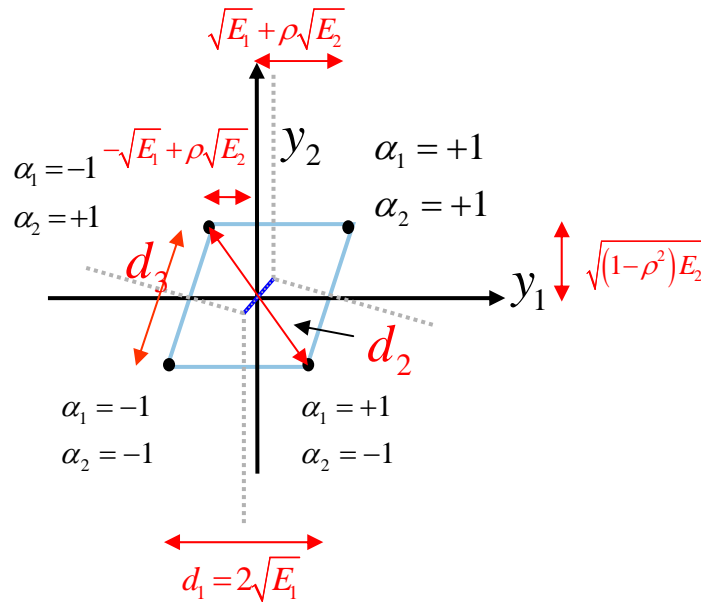


Figura 15. Constelación de señal $\rho > 0$.

Con $\rho > 0$ se obtiene una situación como la de la Figura 15.

Probabilidad de error para el usuario 1: $BER_1 \approx \max\left(Q\left(\frac{d_1}{2\sigma}\right); Q\left(\frac{d_2}{2\sigma}\right)\right)$

Probabilidad de error para el usuario 2: $BER_2 \approx \max\left(Q\left(\frac{d_3}{2\sigma}\right); Q\left(\frac{d_2}{2\sigma}\right)\right)$

Para $\rho > 0$ la distancia d_2 tal como puede verse en la Figura 15 es la diagonal menor del romboide.

$$d_1 = 2\sqrt{E_1}$$

$$\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{E_1} - \rho\sqrt{E_2}\right)^2 + (1-\rho^2)E_2 = E_1 - 2\rho\sqrt{E_1E_2} + E_2$$

$$\left(\frac{d_3}{2}\right)^2 = \rho^2E_2 + (1-\rho^2)E_2 = E_2 \Rightarrow d_3 = 2\sqrt{E_2}$$

Probabilidad de error para el usuario 1: $BER_1 \approx \max\left(Q\left(\sqrt{2\frac{E_1}{N_0}}\right); Q\left(\frac{d_2}{2\sigma}\right)\right)$

Probabilidad de error para el usuario 2: $BER_2 \approx \max\left(Q\left(\sqrt{2\frac{E_2}{N_0}}\right); Q\left(\frac{d_2}{2\sigma}\right)\right)$

A continuación se consideran como datos de partida las dos energías E_1, E_2 , correspondientes a los dos usuarios y se evalúan diferentes situaciones respecto a la correlación cruzada ρ

Con $\rho = 0$ Figura 16, se obtiene: $\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = E_1 + E_2$

$$\mathbf{y}(t_k) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_1}\alpha_1 \\ \sqrt{E_2}\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Probabilidad de error para el usuario 1: $BER_1 \approx \max\left(Q\left(\sqrt{2\frac{E_1}{N_0}}\right); Q\left(\sqrt{2\frac{(E_1+E_2)}{N_0}}\right)\right)$

Probabilidad de error para el usuario 2: $BER_2 \approx \max\left(Q\left(\sqrt{2\frac{E_2}{N_0}}\right); Q\left(\sqrt{2\frac{(E_1+E_2)}{N_0}}\right)\right)$

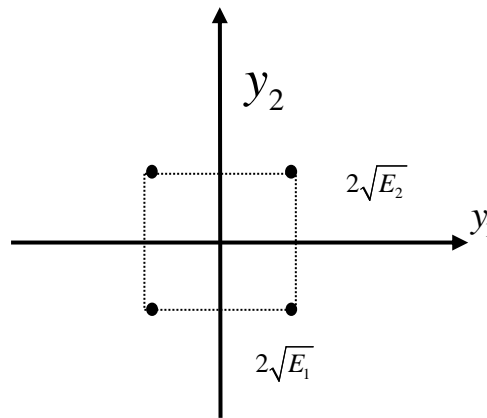


Figura 16. Constelación de señal $\rho = 0$

Con $\rho = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}$ Figura 17, se cumple $\sqrt{E_1} = \rho\sqrt{E_2} \Rightarrow E_1 = \rho^2 E_2$, $\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = (1-\rho^2)E_2$. Con esta asignación del coeficiente de correlación se ha asumido implícitamente que $E_1 < E_2$.

$$\mathbf{y}(t_k) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_1}(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \sqrt{E_2 - E_1}\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Probabilidad de error para el usuario 1:

$$BER_1 \approx \max\left(Q\left(\sqrt{2\frac{E_1}{N_0}}\right); Q\left(\sqrt{\frac{1-\rho^2}{\rho^2} 2\frac{E_1}{N_0}}\right)\right) \approx \max\left(Q\left(\sqrt{2\frac{E_1}{N_0}}\right); Q\left(\sqrt{\frac{E_2-E_1}{E_1} 2\frac{E_1}{N_0}}\right)\right) \approx \max\left(Q\left(\sqrt{2\frac{E_1}{N_0}}\right); Q\left(\sqrt{2\frac{E_2-E_1}{N_0}}\right)\right)$$

Probabilidad de error para el usuario 2:

$$BER_2 \approx \max\left(Q\left(\sqrt{2\frac{E_2}{N_0}}\right); Q\left(\sqrt{(1-\rho^2)2\frac{E_2}{N_0}}\right)\right) =$$

$$\max\left(Q\left(\sqrt{2\frac{E_2}{N_0}}\right); Q\left(\sqrt{\left(1-\frac{E_1}{E_2}\right)2\frac{E_2}{N_0}}\right)\right) = \max\left(Q\left(\sqrt{2\frac{E_2}{N_0}}\right); Q\left(\sqrt{2\frac{E_2-E_1}{N_0}}\right)\right)$$

(Para el usuario 2, el caso peor coincide con el resultado obtenido con el decorrelador + detector monousuario)

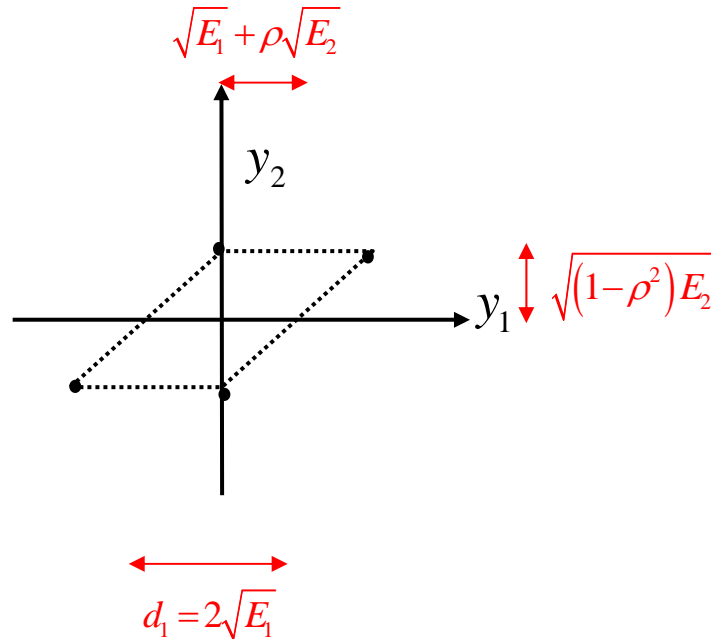


Figura 17. Constelación de señal $\sqrt{E_1} = \rho\sqrt{E_2} \Rightarrow E_1 = \rho^2 E_2$

Con $\rho=1$ Figura 18, se obtiene, $\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = (\sqrt{E_1} - \sqrt{E_2})^2$

$$\mathbf{y}(t_k) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_1}\alpha_1 + \sqrt{E_2}\alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

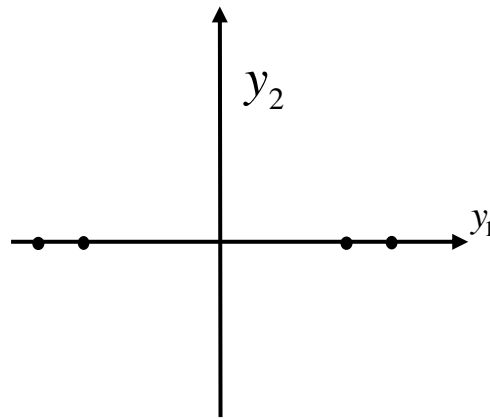


Figura 18. Constelación de señal $\rho = 1$

Probabilidad de error para el usuario 1: $BER_1 \approx \max \left(Q \left(\sqrt{2 \frac{E_1}{N_0}} \right); Q \left(\sqrt{2 \frac{(\sqrt{E_2} - \sqrt{E_1})^2}{N_0}} \right) \right)$

Probabilidad de error para el usuario 2: $BER_2 \approx \max \left(Q \left(\sqrt{2 \frac{E_2}{N_0}} \right); Q \left(\sqrt{2 \frac{(\sqrt{E_2} - \sqrt{E_1})^2}{N_0}} \right) \right)$

1.7 CDMA Detector Multiusuario en comunicaciones Asíncronas

Señal Recibida:

$$r(t) = \sum_{i=1}^{L_u} h_i s_i(t - \tau_i) + w(t) \quad (11)$$

Cada usuario llega al receptor con diferentes atenuación y retardo: (h_i, τ_i) , $i = 1..L_u$. Estos parámetros se suponen conocidos en recepción.

Al utilizar el la nomenclatura de espacio de señal, (11) queda:

$$r(t) = \sum_{i=1}^{L_u} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{E_i} \alpha_i[n] \varphi_i(t - nT)$$

El frontal para la señal recibida consiste en un banco de L_u correladores. La respuesta impulsional correspondiente al correlador o filtro adaptado (FA) “ l ” es:

$$\varphi_l(2T + \tau_l - t)$$

En este diseño se supone que los retardos se hallan ordenados de menor a mayor:

$$\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{L_u} \leq T$$

La señal de salida del FA “ l ” es:

$$\begin{aligned} y_l(t) &= r(t) * \varphi_l(2T - \tau_l - t) = \sum_{i=1}^{L_u} h_i s_i(t - \tau_i) * \varphi_l(2T - \tau_l - t) + \beta_l(t) = \\ &= \sum_{i=1}^{L_u} \sqrt{E_i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_i[n] \varphi_i(t - nT - \tau_i) * \varphi_l(2T - \tau_l - t) + \beta_l(t) = \\ &= \sum_{i=1}^{L_u} \sqrt{E_i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_i[n] R_{\varphi_i \varphi_l}(t - (n+2)T + \tau_l - \tau_i) + \beta_l(t) \end{aligned}$$

El tiempo de muestreo en general es el mismo para todos los usuarios: $t_k = (k+2)T$

La señal muestreada a la salida del FA “ l ” resulta:

$$\begin{aligned}
y_l(t_k) &= \sum_{i=1}^{L_u} \sqrt{E_i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_i[n] R_{\varphi_i \varphi_i}(t_k - (n+2)T + \tau_l - \tau_i) + \beta_l(t_k) = \\
&\sum_{i=1}^{L_u} \sqrt{E_i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_i[n] R_{\varphi_i \varphi_i}((k-n)T + \tau_l - \tau_i) + \beta_l[k] = \\
&\sum_{i=1}^{L_u} \sqrt{E_i} (\alpha_i[k-1] R_{\varphi_i \varphi_i}(T + \tau_l - \tau_i) + \alpha_i[k] R_{\varphi_i \varphi_i}(\tau_l - \tau_i) \\
&+ \alpha_i[k+1] + R_{\varphi_i \varphi_i}(-T + \tau_l - \tau_i) + \beta_l[k]
\end{aligned} \tag{12}$$

En la expresión anterior se aplica que las duraciones de las funciones de autocorrelación cruzada se hallan limitadas en tiempo:

$$R_{\varphi_i \varphi_i}(t) = 0; \quad |t| > T$$

Debido a ello:

$$\begin{aligned}
\tau_l < \tau_i &\Rightarrow R_{\varphi_i \varphi_i}(-T + \tau_l - \tau_i) = 0 \\
\tau_l > \tau_i &\Rightarrow R_{\varphi_i \varphi_i}(T + \tau_l - \tau_i) = 0
\end{aligned}$$

Llamando $r_{il}[k] = R_{\varphi_i \varphi_i}(kT + \tau_l - \tau_i)$ y considerando la anterior propiedad, se expresa el vector total de salida como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{y}[k] &= \begin{pmatrix} y_1[k] \\ y_2[k] \\ \vdots \\ y_{L_u}[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r_{21}[1] & r_{31}[1] & : r_{L_u,1}[1] \\ 0 & 0 & r_{32}[1] & : r_{L_u,2}[1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & : 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E_1} \alpha_1[k-1] \\ \sqrt{E_2} \alpha_2[k-1] \\ \vdots \\ \sqrt{E_{L_u}} \alpha_{L_u}[k-1] \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} r_{11}[0] & r_{21}[0] & r_{31}[0] & : r_{L_u,1}[0] \\ r_{12}[0] & r_{22}[0] & r_{32}[0] & : r_{L_u,2}[0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{1L_u}[0] & r_{2L_u}[0] & r_{3L_u}[0] & : r_{L_u,L_u}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E_1} \alpha_1[k] \\ \sqrt{E_2} \alpha_2[k] \\ \vdots \\ \sqrt{E_{L_u}} \alpha_{L_u}[k] \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & : 0 \\ r_{12}[-1] & 0 & 0 & : 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{1L_u}[-1] & r_{2L_u}[-1] & r_{3L_u}[-1] & : 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E_1} \alpha_1[k+1] \\ \sqrt{E_2} \alpha_2[k+1] \\ \vdots \\ \sqrt{E_{L_u}} \alpha_{L_u}[k+1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1[k] \\ \beta_2[k] \\ \vdots \\ \beta_{L_u}[k] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

El vector anterior se expresa como:

$$\mathbf{y}[k] = (\mathbf{R}[1] \quad \mathbf{R}[0] \quad \mathbf{R}[-1]) \begin{pmatrix} \mathbf{s}_m[k-1] \\ \mathbf{s}_m[k] \\ \mathbf{s}_m[k+1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{n}[k-1] \\ \mathbf{n}[k] \\ \mathbf{n}[k+1] \end{pmatrix}$$

Para una secuencia de N símbolos consecutivos: $\mathbf{y}[1], \mathbf{y}[2], \dots, \mathbf{y}[L_u]$, el vector completo a procesar es:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}[1] \\ \mathbf{y}[2] \\ \vdots \\ \mathbf{y}[N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}[0] & \mathbf{R}[-1] & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}[+1] & \mathbf{R}[0] & \mathbf{R}[-1] & \vdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{R}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_m[1] \\ \mathbf{s}_m[2] \\ \vdots \\ \mathbf{s}_m[N] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{n}[1] \\ \mathbf{n}[2] \\ \vdots \\ \mathbf{n}[N] \end{pmatrix}$$

Observe que la matriz $\mathbf{R}[+1]$ es triangular superior y que la matriz $\mathbf{R}[-1]$ es triangular inferior.

Dado que la distribución para el vector de ruido es:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n}[1] \\ \mathbf{n}[2] \\ \vdots \\ \mathbf{n}[N] \end{pmatrix} : N \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}; \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{R}[0] & \mathbf{R}[-1] & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}[+1] & \mathbf{R}[0] & \mathbf{R}[-1] & \vdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{R}[0] \end{pmatrix} \right)$$

Compactando aún más las dos ecuaciones anteriores:

$$\mathbf{y}_T = \mathbf{R}_T \mathbf{s}_T + \mathbf{n}_T \quad \mathbf{n}_T : N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_T)$$

La métrica a minimizar aplicando el criterio MAP es:

$$\min_{\mathbf{s}_T} \left\{ (\mathbf{y}_T - \mathbf{R}_T \mathbf{s}_T)^T \mathbf{R}_T^{-1} (\mathbf{y}_T - \mathbf{R}_T \mathbf{s}_T) \right\}$$

Buscar el mínimo para la métrica anterior, corresponde a evaluarla para 2^{NL_u} , lo que resulta totalmente no operativo en cuanto a eficiencia computacional.

En la práctica se recurre a soluciones sub-óptimas, como algoritmo de Viterbi, detector decorrelador, etc....

1.8 Proposición Gaussiana

En un sistema real basado en acceso múltiple por división de código (CDMA), el análisis detallado de la probabilidad de error, tal como se presenta en el ejemplo del apartado 1.6, es prácticamente imposible, por lo que simplifica el análisis modelando la MAI, como una variable aleatoria gaussiana. Este modelo es bastante realista cuando el número de usuarios es muy elevado.

Por tanto, tanto en situaciones síncronas (ecuación (10)) como en situaciones asíncronas (ecuación (12)) la señal a la salida del filtro adaptado al código “i” y muestreada a tiempo de símbolo, se modela como:

$$y_i[k] = y_i(t_k) = \sqrt{E_i} \alpha_i[k] + m[k] + \beta_l[k] \quad (13)$$

Donde la interferencia MAI es una variable aleatoria y gaussiana y estadísticamente independiente a la variable aleatoria de ruido:

$$m[k] = N(0, \sigma_{MAI}^2)$$

Suponiendo una modulación BPSK ($\alpha_i[k] = \pm 1$) y la potencia de ruido: $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ la BER del sistema es:

$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{E_i}{\sigma_{MAI}^2 + \frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1}{\frac{2\sigma_{MAI}^2}{N_0} + 1}} \frac{2E_i}{N_0}\right)$$

En definitiva la degradación provocada por la MAI sobre la BER medida en dB de pérdida de la energía media transmitida por bit es igual a:

$$10 \log_{10} \left(\frac{2\sigma_{MAI}^2}{N_0} + 1 \right)$$