

Tema 5: Modulaciones Avanzadas:
Parte 2
OFDM

COMII
ETSETB-UPC

Este documento pretende ser una ayuda para el estudio del tema 5 de la asignatura COMII de la ETSETB (Plan de Ing. en Telecomunicaciones), UPC.

Margarita Cabrera

Profesora de Comunicaciones II
Dept. TSC
ETSETB-UPC
Septiembre, 2009

1	OFDM: Orthogonal Frequency Division Multiplexing.....	2
1.1	Equivalente paso bajo de la modulación y espacio de señal.	3
1.1.1	Base generadora del espacio de señal de la señal modulada.	3
1.2	Prefijo cíclico y tiempo de guarda.....	5
1.3	Esquema modulador basado en el algoritmo IFFT.....	6
1.4	Análisis de la BER sin Tiempo de Guarda ni Prefijo Cíclico	8
1.4.1	Análisis de la recepción a partir del equivalente paso bajo.....	8
1.4.1.1	Cálculo de la energía media transmitida por bit.	10
1.4.1.2	Cálculo de la potencia de ruido.	10
1.4.1.3	Análisis de la probabilidad de error.....	12
1.5	Análisis de la BER con Prefijo Cíclico	13
1.5.1	Análisis de la recepción a partir del equivalente paso bajo.....	13
1.5.2	Cálculo de la energía media transmitida por bit.....	15
1.5.3	Cálculo de la potencia de ruido.	16
1.5.4	Análisis de la probabilidad de error.....	17
1.6	Un caso práctico: El sistema DAB	18

1 OFDM: Orthogonal Frequency Division Multiplexing

La idea básica de OFDM consiste en dividir el espectro en varios sub-canales o sub-portadoras (N). Se dispone de una secuencia de símbolos compleja a transmitir $\alpha[n] = \alpha_{\text{Re}}[n] + j\alpha_{\text{Im}}[n]$, previamente codificada mediante una constelación de tipo QAM. La secuencia se subdivide a su vez en tramas de N símbolos, de tal modo que cada símbolo de una trama se transmite por una sub-portadora distinta.

El principal objetivo de este tipo de procesamiento previo a la transmisión, consiste en combatir de forma eficiente los efectos de canales selectivos en frecuencias ($H_c(f)$ no ideal), siempre y cuando se cumplan determinadas condiciones en cuanto a la duración de la respuesta impulsional del canal.

Para ilustrar de modo intuitivo este tipo de ventajas, se presenta en la Figura 1, el efecto que produce un canal de respuesta impulsional $h_c(t)$ sobre una señal QAM y sobre una señal OFDM, con la misma velocidad de bit.

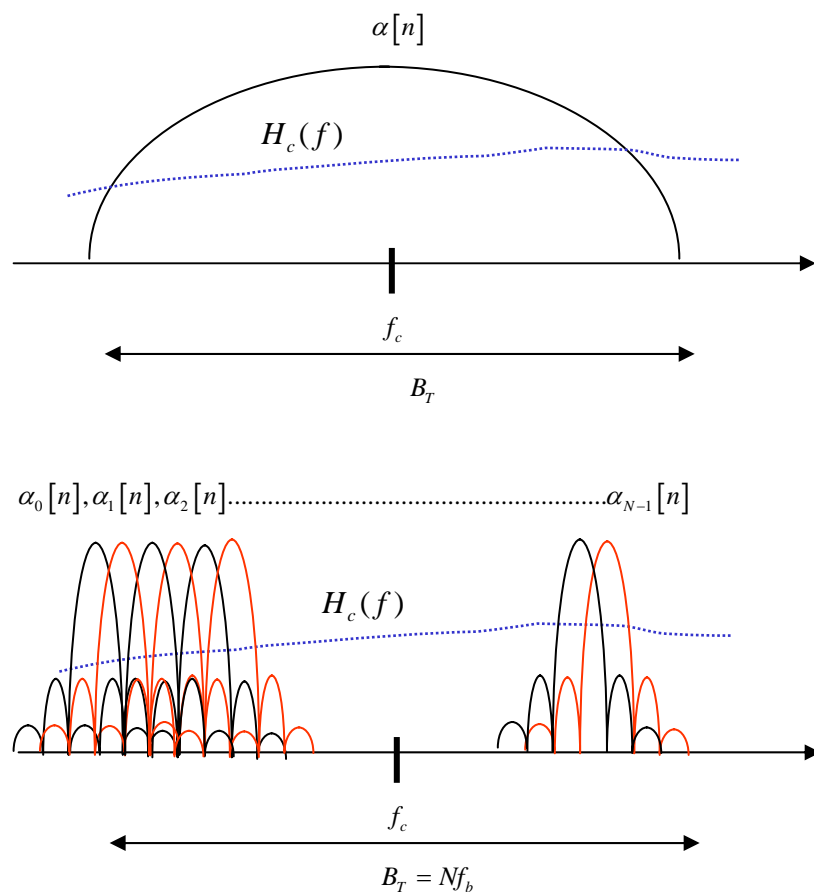


Figura 1. Espectro de señal QAM y de señal OFDM (Se considera que ambas modulaciones soportan la misma velocidad de bit). f_b representa el ancho entre portadoras.

Dado que cada N símbolos QAM forman una trama o símbolo OFDM, la velocidad de los símbolos OFDM es al menos N veces menor que la de los símbolos QAM. La relación entre las correspondientes velocidades, según lo anterior, se expresa como:

$$\begin{aligned} r_{OFDM} &= \frac{r_{QAM}}{N} = f_b \\ T_{OFDM} &= T = NT_{QAM} \end{aligned} \quad (1)$$

1.1 Equivalente paso bajo de la modulación y espacio de señal.

Al tratar con modulaciones OFDM, el análisis de las señales se suele hacer directamente sobre la señal equivalente paso bajo. Dado que en general es una función compleja, en términos de espacio de señal, se tienen diferentes conceptos que se deben generalizar.

El equivalente paso bajo de la señal temporal se forma eligiendo N funciones temporales, correspondientes a N frecuencias ortogonales.

$$\begin{aligned} b_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{s_m}[n](t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k[n] \phi_k(t-nT) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k[n] \exp(j2\pi f_k(t-nT)) \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Con

$$\begin{aligned} f_k &= \left(k-1 - \frac{N}{2}\right) f_b; \quad k=1, \dots, N \\ \alpha_k[n] &= \alpha_{\text{Re},k}[n] + j\alpha_{\text{Im},k}[n] \end{aligned} \quad (3)$$

Las funciones base complejas generadoras del espacio de señal para el equivalente paso bajo de la señal transmitida son:

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp(j2\pi f_k t) \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \quad \text{con} \quad \frac{B_T}{N} = f_b = \frac{1}{T} \quad (4)$$

Y forman una base ortonormal compleja:

$$\int \phi_k(t) \phi_n^*(t) dt = \int_0^T \frac{1}{T} e^{j2\pi(f_k - f_n)t} dt = \delta[k-n] \quad (5)$$

Ya que dada la relación (3), $f_k - f_n$ es múltiplo entero de $f_b = \frac{1}{T}$

1.1.1 Base generadora del espacio de señal de la señal modulada.

Si el espacio de señal de la modulación OFDM se estudia mediante una base generadora ortonormal y real se ha de considerar que la señal paso-banda transmitida resulta:

$$\begin{aligned}
s(t) &= \operatorname{Re}\left(A_c b_s(t) \exp(j2\pi f_c t)\right) = \\
&\operatorname{Re}\left(A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k [n] \phi_k(t-nT) \exp(j2\pi f_c t)\right) = \\
&\operatorname{Re}\left(A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k [n] p(t-nT) \exp(j2\pi(f_c + f_k)t)\right)
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
s(t) &= A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N \alpha_{\operatorname{Re},k} [n] \cos(2\pi(f_c + f_k)t) p(t-nT) - \alpha_{\operatorname{Im},k} [n] \operatorname{sen}(2\pi(f_c + f_k)t) p(t-nT) \\
p(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)
\end{aligned}$$

Una base generadora real del espacio de señal de (6), es de dimensión $L = 2N$ y las correspondientes funciones ortonormales son:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\operatorname{Re},k}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi(f_c + f_k)t) \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \\
\varphi_{\operatorname{Im},k}(t) &= -\sqrt{\frac{2}{T}} \operatorname{sen}(2\pi(f_c + f_k)t) \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \\
k &= 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{7}$$

Utilizando la base (7), la coordenada de la señal útil respecto a la función $\varphi_{\operatorname{Re},k}(t)$ es $\frac{A_c}{\sqrt{2}} \alpha_{\operatorname{Re},k}$ y respecto a la función $\varphi_{\operatorname{Im},k}(t)$ es $\frac{A_c}{\sqrt{2}} \alpha_{\operatorname{Im},k}$.

Nota: Observe que en las asignaciones anteriores, las componentes fase y cuadratura de la señal transmitida $s(t)$, respecto a la frecuencia portadora central f_c , llevan mezcladas las partes real e imaginaria del símbolo complejo:

$$\begin{aligned}
i_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N \alpha_{\operatorname{Re},k} [n] \cos(2\pi f_k t) p(t-nT) - \alpha_{\operatorname{Im},k} [n] \operatorname{sen}(2\pi f_k t) p(t-nT) \\
q_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N \alpha_{\operatorname{Re},k} [n] \operatorname{sen}(2\pi f_k t) p(t-nT) + \alpha_{\operatorname{Im},k} [n] \cos(2\pi f_k t) p(t-nT)
\end{aligned}$$

La Figura 2 muestra la obtención de la componente en fase, como suma de las correspondientes funciones coseno a las diferentes frecuencias $f_k = (k-1-\frac{N}{2})f_b$; $k = 1, \dots, N$.

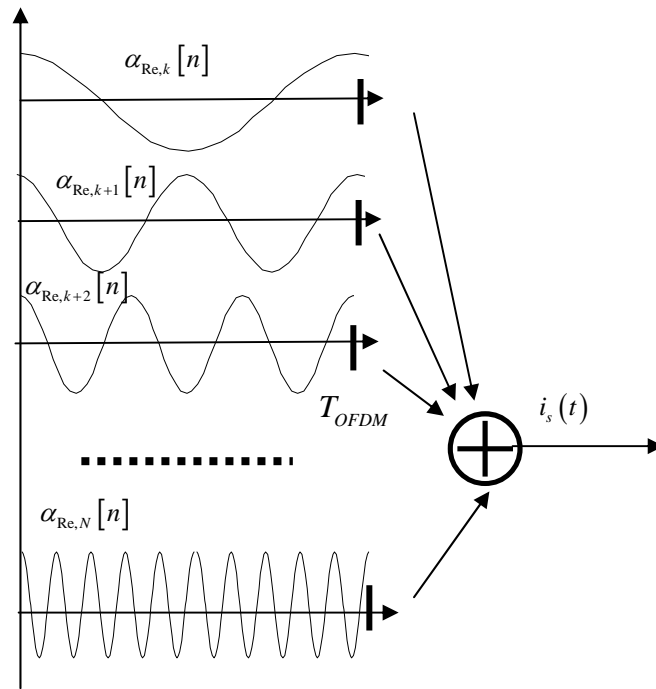


Figura 2. Componente en fase de la señal OFDM.

1.2 Prefijo cíclico y tiempo de guarda.

En la práctica la relación (1), no se utiliza, pues no se podría evitar totalmente la ISI en el caso de que el canal no fuera perfectamente ideal. Si se espera que la duración de la respuesta impulsional del canal sea como mucho igual a T_h , entre símbolo y símbolo OFDM, se deja un tiempo de guarda T_G , en el que se transmite una repetición de los últimos T_G segundos del siguiente símbolo. La parte de símbolo repetida se denomina prefijo cíclico, por lo que otra forma de denominar al tiempo de guarda es $T_G = T_{CP}$. La Figura 3 muestra de forma esquemática que si se cumple $T_h < T_G$ no se produce ISI entre símbolos consecutivos, y además, gracias a la presencia del prefijo cíclico, se preserva la propiedad de ortogonalidad entre las diferentes frecuencias portadoras y se escucha el símbolo n en el tiempo $nT + T_{CP} \leq t \leq (n+1)T$.

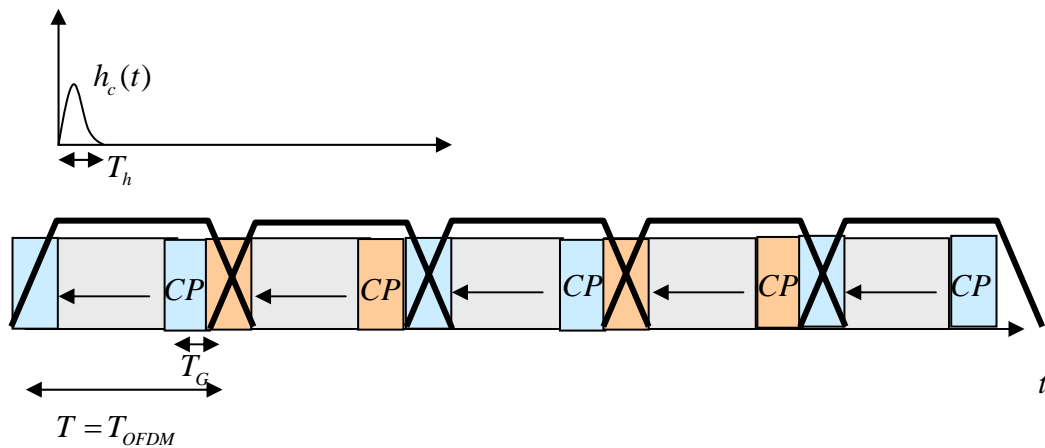


Figura 3. Diagrama de ocupación temporal de la señal OFDM. Mediante colores de relleno, se muestra la ocupación de la señal OFDM con prefijo cíclico transmitido en el tiempo de guarda y en negrita la ocupación resultante a la salida del canal. En estas últimas figuras, los lados laterales de los trapecios representan los transitorios inicial y final de cada una de las respuestas a los símbolos OFDM.

Con la presencia del prefijo cíclico la relación presentada en (1) se transforma en:

$$T_{OFDM} = NT_{QAM} = \frac{N}{f_b} + T_G = \frac{N}{f_b} + T_{CP} \quad (8)$$

$$f_b = \frac{B_T}{N} = \frac{1}{T-T_G} = \frac{1}{T-T_{CP}}$$

f_b representa el ancho frecuencial o separación entre portadoras.

En resumen, para evitar tanto la ISI como la ICI mediante una modulación OFDM a través de un canal en el que la duración de la respuesta impulsional es T_h , se debe transmitir prefijo cíclico de duración $T_{CP} > T_h$.

1.3 Esquema modulador basado en el algoritmo IFFT.

La obtención de la propiedad de ortogonalidad entre las diferentes portadoras, se obtiene mediante el algoritmo IFFT. Intuitivamente puede decirse que cada trama de N símbolos, representa la forma espectral que se ha de transmitir en el tiempo correspondiente a esta trama, por lo que mediante el algoritmo IFFT se pasa del dominio frecuencial al temporal. Análogamente en el demodulador se utiliza el algoritmo FFT para pasar del dominio temporal a los símbolos QAM correspondientes a las N portadoras.

Los algoritmos IFFT y FFT garantizan la ortogonalidad de las portadoras transmitidas y preservan en detección dicha ortogonalidad evitando la ICI (Inter Carrier Interferente). Resultan además computacionalmente eficientes.

Ambas operaciones deben realizarse mediante software, es decir, sobre secuencias numéricas. En el modulador previo a la conversión D/A y en el demodulador posteriormente a la conversión A/D.

Implementación mediante el algoritmo IFFT: La ecuación (2) queda:

$$b_s[nN+l] = \sum_{k=1}^N \alpha_k[n] \exp(j2\pi f_k(l - N_{CP}))$$

$$l = 0 : N + N_{CP} - 1 \quad (9)$$

$$f_k = \frac{k}{N}$$

En la Figura 4 se muestra una implementación práctica del esquema modulador basado en el algoritmo IFFT.

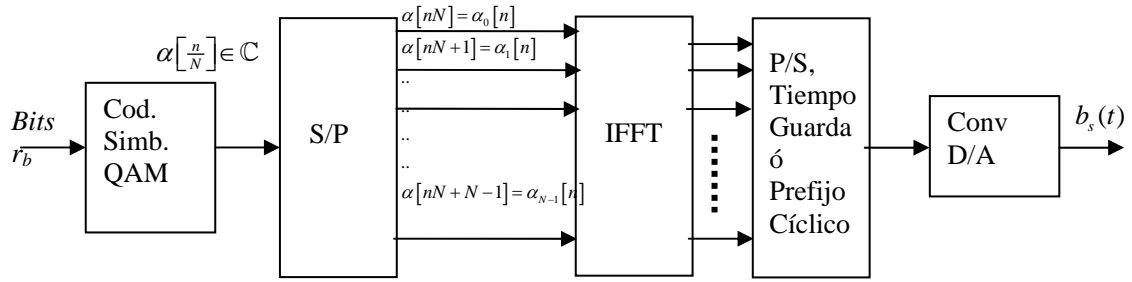


Figura 4. Modulador de equivalente paso bajo de señal OFDM basado en el algoritmo IFFT.

En la Figura 5 se muestra una implementación práctica del esquema demodulador basado en el algoritmo FFT.

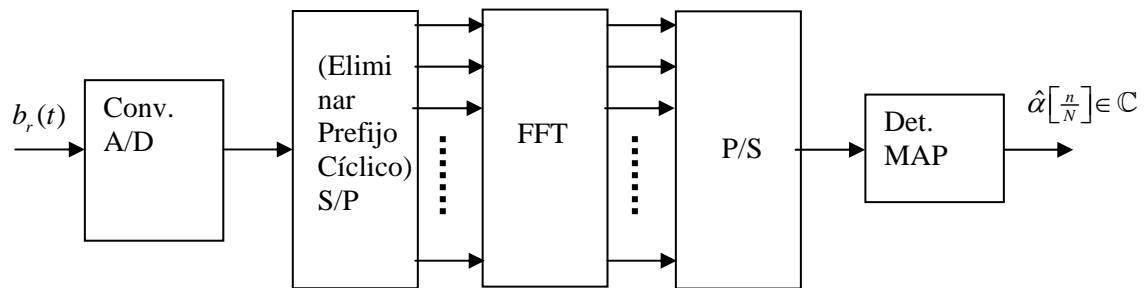


Figura 5. De-Modulador de equivalente paso bajo de señal OFDM basado en el algoritmo FFT.

1.4 Análisis de la BER sin Tiempo de Guarda ni Prefijo Cíclico

A todos los efectos en este apartado se considera $T_G = T_{CP} = 0$.

Para el análisis de la probabilidad de error se utiliza el modelo de señal continuo del equivalente paso bajo por ser equivalente a las señal muestreada de los esquemas modulador y demodulador.

Un modo de interpretar la señal OFDM equivale a considerar la transmisión simultánea de N señales QAM a diferentes frecuencias portadoras. Tomando como punto de partida una secuencia de símbolos complejos QAM $\alpha_k[n]$, se transmiten en tramas de N símbolos cada una. El símbolo “ k -ésimo” de cada trama se transmite a la frecuencia portadora $f_c + f_k$. Un símbolo OFDM corresponde por tanto a la transmisión de una trama de N símbolos QAM.

1.4.1 Análisis de la recepción a partir del equivalente paso bajo.

En este sub-apartado se demuestra que mediante la estructura presentada en la Figura 5 no se produce ICI (inter Carrier Interferente) en el vector de señal detectado.

Mediante las funciones base complejas y ortonormales entre sí,

$$\phi_k(t) = \exp(j2\pi f_k t) \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \text{ con } \frac{B_T}{N} = f_b = \frac{1}{T}$$

El equivalente paso bajo de la señal transmitida:

$$b_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{s_m}[n](t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k[n] \phi_k(t-nT)$$

A través de un canal ideal de respuesta impulsional $h_c(t) = \delta(t)$, y por tanto equivalente paso bajo $b_{h_c}(t) = 2\delta(t)$, se obtiene el equivalente pasobajo de la señal recibida:

$$r(t) = A_c b_s(t) * \frac{1}{2} b_{h_c}(t) + b_n(t) = b_s(t) + b_n(t) \quad (10)$$

Para el análisis de la probabilidad de error, se representa un diagrama de funciones equivalente al receptor basado en la FFT de la Figura 5, que se interpreta como un frente de filtros adaptados según la siguiente figura.

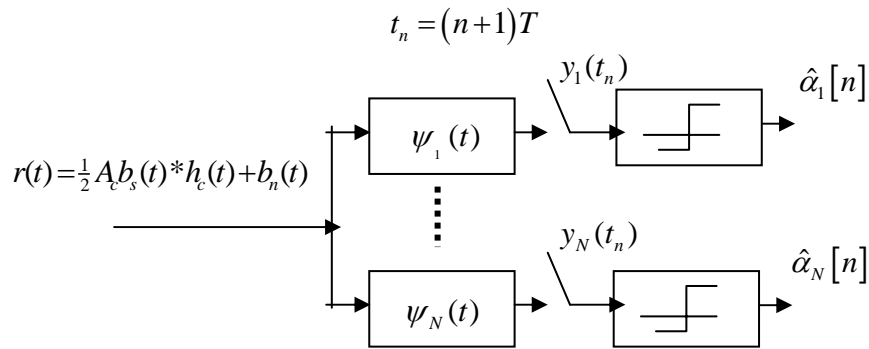


Figura 6. Esquema Receptor OFDM equivalente

Donde cada uno de los filtros adaptados es:

$$\psi_k(t) = \begin{cases} \phi_k^*(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

En la expresión (10), la señal de ruido $b_n(t) = i_n(t) + jq_n(t)$ es el equivalente paso-bajo del ruido paso banda $n(t)$, cuya densidad espectral es $S_n(f) = \frac{N_0}{2} \left(\Pi\left(\frac{f-f_c}{B_r}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_c}{B_r}\right) \right)$, por lo que según se puede consultar en el tema de procesos paso banda (Asignatura Comunicaciones I), las componentes de ruido presentan las densidades espectrales:

$$\begin{aligned} S_{i_n}(f) &= S_{q_n}(f) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{B_r}\right) \\ S_{i_n q_n}(f) &= S_{q_n i_n}(f) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

El equivalente paso bajo de la respuesta impulsional del canal en (10), es tal que:

$$TF\left[\frac{1}{2}b_{h_c}(t)\right] = H_c(f + f_c)$$

La respuesta equivalente paso-bajo “compleja” al filtro adaptado k-ésimo es:

$$y_k(t) = A_c b_s(t) * \frac{1}{2} b_{h_c}(t) * \psi_k(t) + \beta_k(t) \in \mathbb{C}$$

Y muestreada al tiempo de muestreo $t_n = (n+1)T$, da lugar a la muestra resultante a la salida del correspondiente filtro adaptado.

$$\begin{aligned} y_k(t_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda) \psi_k(t_n - \lambda) d\lambda = \int_{t_n - T}^{t_n} r(\lambda) \phi_k^*(T - t_n + \lambda) d\lambda + \beta_k(t_n) = \\ &= A_c \int_{nT}^{(n+1)T} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=1}^N \alpha_{k'}[n'] \phi_{k'}(\lambda - n'T) \phi_k^*(-nT + \lambda) d\lambda + \beta_k(t_n) \end{aligned}$$

La función $\phi_{k'}(\lambda - n'T)$ es de contenido nulo en el intervalo $(t_n - T, t_n) = (nT, (n+1)T)$ excepto para $n' = n$, por lo que el resto de sumandos se anulan. Hasta este punto queda demostrada la ausencia de ISI.

$$\begin{aligned}
 y_k(t_n) &= A_c \int_{nT}^{(n+1)T} \sum_{k'=1}^N \alpha_{k'}[n] \phi_{k'}(\lambda - nT) \phi_k^*(-nT + \lambda) d\lambda + \beta_k(t_n) = \\
 &A_c \sum_{k'=1}^N \alpha_{k'}[n] \int_0^T \phi_{k'}(\nu) \phi_k^*(\nu) d\nu + \beta_k(t_n) = \\
 &A_c \sum_{k'=1}^N \alpha_{k'}[n] \int_0^T \exp(j2\pi(f_k - f_{k'})\nu) d\nu + \beta_k(t_n) = A_c \alpha_k[n] + \beta_k(t_n)
 \end{aligned} \tag{12}$$

Mediante (12) queda demostrada la ausencia de ICI. El correspondiente vector a la salida del receptor mostrado en Figura 6 se modela como:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} y_1(t_n) \\ \vdots \\ y_N(t_n) \end{pmatrix} &= A_c \begin{pmatrix} \alpha_1[n] \\ \vdots \\ \alpha_N[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1(t_n) \\ \vdots \\ \beta_N(t_n) \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 \mathbf{y}(t_n) &= A_c \mathbf{s}[n] + \mathbf{n}(t_n)
 \end{aligned} \tag{13}$$

1.4.1.1 Cálculo de la energía media transmitida por bit.

A partir de la expresión (6) y la base (7) es fácil demostrar que la energía media transmitida por bit para la portadora “k” resulta:

$$bE_b = E_s = A_c^2 \frac{1}{2} (E[\alpha_{Re,k}^2] E_{\phi_{Re,k}} + E[\alpha_{Im,k}^2] E_{\phi_{Im,k}}) = A_c^2 \frac{1}{2} (E[\alpha_{Re,k}^2] + E[\alpha_{Im,k}^2])$$

Con símbolos QPSK:

$$\alpha_{Re,k} = \pm \frac{d}{2}; \quad \alpha_{Im,k} = \pm \frac{d}{2};$$

$$\Rightarrow bE_b = E_s = A_c^2 d^2 \frac{1}{4}$$

$$E_b = A_c^2 d^2 \frac{1}{8}$$

1.4.1.2 Cálculo de la potencia de ruido.

Para el análisis de la muestra compleja de ruido $\beta_k(t_n) \in \mathbb{C}$, cada uno de los filtros complejos de la Figura 6, puede desglosarse la parte real y la parte imaginaria y se considera el siguiente en conjunto el diagrama de la Figura 7;

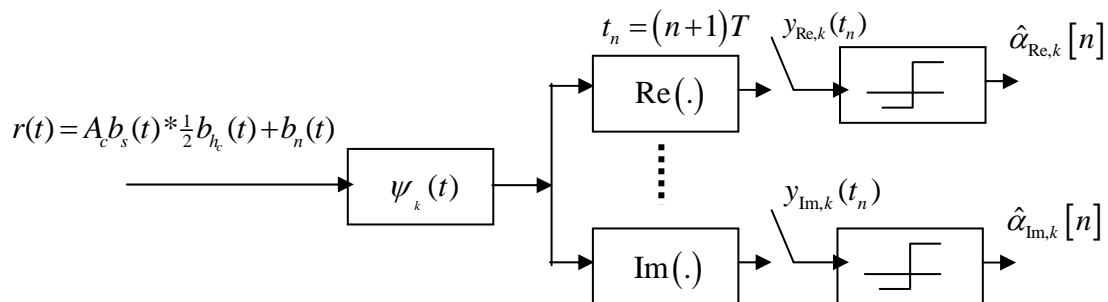


Figura 7. Esquema demodulador equivalente OFDM para la portadora k.

El filtro adaptado complejo se desglosa en:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{Re},k}(t) &= \cos(2\pi f_k t) p(T-t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cos(2\pi f_k t) \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \\ \psi_{\text{Im},k}(t) &= -\text{sen}(2\pi f_k t) p(T-t) = -\frac{1}{\sqrt{T}} \text{sen}(2\pi f_k t) \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)\end{aligned}$$

Las dos señales a las salidas de los bloques Re, Im de la Figura 7 , se relacionan con la correspondiente salida de la Figura 6

$$\begin{aligned}y_k(t_n) &= y_{\text{Re},k}(t_n) + jy_{\text{Im},k}(t_n) = A_c \alpha_k[n] + \beta_k(t_n) = \\ &A_c \alpha_{\text{Re},k}[n] + \beta_{\text{Re},k}(t_n) + j(A_c \alpha_{\text{Im},k}[n] + \beta_{\text{Im},k}(t_n))\end{aligned}$$

Las componentes de ruido son de distribución gaussiana:

$$\begin{aligned}\beta_k(t) &= b_n(t) * \psi_k(t) = (i_n(t) + jq_n(t)) * (\psi_{\text{Re},k}(t) + j\psi_{\text{Im},k}(t)) = \\ &i_n(t) * \psi_{\text{Re},k}(t) - q_n(t) * \psi_{\text{Im},k}(t) + j(q_n(t) * \psi_{\text{Re},k}(t) + i_n(t) * \psi_{\text{Im},k}(t)) = \\ &\beta_{\text{Re},k}(t) + j\beta_{\text{Im},k}(t)\end{aligned}$$

Donde las componentes en fase y en cuadratura son procesos paso bajo que presentan las funciones de densidad espectral:

$$\begin{aligned}S_{i_n}(f) &= S_{q_n}(f) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{B_s}\right) \\ S_{i_n q_n}(f) &= 0\end{aligned}$$

A partir de (11) se demuestra que:

$$\beta_{\text{Re},k}(t_n) : N(0, \sigma_{\text{Re}}^2) \text{ con}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{Re},k}^2 &= E[\beta_{\text{Re},k}^2(t_n)] = \int S_{i_n}(f) |\Psi_{\text{Re},k}(f)|^2 df + \int S_{q_n}(f) |\Psi_{\text{Im},k}(f)|^2 df = \\ &N_0 E_{\psi_{\text{Re},k}} + N_0 E_{\psi_{\text{Im},k}} = N_0\end{aligned}$$

$$\beta_{\text{Im},k}(t_n) : N(0, \sigma_{\text{Im}}^2) \text{ con}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{Im}}^2 &= E[\beta_{\text{Im},k}^2(t_n)] = \int S_{q_n}(f) |\Psi_{\text{Re},k}(f)|^2 df + \int S_{i_n}(f) |\Psi_{\text{Im},k}(f)|^2 df = \\ &N_0 E_{\psi_{\text{Re},k}} + N_0 E_{\psi_{\text{Im},k}} = N_0\end{aligned}$$

y por último:

$$\begin{aligned}E[\beta_{\text{Re},k}(t_n) \beta_{\text{Im},k}(t_n)] &= \\ \int S_{i_n}(f) \Psi_{\text{Re},k}(f) \Psi_{\text{Im},k}^*(f) df + \int S_{q_n}(f) \Psi_{\text{Re},k}^*(f) \Psi_{\text{Im},k}(f) df &= 0\end{aligned}$$

La distribución de las dos muestras de ruido a las correspondientes salidas de los bloques Re, Im de la Figura 7 , resultan:

$$\begin{pmatrix} \beta_{\text{Re},k}(t_n) \\ \beta_{\text{Im},k}(t_n) \end{pmatrix} : N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, N_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

1.4.1.3 Análisis de la probabilidad de error.

La probabilidad de error para cualquier formato de modulación QAM, transmitida mediante OFDM y respecto al cociente $\frac{E_b}{N_0}$, es la obtenida con el correspondiente esquema convencional. Véase como ejemplo el caso QPSK. Con $\sigma^2 = \sigma_{\text{Re},k}^2 = \sigma_{\text{Im},k}^2 = N_0$:

$$P_e = 2Q\left(\frac{dA_c}{2\sigma}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2 A_c^2}{4N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

1.5 Análisis de la BER con Prefijo Cíclico

En este apartado se presenta el análisis de la probabilidad de error en la situación realista de transmitir el prefijo cíclico en el tiempo de guarda: $T_G = T_{CP}$. Ver la Figura 10 para observar la parte real de la señal. El receptor “escucha” la señal recibida “desechando” la parte correspondiente al tiempo de prefijo cíclico, y así se evita la ISI entre símbolos consecutivos. En el tiempo de escucha, las funciones ortogonales transmitidas se mantienen ortogonales entre sí, por lo que también se evita la ICI. Como se observa al final del apartado, en la interpretación de portadora QAM para el cálculo de la probabilidad de error, la propiedad anterior, se traduce en que las funciones de la base generadora de la señal transmitida no coinciden con las correspondientes a los filtros adaptados de la Figura 6, en cuanto a su duración temporal.

El efecto del canal, únicamente repercute en las ganancias individuales de cada una de las portadoras transmitidas y frecuentemente se realiza una operación de filtrado frecuencial en detección, dividiendo las muestras complejas resultantes del procesado FFT, por la función de transferencia del canal.

1.5.1 Análisis de la recepción a partir del equivalente paso bajo.

En este sub-apartado se demuestra que mediante la estructura presentada en la Figura 5 no se produce ni ISI ni ICI (inter Carrier Interferente) en el vector de señal detectado.

Las funciones base complejas y ortonormales entre sí, son

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T-T_{CP}}} \exp(j2\pi f_k(t-T_{CP})) \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \text{ con } \frac{B_T}{N} = f_b = \frac{1}{T-T_{CP}} \quad (14)$$

El equivalente paso bajo de la señal transmitida es:

$$b_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{s,n}[n](t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k[n] \phi_k(t-nT) \quad (15)$$

Para un canal de respuesta impulsional $h_c(t)$, y equivalente paso bajo $b_{h_c}(t)$, ambas funciones son de idéntica duración T_h . El diagrama de funciones equivalente a un frente de filtros adaptados de la Figura 6, en este caso es válido considerando los filtros adaptados:

$$\psi_k(t) = \begin{cases} \phi_k^*(T-t) & 0 \leq t \leq T-T_{CP} \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

La respuesta equivalente paso-bajo “compleja” al filtro adaptado k-ésimo es:

$$y_k(t) = \frac{1}{2} A_c b_s(t) * b_{h_c}(t) * \psi_k(t) + \beta_k(t) \in \mathbb{C}$$

Y muestreada al tiempo de muestreo $t_n = (n+1)T$, da lugar a la muestra resultante a la salida del correspondiente filtro adaptado.

$$\begin{aligned}
 y_k(t_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda) \psi_k(t_n - \lambda) d\lambda = \int_{t_n - T + T_{CP}}^{t_n} r(\lambda) \phi_k^*(-nT + \lambda) d\lambda = \\
 A_c \int_{nT + T_{CP}}^{(n+1)T} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=1}^N \alpha_{k'} [n'] \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{k'}(\lambda - \gamma - n'T) \frac{1}{2} b_{h_c}(\gamma) d\gamma \phi_k^*(-nT + \lambda) d\lambda + \beta_k(t_n) &= \quad (16) \\
 A_c \int_{nT + T_{CP}}^{(n+1)T} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=1}^N \alpha_{k'} [n'] \int_0^{T_{CP}} \phi_{k'}(\lambda - \gamma - n'T) \frac{1}{2} b_{h_c}(\gamma) d\gamma \phi_k^*(-nT + \lambda) d\lambda + \beta_k(t_n) &
 \end{aligned}$$

Los límites de integración de la integral en λ , en (16), resultan de considerar que la función $\psi_k(t_n - \lambda)$, se halla delimitada en $0 < t_n - \lambda < T - T_{CP}$.

Los límites de integración de la integral en γ , se obtienen de que para la respuesta impulsional $b_{h_c}(t)$ su duración no excede a la del prefijo cíclico T_{CP} , la única integral

$\int_0^{T_{CP}} \phi_{k'}(\lambda - \gamma - n'T) b_{h_c}(\gamma) d\gamma$ con contenido no nulo en el intervalo $(nT + T_{CP}, nT + T)$ es la obtenida para $n' = n$. Para ayudar a entender esta propiedad se presenta en la Figura 8, un esquema de ocupación temporal de las funciones transmitidas $\phi_{k'}(\lambda - \gamma - nT)$.

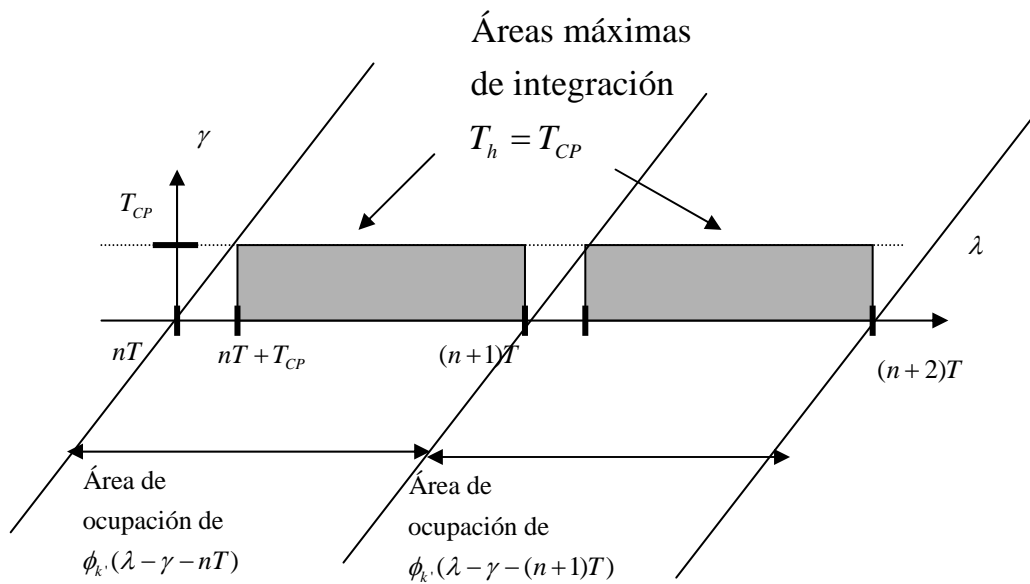


Figura 8. Esquema de ocupación temporal de las funciones transmitidas respecto a las variables de integración (γ, λ).

Por tanto (16) se simplifica del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
y_k(t_n) &= A_c \sum_{k'=1}^N \alpha_{k'}[n] \int_{nT+T_{CP}}^{(n+1)T} \int_0^{T_{CP}} \frac{1}{2} b_{h_c}(\gamma) \phi_{k'}(\lambda - \gamma - nT) d\gamma \phi_k^*(-nT + \lambda) d\lambda + \beta_k(t_n) = \\
&A_c \sum_{k'=1}^N \alpha_{k'}[n] \int_{T_{CP}}^T \int_0^{T_{CP}} \frac{1}{2} b_{h_c}(\gamma) \phi_{k'}(\nu - \gamma) d\gamma \phi_k^*(\nu) d\nu + \beta_k(t_n) = \\
&A_c \sum_{k'=1}^N \alpha_{k'}[n] \int_0^{T_{CP}} \frac{1}{2} b_{h_c}(\gamma) \int_{T_{CP}}^T \phi_{k'}(\nu - \gamma) \phi_k^*(\nu) d\nu d\gamma + \beta_k(t_n)
\end{aligned} \tag{17}$$

El paso de la ecuación (17) a la (18) es posible al considerar que debido a la duración limitada de la función del canal $b_{h_c}(t)$ a T_{CP} , la variable γ , que representa el desfase entre las dos funciones integradas respecto a ν se halla limitada a $0 < \gamma < T_{CP}$, (ver Figura 8) y por tanto se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
&A_c \sum_{k'=1}^N \alpha_{k'}[n] \int_0^{T_{CP}} \frac{1}{2} b_{h_c}(\gamma) \frac{1}{T-T_{CP}} \int_{T_{CP}}^T \exp(j2\pi f_{k'}(\nu - \gamma - T_{CP})) \exp(-j2\pi f_k(\nu - T_{CP})) d\nu d\gamma + \beta_k(t_n) = \\
&A_c \sum_{k'=1}^N \alpha_{k'}[n] \int_0^{T_{CP}} \frac{1}{2} b_{h_c}(\gamma) \exp(-j2\pi f_{k'}\gamma) d\gamma \frac{1}{T-T_{CP}} \int_{T_{CP}}^T \exp(-j2\pi(f_k - f_{k'}) (\nu - T_{CP})) d\nu + \beta_k(t_n) = \\
&A_c \sum_{k'=1}^N \alpha_{k'}[n] \int_0^{T_{CP}} \frac{1}{2} b_{h_c}(\gamma) \exp(-j2\pi f_{k'}\gamma) d\gamma \delta[k' - k] + \beta_k(t_n) = \\
&A_c \sum_{k'=1}^N \alpha_{k'}[n] \frac{1}{2} B_{h_c}(f_k) + \beta_k(t_n) = A_c \alpha_k[n] H_c(f_c + f_k) + \beta_k(t_n)
\end{aligned} \tag{18}$$

Mediante (18) queda demostrada la ausencia de ICI, en la situación de transmisión del prefijo cíclico durante el tiempo de guarda y siempre que se cumpla que la duración de la respuesta impulsional del canal sea menor o igual que la del prefijo cíclico ($T_h \leq T_{CP}$). Se modela el correspondiente vector de salida del receptor de la Figura 6 como.

$$\begin{pmatrix} y_1(t_n) \\ \vdots \\ y_N(t_n) \end{pmatrix} = A_c \begin{pmatrix} H_c(f_c + f_1) \alpha_1[n] \\ \vdots \\ H_c(f_c + f_N) \alpha_N[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1(t_n) \\ \vdots \\ \beta_N(t_n) \end{pmatrix} \tag{19}$$

1.5.2 Cálculo de la energía media transmitida por bit.

La energía media transmitida por bit para la portadora “k” resulta considerando:

$$\begin{aligned}
s(t) &= A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N \alpha_{\text{Re},k}[n] \cos(2\pi(f_c + f_k)(t - T_{CP})) p(t - nT) - \alpha_{\text{Im},k}[n] \text{sen}(2\pi(f_c + f_k)(t - T_{CP})) p(t - nT) \\
p(t) &= \frac{1}{\sqrt{T-T_{CP}}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)
\end{aligned}$$

Las funciones ortonormales que soportan la modulación transmitida son:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{Re},k}(t) &= +\sqrt{\frac{2}{T-T_{CP}}} \cos(2\pi(f_c + f_k)(t - T_{CP})) \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \\
\varphi_{\text{Im},k}(t) &= -\sqrt{\frac{2}{T-T_{CP}}} \text{sen}(2\pi(f_c + f_k)(t - T_{CP})) \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \\
k &= 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{20}$$

$$bE_b = E_s = A_c^2 \left(E[\alpha_{\text{Re},k}^2] E_{\phi_{\text{Re},k}} + E[\alpha_{\text{Im},k}^2] E_{\phi_{\text{Im},k}} \right) = A_c^2 \frac{1}{2} \frac{T}{T-T_{CP}} \left(E[\alpha_{\text{Re},k}^2] + E[\alpha_{\text{Im},k}^2] \right)$$

Con símbolos QPSK:

$$\alpha_{\text{Re},k} = \pm \frac{d}{2}; \quad \alpha_{\text{Im},k} = \pm \frac{d}{2};$$

$$\Rightarrow bE_b = E_s = A_c^2 d^2 \frac{T}{T-T_{CP}} \frac{1}{4}$$

$$E_b = A_c^2 d^2 \frac{T}{T-T_{CP}} \frac{1}{8}$$

1.5.3 Cálculo de la potencia de ruido.

Para el análisis de la muestra compleja de ruido $\beta_k(t_n) \in \mathbb{C}$, a la estructura de la Figura 7, se le añade un bloque de ecualización en el dominio de la frecuencia según se muestra en la Figura 9.

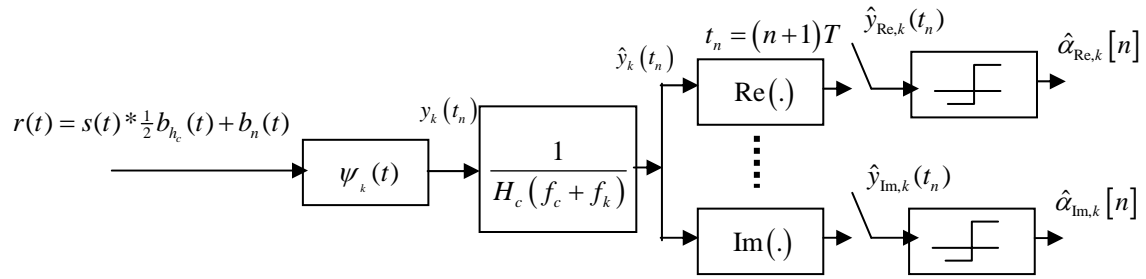


Figura 9. Esquema demodulador equivalente OFDM para la portadora k. Incluye Ecualización de canal en el dominio de la frecuencia.

Para la detección de los símbolos transmitidos, se asume que se conoce la función de transferencia del canal y que se ecualiza según las siguientes ecuaciones:

$$\hat{y}_k(t_n) = \frac{y_k(t_n)}{H_c(f_c + f_k)} = A_c \alpha_k[n] + \frac{\beta_k(t_n)}{H_c(f_c + f_k)} = A_c \alpha_k[n] + \hat{\beta}_k(t_n)$$

O equivalentemente

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1(t_n) \\ \vdots \\ \hat{y}_N(t_n) \end{pmatrix} = A_c \begin{pmatrix} \alpha_1[n] \\ \vdots \\ \alpha_N[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1(t_n) \\ \vdots \\ \hat{\beta}_N(t_n) \end{pmatrix} \quad (21)$$

Con

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_k(t_n) &= \hat{\beta}_{\text{Re},k}(t_n) + j\hat{\beta}_{\text{Im},k}(t_n) = \frac{\beta_k(t_n)}{H_c(f_c + f_k)} = \\ &= \frac{\beta_{\text{Re},k}(t_n) + j\beta_{\text{Im},k}(t_n)}{H_{\text{Re},c}(f_c + f_k) + jH_{\text{Im},c}(f_c + f_k)} \frac{H_{\text{Re},c}(f_c + f_k) - jH_{\text{Im},c}(f_c + f_k)}{H_{\text{Re},c}(f_c + f_k) - jH_{\text{Im},c}(f_c + f_k)} = \\ &= \frac{\beta_{\text{Re},k}(t_n)H_{\text{Re},c}(f_c + f_k) + \beta_{\text{Im},k}(t_n)H_{\text{Im},c}(f_c + f_k)}{|H_c(f_c + f_k)|^2} + \\ &+ j \frac{-\beta_{\text{Re},k}(t_n)H_{\text{Im},c}(f_c + f_k) + \beta_{\text{Im},k}(t_n)H_{\text{Re},c}(f_c + f_k)}{|H_c(f_c + f_k)|^2} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\hat{\beta}_{\text{Re},k}(t_n) : N(0, \hat{\sigma}_{\text{Re}}^2) \quad ; \quad \hat{\sigma}_{\text{Re}}^2 = N_0 \frac{1}{|H_c(f_c + f_k)|^2}$$

$$\hat{\beta}_{\text{Im},k}(t_n) : N(0, \hat{\sigma}_{\text{Im}}^2) \quad ; \quad \hat{\sigma}_{\text{Im}}^2 = N_0 \frac{1}{|H_c(f_c + f_k)|^2}$$

y por último a partir de (22) se puede demostrar que:

$$E[\hat{\beta}_{\text{Re},k}(t_n)\hat{\beta}_{\text{Im},k}(t_n)] = 0$$

La distribución de las dos muestras de ruido a las correspondientes salidas de los bloques Re, Im de la Figura 9, resultan:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_{\text{Re},k}(t_n) \\ \hat{\beta}_{\text{Im},k}(t_n) \end{pmatrix} : N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{N_0}{|H_c(f_c + f_k)|^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

1.5.4 Análisis de la probabilidad de error.

La probabilidad de error para cualquier formato de modulación QAM, transmitida mediante OFDM y respecto al cociente $\frac{E_b}{N_0}$, es la obtenida con el correspondiente esquema convencional. Véase como ejemplo el caso QPSK. Con

$$\sigma^2 = \hat{\sigma}_{\text{Re}}^2 = \hat{\sigma}_{\text{Im}}^2 = N_0 \frac{1}{|H_c(f_c + f_k)|^2} :$$

$$P_e = 2Q\left(\frac{dA_c}{2\sigma}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2 A_c^2 |H_c(f_c + kf_b)|^2}{4N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{2\left(\frac{T - T_{cp}}{T}\right) |H_c(f_c + kf_b)|^2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

El resultado es generalizable a cualquier formato QAM

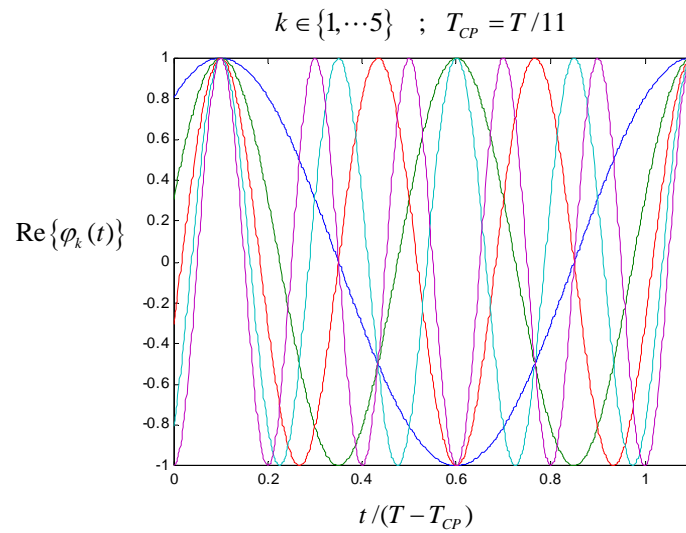


Figura 10. Señales generadoras de OFDM , equivalente paso bajo, parte real.

1.6 Un caso práctico: El sistema DAB