

## Comunicaciones II

Tema 5: Ejemplos  
Modulaciones Avanzadas (Espectro Ensanchado y Multiportadora)

Javier Rodríguez Fonollosa



Departament de Teoria  
del Senyal i Comunicacions



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

### Comparación entre OFDM y CDMA

- Es esquema de modulación OFDM y el esquema de acceso múltiple CDMA presentan cierta similitud en el modelo de señal recibida:

$$r(t) = s(t) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{[n]}(t) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} s_{mk[n]} \varphi'_k(t - nT) + w(t)$$

con distintas funciones base.

- En OFDM:

$$\varphi'_k(t) = \varphi_k(t) * h(t)$$

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T-T_{CP}}} \exp\left(j2\pi \frac{k}{T-T_{CP}}(t - T_{CP})\right) \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) ; k \in \{1, \dots, N-1\}$$

- En CDMA:

$$\varphi'_k(t) = \varphi_k(t) * h_k(t)$$

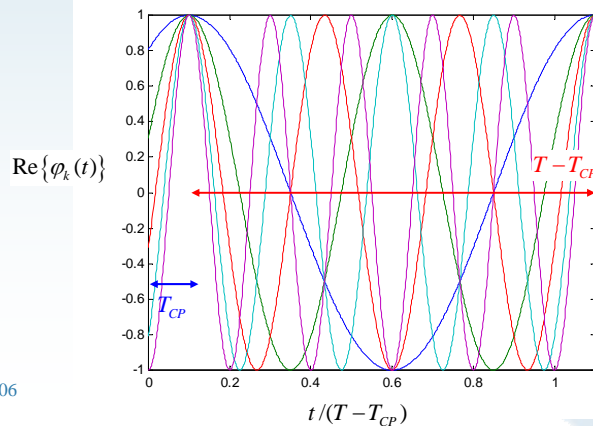
$$\varphi_k(t) = \sum_{l=0}^{SF-1} c_k[l] \varphi_c(t - lT_c) = \sum_{l=0}^{SF-1} c_k[l] \Pi\left(\frac{t-T_c/2-lT_c}{T_c}\right) ; c_k[l] \in \{-1, 1\}$$

### Comparación entre OFDM y CDMA (II)

- Ambas funciones base son ortonormales en transmisión pero tan sólo en OFDM esta ortogonalidad se preserva en recepción:

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T-T_{CP}}} e^{j2\pi \frac{k}{T-T_{CP}}(t-T_{CP})}$$

$$k \in \{1, \dots, 5\} \quad ; \quad T_{CP} = T/11$$



10/11/2006

T5-E3

### Comparación entre OFDM y CDMA (III)

- Se analizará el impacto del canal para cada subportadora:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_k(t) & \longrightarrow & \boxed{h(t)} & \longrightarrow & \varphi'_k(t) = \varphi_k(t)H\left(\frac{k}{T-T_{CP}}\right) = \\ & & & & = \varphi_k(t)H[k] \\ \varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T-T_{CP}}} e^{j2\pi \frac{k}{T-T_{CP}}(t-T_{CP})} & & h(t) = 0, t \notin [0, T_{CP}] & & \end{array}$$

- Puesto que la señal a la entrada es un tono puro la señal a la salida del canal también lo es una vez pasado el transitorio de  $T_{cp}$  (con una amplitud y fase que depende de la respuesta frecuencial del canal a esta frecuencia).
- Pero las distintas funciones base en OFDM son ortogonales con independencia del factor de fase por lo que la ortogonalidad se mantiene a la salida del canal.

10/11/2006

COM II

T5-E4

### Comparación entre OFDM y CDMA (IV)

- En CDMA síncrono los códigos son ortogonales en transmisión:

$$\int_0^T \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \sum_{l=0}^{SF-1} \sum_{p=0}^{SF-1} c_i[p] c_j[l] \int_0^T \varphi_c(t - pT_c) \varphi_c(t - lT_c) dt =$$

$$= \sum_{l=0}^{SF-1} \sum_{p=0}^{SF-1} c_i[p] c_j[l] \delta[p-l] = \sum_{l=0}^{SF-1} c_i[l] c_j[l] = 0 \quad ; \quad i, j \in \{1, \dots, M\}$$

Pero la ortogonalidad no se mantiene en recepción entre  $\varphi'_i(t) = \varphi_i(t) * h_i(t)$  y  $\varphi'_j(t) = \varphi_j(t) * h_j(t)$  tanto en el enlace ascendente:  $h_i(t) \neq h_j(t)$  como en el descendente:  $h_i(t) = h_j(t)$

- En esta comparación supondremos CDMA con periodo de guarda para evitar la ISI.

10/11/2006

COM II

T5-E5

### Comparación entre OFDM y CDMA (V)

- En notación matricial si en ambos casos se utiliza un receptor formado por una **base ortonormal**:

$$\text{OFDM: } \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H[0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & H[N-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{m0} \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{m(N-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{s}_m + \mathbf{n}$$

$$\text{CDMA: } \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{00} & \cdots & \rho_{0(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{(N-1)0} & \cdots & \rho_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{m0} \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{m(N-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}_s \mathbf{s}_m + \mathbf{n}$$

10/11/2006

COM II

T5-E6

### Comparación entre OFDM y CDMA (VI)

- En ambos casos la aplicación del criterio MAP para símbolos (entre usuarios o entre portadoras) equiprobables resulta en:

$$\hat{\mathbf{s}}_m = \arg \max_{\mathbf{s}_m} f_y(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m)$$

$$f_y(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) \sim \begin{cases} N(\mathbf{H}\mathbf{s}_m, \frac{N_0}{2} \mathbf{I}_N): \text{OFDM} \\ N(\mathbf{R}_s \mathbf{s}_m, \frac{N_0}{2} \mathbf{I}_N): \text{CDMA} \end{cases} \Rightarrow \hat{\mathbf{s}}_m = \begin{cases} \arg \min_{\mathbf{s}_m} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}_m\|^2 \\ \arg \min_{\mathbf{s}_m} \|\mathbf{y} - \mathbf{R}_s \mathbf{s}_m\|^2 \end{cases}$$

con la diferencia que en OFDM la matriz es diagonal!

10/11/2006

COM II

T5-E7

### Comparación entre OFDM y CDMA (VII)

- En OFDM esta expresión puede simplificarse cuando los símbolos en cada subportadora son independientes:

$$\hat{\mathbf{s}}_m = \arg \min_{\mathbf{s}_m} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}_m\|^2 = \arg \min_{s_{m0} \dots s_{m(N-1)}} \sum_{k=0}^{N-1} |y_k - H[k]s_{mk}|^2 = \arg \min_{s_{m0} \dots s_{m(N-1)}} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k(s_{mk})$$

Por tanto los símbolos de las distintas subportadoras pueden detectarse de forma independiente:

$$s_{m0} = \arg \min_{s_{m0}} \varepsilon_0(s_{m0}) = \arg \min_{s_{m0}} |y_0 - H[0]s_{m0}|^2$$

$$\vdots$$

$$s_{m(N-1)} = \arg \min_{s_{m(N-1)}} \varepsilon_{N-1}(s_{m(N-1)}) = \arg \min_{s_{m(N-1)}} |y_{N-1} - H[N-1]s_{m(N-1)}|^2$$

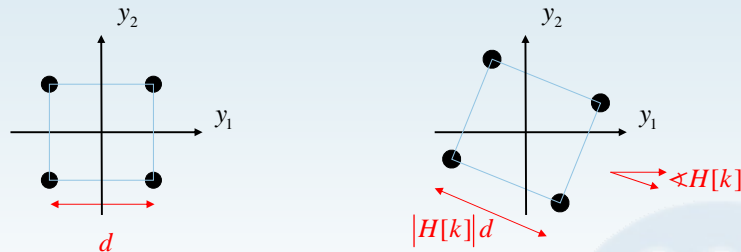
10/11/2006

COM II

T5-E8

### Comparación entre OFDM y CDMA (VIII)

- Para cada subportadora la constelación de sus símbolos ha sido modificada (en módulo y fase) por  $H[k]$



$$\text{QAM: } BER_k \approx \frac{4}{\log_2 M_k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M_k}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M_k}{M_k - 1} \frac{|H[k]|^2 E_b (1 - \gamma_{CP})}{N_0}}\right)$$

$$\text{BPSK: } BER_k \approx Q\left(\sqrt{\frac{2 |H[k]|^2 E_b (1 - \gamma_{CP})}{N_0}}\right)$$

10/11/2006

T5-E9

### Comparación entre OFDM y CDMA (XI)

- En CDMA la expresión no se puede simplificar y se requiere una búsqueda exhaustiva para todas las combinaciones de posibles símbolos entre todos los usuarios:

$$\hat{\mathbf{s}}_m = \arg \min_{\mathbf{s}_m} \|\mathbf{y} - \mathbf{R}_s \mathbf{s}_m\|^2 = \arg \min_{s_{m0} \dots s_{m(N-1)}} \sum_{k=0}^{N-1} \left| y_k - \sum_{j=0}^{N-1} \rho_{kj} s_{mj} \right|^2$$

- El receptor óptimo no resulta realizable para un número elevado de usuarios en CDMA (complejidad exponencial con el número de usuarios).
- Debe recurrirse a algún esquema subóptimo como por ejemplo el decorrelador

10/11/2006

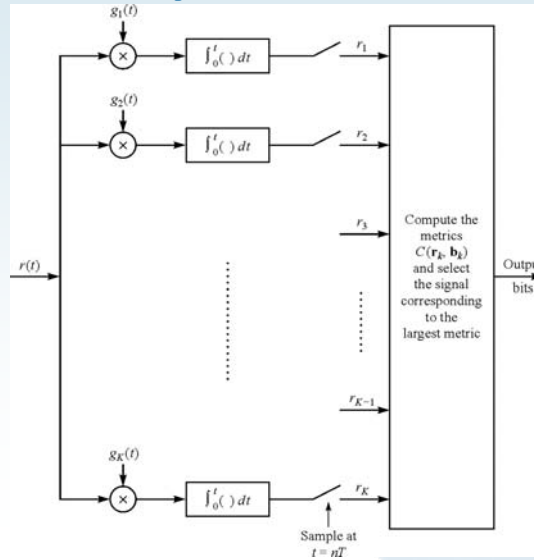
COM II

T5-E10

### Comparación entre OFDM y CDMA (X)

- Criterio de distancia mínima en el espacio de señal multiusuario:

$$\hat{\mathbf{s}}_m = \arg \min_{\mathbf{s}_m} \|\mathbf{y} - \mathbf{R}_s \mathbf{s}_m\|^2$$



10/11/2006

### Comparación entre OFDM y CDMA (XI)

- Receptor Multiusuario subóptimo: Decorrelador:

$$\hat{\mathbf{s}}_m \approx \mathbf{x} = \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{s}_m + \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{n} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}'$$

El ruido resultante no está incorrelado entre componentes y presenta una caracterización del tipo:

$$\mathbf{n}' \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_s^{-1} \frac{N_0}{2} \mathbf{I}_N \mathbf{R}_s^{-1}) = N(\mathbf{0}, \frac{N_0}{2} \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{R}_s^{-1})$$

Nota: se ha utilizado la relación

$$\mathbf{n}' = \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{n} \Rightarrow E[\mathbf{n}' \mathbf{n}'^T] = E[\mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{n} (\mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{n})^T] = E[\mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{R}_s^{-T}] = \mathbf{R}_s^{-1} E[\mathbf{n} \mathbf{n}^T] \mathbf{R}_s^{-1}$$

Por tanto:

$$\mathbf{x} | \mathbf{s}_m \sim N(\mathbf{s}_m, \frac{N_0}{2} \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{R}_s^{-1}) \Rightarrow \arg \max_{\mathbf{s}_m} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} | \mathbf{s}_m) \neq \arg \min_{\mathbf{s}_m} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_m\|^2$$

- Se buscará una detección independiente de los símbolos de cada usuario (en este caso no es óptimo!). Para ello se analiza cada una de las componentes por separado.

10/11/2006

COM II

T5-E12

### Comparación entre OFDM y CDMA (XII)

- Analizando el decorrelador componente a componente a partir de la expresión matricial:

$$\hat{\mathbf{s}}_m \approx \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{s}_m + \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{n} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}'$$

Resulta:

$$\hat{s}_{km} \approx s_{km} + n'_k$$

- El ruido resultante en cada componente tiene una potencia:

$$E[|n'_k|^2] = \frac{N_0}{2} R_s^{-2}[k, k]$$

Supone un incremento efectivo de potencia de ruido debido a la presencia del canal de:

$$R_s^{-2}[k, k]$$

10/11/2006

COM II

T5-E13

### Implementación alternativa del decorrelador

- Hasta ahora se ha planteado el decorrelador como una solución subóptima a partir de las salidas de los filtros adaptados ortonormales.
- Si embargo la necesidad de que sean ortogonales tan sólo se justifica cuando se pretende realizar la detección óptima ya que así el vector de ruido resulta incorrelado entre sí y se obtiene el criterio de distancia mínima en el espacio de señal multiusuario:

$$\hat{\mathbf{s}}_m = \arg \min_{\mathbf{s}_m} \|\mathbf{y} - \mathbf{R}_s \mathbf{s}_m\|^2$$

- Tras multiplicar el vector  $\mathbf{y}$  por la matriz  $\mathbf{R}_s^{-1}$  el ruido deja de estar incorrelado de todas formas por lo que no habría sido necesario utilizar la base ortonormal.
- Como implementación alternativa nos podríamos haber planteado directamente el decorrelador utilizando filtros adaptados a las funciones base (no ortogonales) recibidas:

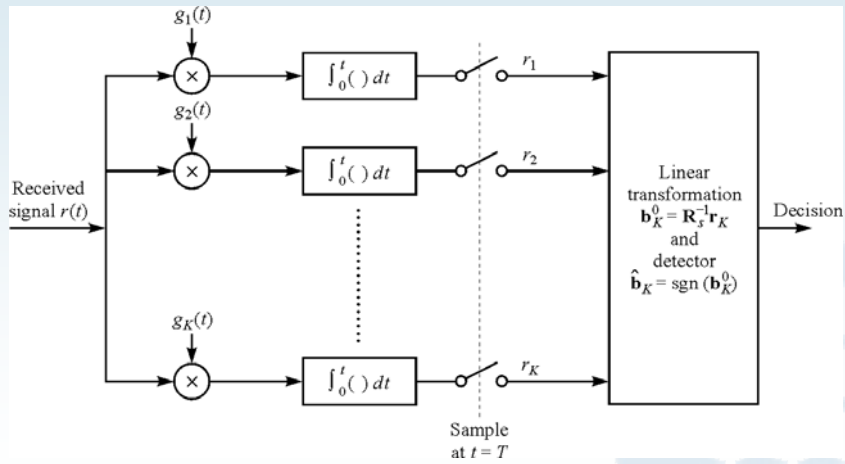
$$\varphi'_k(t) = \varphi_k(t) * h_k(t)$$

10/11/2006

T5-E14

### Implementación alternativa del decorrelador (II)

- Resulta una implementación equivalente:



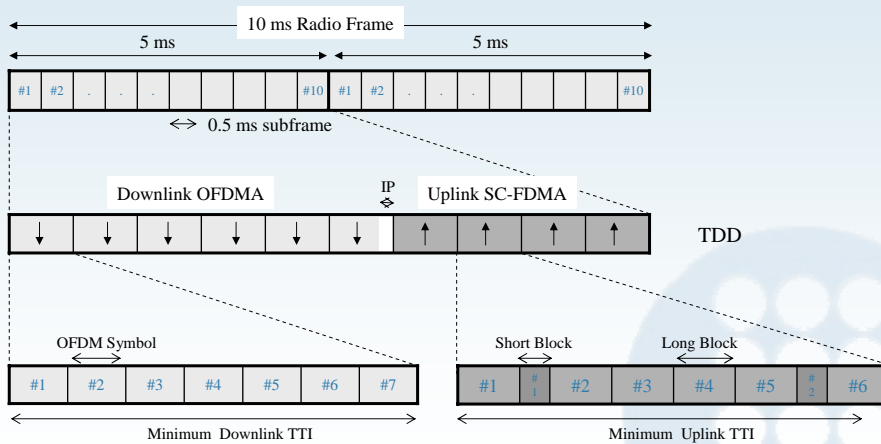
10/11/2006

COM II

T5-E15

### Ejemplo: Esquema de multiplexado y modulación en 3.9 G

- Estructura de trama de Evolved UTRA (EUTRA)



10/11/2006

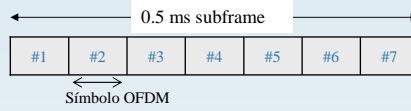
COM II

T5-E16



### Ejemplo: Esquema de multiplexado y modulación en 3.9 G (II)

- Estructura de sub-trama en el enlace descendente



Parámetros utilizados en el enlace descendente

Transmission BW	1.25 MHz	2.5 MHz	5 MHz	10 MHz	15 MHz	20 MHz	
Sub-frame duration	0.5 ms						
Sub-carrier spacing	15 kHz						
Sampling frequency	1.92 MHz (1/2 × 3.84 MHz)	3.84 MHz	7.68 MHz (2 × 3.84 MHz)	15.36 MHz (4 × 3.84 MHz)	23.04 MHz (6 × 3.84 MHz)	30.72 MHz (8 × 3.84 MHz)	
FFT size	128	256	512	1024	1536	2048	
Number of occupied sub-carriers <sup>†, ††</sup>	76	151	301	601	901	1201	
Number of OFDM symbols per sub frame (Short/Long CP)	7/6						
CP length (us/samples)	Short	$(4.69/9) \times 6,$ $(5.21/10) \times 1^*$	$(4.69/18) \times 6,$ $(5.21/20) \times 1$	$(4.69/36) \times 6,$ $(5.21/40) \times 1$	$(4.69/72) \times 6,$ $(5.21/80) \times 1$	$(4.69/108) \times 6,$ $(5.21/120) \times 1$	$(4.69/144) \times 6,$ $(5.21/160) \times 1$
	Long	(16.67/32)	(16.67/64)	(16.67/128)	(16.67/256)	(16.67/384)	(16.67/512)

10/11/2006

COM II

T5-E17

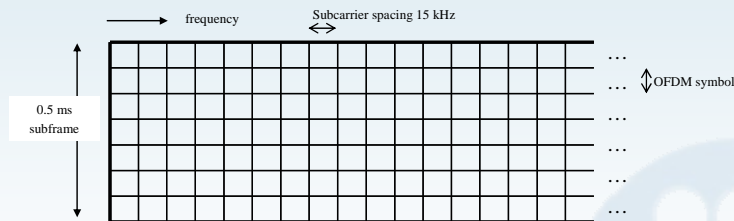
### Ejemplo: Esquema de multiplexado y modulación en 3.9 G (III)

- Asignación de recursos en el enlace descendente:

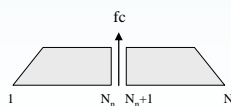


Physical resource Block =  $M$  subportadoras ×  $N$  símbolos OFDM consecutivos

$M = 25$ ,  $N =$  número de símbolos OFDM en una sub-trama ( $N=6$  or  $7$ )



Mapeado de las  $N$  sub-portadoras



Bandwidth (MHz)	1.25	2.5	5.0	10.0	15.0	20.0
N (# subcarriers)	75	150	300	600	900	1200
Physical resource block bandwidth (kHz) (25x1.5 kHz)	375	375	375	375	375	375
Number of available physical resource blocks	3	6	12	24	36	48

10/11/2006

COM II

T5-E18