Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona — UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA — **Dept. Teoria del Senyal i Comunicacions**	**ComII.** 2008-01-15
Profesores: M.Cabrera, J. Fernández Rubio, J. Riba	

Ejercicio 2

Dos usuarios deben compartir un canal de ancho de banda B que presenta la siguiente respuesta en frecuencia:

$$H(f)=\begin{cases}1+\alpha & \text{para } f_a \le |f| < f_a + B/2 \\ 1-\alpha & \text{para } f_a + B/2 \le |f| < f_a + B\end{cases} \quad \text{con } -1/2 \le \alpha \le 1/2$$

Observe que para $\alpha = 0$ el canal es ideal, y para $\alpha \neq 0$ (que puede ser tanto positiva como negativa) el canal presenta una banda desfavorecida. El valor de α no es conocido de antemano, con lo que no es posible saber cuál es la banda más desfavorecida.

Cada usuario transmite las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente, y la señal recibida es:

$$y(t) = \left(x_1(t) + x_2(t)\right) * h(t) + w(t)$$

donde $w(t)$ es ruido AWGN de densidad espectral de potencia $N_0/2$. Los dos usuarios presentan la misma E_b/N_0, y todas las probabilidades de error a calcular en este problema deben quedar expresadas en función de esta E_b/N_0.

Suponga primero que los dos usuarios acceden al canal por división en frecuencia (FDMA):

Usuario 1: $x_1(t) = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_1(k)\,p(t-kT)\cos\left(2\pi f_o t\right)$ $\qquad f_o = f_a + B/4$

Usuario 2: $x_2(t) = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_2(k)\,p(t-kT)\cos\left(2\pi f_1 t + \theta\right)$ $\qquad f_1 = f_a + 3B/4$

La frecuencia f_o es un múltiplo entero de la velocidad de símbolo. $f_o = \frac{N}{T}; N >> 1$

Los símbolos son binarios (± 1), independientes y equiprobables, $p(t)$ es un pulso de Nyquist ($p(t) = \sin\left(\pi t/T\right)/\left(\pi t/T\right)$ y $T = 2/B$. La fase θ es constante y conocida en recepción.

Se pide:

a) Halle el espectro de cada usuario y el espectro de la señal recibida.

Solución Abreviada:

Al ser $f_o = \frac{N}{T}$, entonces $f_o = \frac{N+1}{T}$, con lo que podemos expresar:

$$x_1(t) = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_1(k)\,p_1(t-kT)$$

$$x_2(t) = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_2(k)\,p_2(t-kT)$$

con

$$p_1(t) = p(t)\cos\left(2\pi f_o t\right)$$

$$p_2(t) = p(t)\cos\left(2\pi f_1 t + \theta\right)$$

El espectro de cada PAM con símbolos independientes y de media cero viene determinado por el módulo al cuadrado de la trasformada de Fourier del pulso conformador, es decir (*en los espectros se indica únicamente la parte positiva del espectro, dado que corresponden a señales reales se debe entender que presentan simetría respecto a frecuencia igual a cero*):

$$S_{x_1}(f) = \frac{A^2}{T}\left|P_1(f)\right|^2 = A^2 T\,\Pi\left(\frac{f-f_o}{B/2}\right)$$

$$S_{x_1}(f) = \frac{A^2}{T}\left|P_2(f)\right|^2 = A^2 T\,\Pi\left(\frac{f-f_1}{B/2}\right)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que el ruido es incorrelado con las señales y que cada usuario ocupa cada una de las bandas de respuesta plana del canal (de ganancia en potencia $(1+\alpha)^2$ y $(1-\alpha)^2$, respectivamente), el espectro de la señal recibida es:

$$S_y(f) = A^2 T\left((1+\alpha)^2\,\Pi\left(\frac{f-f_o}{B/2}\right) + (1-\alpha)^2\,\Pi\left(\frac{f-f_1}{B/2}\right)\right) + \frac{N_o}{2}$$

b) Diseñe el receptor óptimo para cada usuario y halle la probabilidad de error del usuario más desvaforecido en función de un valor genérico de α.

<u>Solución Abreviada:</u>

El receptor óptimo consiste en dos filtros adaptados a $p_1(t)$ y a $p_2(t)$, ambos muestreados al tiempo de símbolo. La MAI es nula puesto que los espectros no se solapan en frecuencia. Por lo tanto, cada usuario tiene asociada una constelación binaria de dimensión 1 y centroide nulo, con lo que la probabilidad de error en presencia de canal ideal sería:

$$BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

e igual para cada usuario.

El canal más desfavorecido presenta una atenuación en potencia de $\left(1-|\alpha|\right)^2$, con lo que la BER del usuario más desfavorecido es:

$$BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}\left(1-|\alpha|\right)^2}\right)$$

El sistema de acceso FDMA es injusto en el sentido de que da lugar a usuarios más desfavorecidos que otros. Como alternativa se propone el acceso multi portadora por división en código (MC-CDMA) con el que cada usuario transmite según el siguiente formato:

Usuario 1: $x_1(t)=\frac{A}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_1(k)\,p(t-kT)\left[\cos\left(2\pi f_o t\right)+\cos\left(2\pi f_1 t\right)\right]$

Usuario 2: $x_2(t)=\frac{A}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_2(k)\,p(t-kT)\left[\cos\left(2\pi f_0 t+\theta\right)-\cos\left(2\pi f_1 t+\theta\right)\right]$

Con frecuencias f_o y f_1 iguales que las empleadas en el sistema FDMA, y el mismo valor de θ.

Se pide:

c) Halle el espectro de cada usuario y el espectro de la señal recibida.

Suponga por el momento que es posible obtener un sincronismo perfecto de fase entre usuarios que garantice que $\theta=\pi/2$.

Solución Abreviada:

Las señales pueden expresarse como:

$$x_1(t)=\frac{A}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_1(k)\,p_1^{'}(t-kT)\,; \qquad x_2(t)=\frac{A}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_2(k)\,p_2^{'}(t-kT)$$

con:

$$p_1^{'}(t)=p(t)\cos\left(2\pi f_o t\right)+p(t)\cos\left(2\pi f_1 t\right)$$
$$p_2^{'}(t)=p(t)\cos\left(2\pi f_o t+\theta\right)-p(t)\cos\left(2\pi f_1 t+\theta\right)$$

Para hallar el espectro, sólo hay que hallar el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de estos dos pulsos. Como que los términos $p(t)\cos\left(2\pi f_o t\right)$ y $p(t)\cos\left(2\pi f_1 t+\theta\right)$ no solapan en frecuencia (como se ha visto en el caso FDMA), el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier es igual a la suma de los módulos al cuadrado de los pulsos usados en FDMA, con lo que:

$$S_{x_1}(f)=\frac{A^2}{T}\left|P_1^{'}(f)\right|^2=\frac{A^2T}{2}\left(\Pi^2\left(\frac{f-f_o}{B/2}\right)+\Pi^2\left(\frac{f-f_1}{B/2}\right)\right)=\frac{A^2T}{2}\Pi\left(\frac{f-\frac{f_o+f_1}{2}}{B}\right)$$

$$S_{x_2}(f)=\frac{A^2}{T}\left|P_2^{'}(f)\right|^2=\frac{A^2T}{2}\left(\Pi^2\left(\frac{f-f_o}{B/2}\right)+\left|-\Pi\left(\frac{f-f_1}{B/2}\right)\right|^2\right)=\frac{A^2T}{2}\Pi\left(\frac{f-\frac{f_o+f_1}{2}}{B}\right)=S_{x_1}(f)$$

Observe que el término de fase del usuario 2 no tiene ningún impacto sobre el espectro (afecta sólo a la transformada de Fourier del pulso, pero no a su módulo al cuadrado). Asimismo, el cambio de signo en el término $p(t)\cos\left(2\pi f_1 t+\theta\right)$ del segundo usuario, no afecta al espectro, por las mismas razones.

Los espectros de cada usuario son por tanto iguales, y ocupan todo el ancho de banda del canal. Al sumar los espectros de cada usuario, obetenemos un espectro plano en toda la banda del cana, tal como ocurre en FDMA. Por tanto, el espectro de la señal recibida es el mismo que en el caso de FDMA:

$$S_y(f)=A^2T\left((1+\alpha)^2\Pi\left(\frac{f-f_o}{B/2}\right)+(1-\alpha)^2\Pi\left(\frac{f-f_1}{B/2}\right)\right)+\frac{N_o}{2}$$

d) Diseñe el receptor óptimo para cada usuario y halle la probabilidad de error de cada usuario obtenida con el receptor anterior en función de un valor genérico de α. Comparando el resultado con el obtenido en b), discuta las ventajas de MC-CDMA con respecto a FDMA.

Suponga por último que no se consigue sincronismo de fase perfecto y que $\theta = \pi/2 + \varepsilon$ ($|\varepsilon| < \pi/4$).

Solución Abreviada:

Si la fase es $\theta = \pi/2$, los dos usuarios son ortogonales. Esto se debe a que:

1) los pulsos $p(t)\cos(2\pi f_o t)$ y $p(t)\cos(2\pi f_o t + \pi/2)$ son ortogonales (base típica de las componentes I y Q a fo).

2) los pulsos $p(t)\cos(2\pi f_1 t)$ y $p(t)\cos(2\pi f_1 t + \pi/2)$ son ortogonales (base típica de las componentes I y Q a f1).

3) los pulsos $p(t)\cos(2\pi f_o t)$ y $p(t)\cos(2\pi f_1 t + \theta)$ son ortogonales para cualquier valor de θ puesto que no presentan solape en frecuencia.

En consecuencia, el receptor óptimo para el usuario 1 puede diseñarse prescindiendo de la presencia del usuario 2, y viceversa.

Como no es posible saber el valor de α, lo más conservador para el diseño de los receptores es suponer bandas equilibradas $\alpha = 0$. Entonces, el receptor óptimo consiste en filtros adaptados a los pulsos $p_1^{'}(t)$ y a $p_2^{'}(t)$, ambos muestreados al tiempo de símbolo. La MAI es nula por las razones explicadas antes. A la salida del filtro adaptado al usuario 1 aparece el producto escalar del pulso recibido $p_1^{'}(t)*h(t)$ y el filtro adaptado $p_1^{'}(t)$. Realizando este producto escalar en el dominio de la frecuencia resulta:

$$\int \left(p_1^{'}(t)*h(t) \right) p_1^{'}(t)dt = \int H(f)\left|P_1^{'}(f)\right|^2 df = (1+\alpha)\int \left|P_1(f)\right|^2 df + (1-\alpha)\int \left|P_2(f)\right|^2 df$$

$$= 2\int p_1^2(t)dt = \int \left|p_1^{'}(t)\right|^2 dt$$

que no depende de α.

Por lo tanto, cada usuario tiene asociada una constelación binaria de dimensión 1 y centroide nulo, con lo que la probabilidad de error es:

$$BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

e igual para cada usuario.

La ventaja de MC-CDMA con respecto a FDMA es que el canal afecta por igual a los dos usuarios (no hay usuarios más desfavorecidos que otros), y sus prestaciones son mejores que las del usuario más desfavorecido en FDMA.

e) Evalúe el efecto de la interferencia de acceso múltiple (MAI) en el receptor diseñado en el apartado anterior y discuta en especial los casos particulares de $\varepsilon = 0 \& \alpha \neq 0$ y $\varepsilon \neq 0 \& \alpha = 0$. En el caso general, evalúe una cota de la probabilidad de error de cada usuario.

Solución Abreviada:

Cuando la fase no es $\pi/2$ ocurre que:
1) los pulsos $p(t)\cos(2\pi f_o t)$ y $p(t)\cos(2\pi f_o t+\pi/2+\varepsilon)$ NO son ortogonales.
2) los pulsos $p(t)\cos(2\pi f_1 t)$ y $p(t)\cos(2\pi f_1 t+\pi/2+\varepsilon)$ NO son ortogonales.
Ambos pares de pulsos presentan el siguiente producto escalar:

$$\int p^2(t)\cos(2\pi f_o t)\,p(t)\cos(2\pi f_o t+\pi/2+\varepsilon)\,dt=\frac{1}{2}\sin(\varepsilon)\int p^2(t)dt=\sin(\varepsilon)\int\left|p_1^{'}(t)\right|^2 dt$$

Con ello, los pulsos recibidos $p_1^{'}(t)*h(t)=(1+\alpha)\,p_1^{'}(t)$ y $p_2^{'}(t)*h(t)=(1-\alpha)\,p_2^{'}(t)$ dejan de ser ortogonales, y su producto escalar vale:

$$\int p_1^{'}(t)p_2^{'}(t)dt=\int P_1^{'}(f)P_2^{'*}(f)dt=\alpha\sin(\varepsilon)\int\left|p_1^{'}(t)\right|^2 dt$$

Visto esto, el efecto de la MAI puede expresarse como un canal multiusuario caracterizado por la siguiente matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{U}}}=\begin{pmatrix}1 & \alpha\sin(\varepsilon)\\ \alpha\sin(\varepsilon) & 1\end{pmatrix}$$

Tanto para $\alpha=0$ como para $\varepsilon=0$ puede verse como la MAI es nula. En el caso general, basta analizar la MAI que afecta al usuario 1 (al usuario 2 la MAI le afecta de un modo similar), y puede obtenerse una cota de la BER simplemente evaluando el impacto de la MAI como una reducción de la distancia al umbral en un factor $1-|\alpha\sin(\varepsilon)|$, con lo cual:

$$BER\le Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}\left(1-|\alpha\sin(\varepsilon)|\right)^2}\right)$$

f) Diseñe un receptor multiusuario decorrelador que cancele la MAI y calcule la probabilidad de error obtenida. Demuestre que en el peor de los casos (de canal y sincronismo de fase) se obtiene una pérdida equivalente de 0.58 dB de señal en cada usuario.

Solución Abreviada:

El decorrelador simplemente multiplica el vector a la salida de los filtros adaptados por la inversa de la matriz $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ asociada al canal multiusuario. Analizando el ruido presente en cualquiera de las ramas (siguiendo los mismos pasos que la demostración hecha en clase, resulta):

$$BER\le Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_o}\left(1-\alpha^2\sin^2(\varepsilon)\right)}\right)$$

El caso peor se corresponde con $\alpha=1/2$ y $\varepsilon=\pi/4$. En este caso, la pérdida equivalente de potencia de señal es:

$$-10\log\left(1-\alpha^2\sin^2(\varepsilon)\right)=-10\log\left(1-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)=-10\log(7/8)=0.58dB$$