Practicas
Cuestiones de Utilidad

M. Cabrera, J. Vidal
Dept. TSC
ETSETB
UPC
Febrero-Mayo 2007

Matriz de Permutación

Es Cuadrada

- Cada fila tiene todos los elementos igual a cero menos un único elemento igual a 1.

- Cada columna tiene todos los elementos igual a cero menos un único elemento igual a 1.

Ejemplo:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Coincide con su inversa

$$\mathbf{PP} = \mathbf{I}$$

- Permutación de filas de una matriz

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$$

Donde v_i es un vector fila de 4 elementos

- Permutación de columnas de una matriz

Donde v_i es un vector columna de 4 elementos

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$$

Svd y matriz pseudoinversa

Cualquier matriz de orden MxN admite la descomposición en valores singulares.

$$svd(\mathbf{A}):\ \mathbf{A}_{\mathrm{MxN}} = \mathbf{U}_{\mathrm{MxM}}\sqrt{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{MxN}}\mathbf{V^H}_{\mathrm{NxN}};\quad \mathbf{U^H U} = \mathbf{I}_{\mathrm{MxM}};\quad \mathbf{V^H V} = \mathbf{I}_{\mathrm{NxN}}$$

$$\sqrt{\mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & : & : \\ 0 & : & : & : \\ : & : & d_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{d<=\min(M,N)}$$

Valores Singulares de A

- Las columnas de U son los autovectores de la matriz AA^T
- Las columnas de V son los autovectores de la matriz A^TA

$$eig(\mathbf{AA^T}):\ \mathbf{AA^T} = \mathbf{U\Lambda U^H};\quad eig(\mathbf{A^T A}):\ \mathbf{V^T V} = \mathbf{V\Lambda V^H};$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} (d_1)^2 & 0 & : \\ 0 & : & : \\ : & : & (d_d)^2 \end{pmatrix}$$

- Si A es diagonalizable su descomposición svd coincide con su diagonalización:

$$svd(\mathbf{A}) = eig(A)\ \Rightarrow \mathbf{A}_{\mathrm{NxN}} = \mathbf{U}_{\mathrm{NxN}}\sqrt{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{NxN}}\mathbf{U^H}_{\mathrm{NxN}};\quad \mathbf{U^H U} = \mathbf{I}_{\mathrm{NxN}}$$

Matriz pseudoinversa

- A es una matriz de orden MxN
- La matriz pseudo inversa de A es de orden NxM $\mathbf{A}^{\#} = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$,

y posee las siguientes propiedades:

$\mathbf{A}^{\#}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$

$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{\#} = \mathbf{P_A}$ (Matriz de proyección)

$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{\#}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$

$\mathbf{A}^{\#}\,\mathbf{A}\mathbf{A}^{\#} = \mathbf{A}^{\#}$

- Cuando la matriz $(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}$ no se puede invertir la matriz pseudoinversa se puede calcular igualmente a partir de la descomposición svd de la matriz **A**

$$\mathbf{A}^{\#} = pinv(\mathbf{A}) = \mathbf{V}\sqrt{\mathbf{\Lambda}^{-1}}\mathbf{U}^{\mathbf{H}}$$

$$\sqrt{\mathbf{\Lambda}^{-1}} = \begin{pmatrix} (d_1)^{-1} & 0 & : \\ 0 & : & : \\ : & : & (d_d)^{-1} \end{pmatrix}$$

Inversa de los Valores Singulares de A

Matriz Cuadrada

- El rango de la matriz coincide con el número de valores singulares no nulos.

- Cuando la matriz es de rango=N (no singular) teóricamente admite matriz inversa y la matriz inversa coincide con la matriz pseudoinversa.

- Mediante el número de condición de la matriz se puede estimar la precisión y error de clálculo que se comete al invertir una matriz.

$$eig(\mathbf{C}): \quad \mathbf{C} = \mathbf{U\Lambda U^H}; \qquad cond(\mathbf{C}) = \frac{|d_{\max}|}{|d_{\min}|}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & : \\ 0 & : & : \\ : & : & d_d \end{pmatrix}$$