

## Sistemas Electrónicos de Control - 0910a

### Tema 3: Ejercicios adicionales (completos)

Para recuperar entregas o para subir nota  
 Escoger sólo 1 de cada apartado  
 Fecha límite de entrega: Día del Examen Final

### Contenido

1. Especificaciones .....	1
2. Métodos empíricos .....	4
3. Métodos gráficos .....	6
4. Métodos de estado .....	12
5. Control robusto .....	15
6. Dos grados de libertad .....	18
7. Control óptimo .....	26

### 1. Especificaciones

**📖📖 Ejercicio 1. 1. Construcción de  $M(s)$ . Guías.** Se trata de construir/sintetizar una función de transferencia  $M(s)$  cuya respuesta indicial presente aproximadamente las siguientes características (especificaciones):

- (a) De estabilidad:  $R_{pt} \approx 5\%$ .
- (b) De precisión: error permanente nulo a una entrada en escalón y, además, una  $k_v \approx 100$
- (c) De velocidad de respuesta:  $t_r \approx 0.1$ .
- (d) De realizabilidad: exceso de polos sobre ceros igual a 2.

Se pide: Construir/sintetizar dicha  $M(s)$  a partir del correspondiente bloque dominante de segundo orden. (Recuérdese que los ceros también influyen en la forma del transitorio a través de los residuos.)

**📖 Ejercicio 1. 2. Especificaciones.** Si  $S_r = 1$  (caso del sistema óptimo  $LQR$ ), estimar MG y MF.

**📖 Ejercicio 1. 3. Loopshaping. Traducción de las especificaciones del servo a la forma de  $L(j\omega)$ .** En el marco del control, el enfoque directo (selección de polos y ceros de  $M(s)$ ) va dirigido a construir la función deseable del servo  $M(s)$  para que este satisfaga unas determinadas especificaciones, en general temporales. Aquí vamos a cambiar el enfoque en dos aspectos: **1)** En vez de  $M(s)$  construiremos  $L(s)$ , **2)** En vez de hablar de polos y ceros lo haremos de ganancias del lazo  $|L(j\omega)|$ . Este es el enfoque clásico de Bode y Horowitz que hoy, con el renovado interés por los métodos frecuenciales, retorna con fuerza en los sistemas  $MIMO$  y en

control robusto a través del análisis vía valores singulares. En concreto, se trata de determinar las características del lazo  $|L(j\omega)|$  para que un determinado servo satisfaga las siguientes especificaciones:

- (a) Precisión: - error permanente nulo a una entrada en escalón.  
- error permanente inferior a 0.002 a una entrada en rampa.  
- atenuación máx. de 0.02 para las frecuencias situadas en la banda de 0 a 1 rad.
- (b) Velocidad:  $\omega_b \approx 2$ .
- (c) Estabilidad: MF positivo.
- (d) Rechazo al ruido: Atenuación mínima de 0.01 para las frecuencias superiores a 1000 rad/s
- (e) Planta: Presenta un exceso de  $P - Z = 2$ .

**Estudio Previo:**

- 1) Dibujar en el diagrama de Bode las zonas de bajas y altas frecuencias por donde no puede pasar  $|L(j\omega)|$ .
- 2) Dibujar posibles asíntotas de bajas frecuencias (precisión estática), altas frecuencias (filtrado del ruido de los sensores) e intermedias (recordando que la fase asociada no debe alcanzar los -180°).
- 3) Unir estas asíntotas mediante otras asíntotas de pendientes adecuadas.
- 4) Formular la expresión de  $L(s)$  así determinada.
- 5) Comprobar  $k_p$ ,  $k_v$ , MF (dibujar la curva de fase) y  $\omega_b$  (con ayuda del ábaco de Nichols).

**Simulación:**

- 1) Hallar  $|M(j\omega)|$  y comprobar  $\omega_b$ , la atenuación en la gama de 0 a 1 y de  $\omega > 1000$ .
- 2) Hallar la respuesta indicial y a la rampa y comprobar la precisión del resultado.

**Ejercicio 1. 4. Sistema de orden  $n$ .** Con los mismos datos que el **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, se pide:

- 1) Sin tener en cuenta la planta, construir la  $M(s)$  por los siguientes métodos:
  - 1.1) Usando una forma prototipo de orden  $n$  (polinomios *ITAE*) de las tablas.
  - 1.2) Minimizando el *ISE*. En este caso, al no dar tablas, se trata de obtener numéricamente

(MATLAB) el valor óptimo de los coeficientes de  $M_2(s) = \frac{1}{s^2 + a_1s + 1}$ ,

$M_3(s) = \frac{1}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + 1}$ . Comprobarlo teóricamente (Parseval).

- 2) Teniendo en cuenta la planta, construir una  $M(s)$  óptima (criterio *ISE* con penalización de control) con ayuda del lugar cuadrático/simétrico de las raíces suponiendo  $G_p(s) = \frac{10}{s(s+10)}$ ,

$\rho = 1$  y  $G_p(s) = \frac{20}{(s+2)(s+6)}$ ,  $\rho = 0.1$ .

- 3) Comprobar por simulación los resultados anteriores y, guiados interactivamente por los resultados, acabar de ajustar los parámetros de cada uno de ellos para alcanzar las especificaciones exigidas. □

**Ejercicio 1. 5. Polos y ceros adicionales.** Se desea ajustar aproximadamente una  $M(s)$  para que presente una respuesta caracterizada por las siguientes especificaciones: (a)  $R_{pt} = 15\%$ , (b)  $\omega_b = 40$ , (c)  $M(0) = 1$  y (d)  $k_v = 60$ .

Se pide:

- 1) Tratar de lograrlo con la forma  $M(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ .

(Nota: Obsérvese la dificultad de ajustar las especificaciones con sólo tres parámetros)

2) En caso de que  $k_v$  resulte insuficiente, mejorarla

2.1) Añadiendo un prefiltro con un cero.

2.2) Añadiendo un prefiltro con un dipolo.

3) Comparar ambas síntesis/formulaciones con la de segundo orden estricta.  $\square$

**Ejercicio 1. 6. Waterbed effect.** Si un servo presenta un lazo con un exceso de polos sobre ceros ( $P-Z \geq 2$ ) demostrar que  $\|S\|_\infty > 1$ . (**Nota:** Demostrar previamente que  $\int_0^\infty \ln|1 + L(j\omega)| d\omega = 0$  a partir de los teoremas de Bode).  $\square$

## 2. Métodos empíricos

**Ejercicio 2.1. Compensación anti-reset windup.** Se trata de comprobar el efecto de la saturación de la válvula asociada a un regulador con acción integral (*reset windup*) y su compensación con un lazo auxiliar no lineal (*anti-reset windup*).

Datos:

$$K_p = 1$$

$$K_I = 1$$

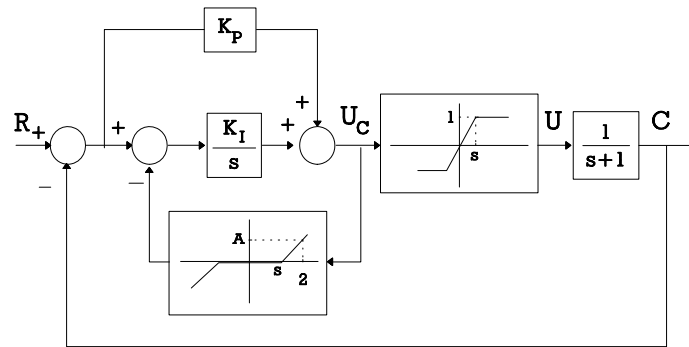


Figura 1

0) Compensación antireset-windup. Reflexionar sobre el problema de la saturación de la válvula (con *PI*) y trazar la evolución de  $u_c(t)$ .

1) Compensación antireset-windup. Hallar la respuesta indicial  $c(t)$  a un escalón de  $r(t)$  y representar, además, la evolución de las señales de control  $u(t)$  y  $u_c(t)$ . Seguir los siguientes pasos:

1.1) Sistema simple sin saturación ni compensación: Tomar  $K_I = 4$ . Hacer  $s = 10$  y  $A = 0$  (esto equivale a eliminar la aparición de la saturación y de la necesidad del compensador).

1.2) Introducir el efecto de saturación tomando  $s = 1.1$ . Observar el comportamiento de la salida y las señales  $u$  y  $u_c$ .

1.3) Añadir el control con zona muerta poniendo  $A = 1$  y  $s = 1.1$ . Observar la salida y las señales  $u$  y  $u_c$ . ¿Qué diferencias hay respecto al caso anterior?

**Ejercicio 2.2. Control de procesos con retardos. El predictor de Smith.** Se trata de estudiar el efecto de los retardos puros, asociados al transporte de materia o al carácter distribuido del sistema, sobre la estabilidad del sistema y como se pueden extrapolar las técnicas de configuración clásicas (sin retardos) al caso en cuestión

Datos:

Planta:  $G_p(s) = \frac{1}{s+1}$  y retardo puro:  $T_0 = 2$

Regulador *PI*:  $G_c(s) = 0.4 \left( 1 + \frac{1}{0.4s} \right)$

(Calculado para la planta hipotética  $G_p(s)$ )

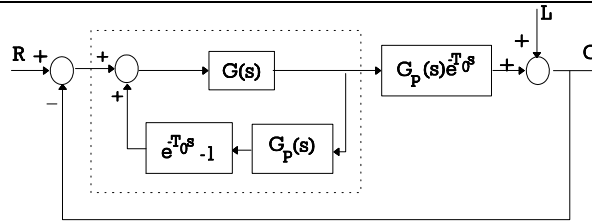


Figura 2

Se pide estimar la respuesta a una señal de mando  $r(t) = u(t)$  y a una perturbación  $L(t) = u(t - 20)$ , en el supuesto de:

- 1)  $T_0 = 1$  y sin predictor
  - 2)  $T_0 = 2$  y sin predictor
  - 3)  $T_0 = 2$  con predictor
- (Nota: Aquí  $u(t)$  simboliza la función escalón unitario)
- 4) Hallar las respuestas especificadas

**Ejercicio 2. 3. Efecto de los algoritmos P, PI, PD y PID sobre el transitorio y permanente de un servo.** Se trata de elegir un  $G_c(s)$  adecuado para insertarlo en serie con la planta

$G(s) = \frac{4500}{s(s + 300)}$  según el esquema de la Figura 3.

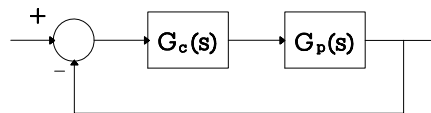


Figura 3

Para ello se pretende estudiar sus efectos sobre las características de la respuesta valiéndonos del ordenador. □

Simulación:

Estudiar su comportamiento con los siguientes algoritmos de control:

- 1) Control P con  $k_c = 182$ . Determinar  $t_p$ ,  $R_{pt}$  y el error permanente a una entrada en rampa  $e_r(\infty)$ .
- 2) Control PD (para estabilizarlo más) con  $G_c(s) = 182(1 + 0.002s)$ . Determinar  $t_p$ ,  $R_{pt}$  y  $e_r(\infty)$ .
- 3) Control PI (para reducir a cero el error de velocidad) con  $G_c(s) = 182\left(0.075 + \frac{0.11}{s}\right)$ .  
Determinar  $t_p$ ,  $R_{pt}$  y  $e_r(\infty)$ .
- 4) Control PID (para mejorar el transitorio anterior) con  $G_c(s) = 182\left(0.31 + \frac{4.5}{s} + 0.0006s\right)$ .  
Determinar  $t_p$ ,  $R_{pt}$  y  $e_r(\infty)$ .
- 5) Comprobar que el efecto del polo adicional (realizabilidad) de los reguladores prácticos no afectan esencialmente el transitorio si  $n \geq 10$ . ■

### 3. Métodos gráficos

**Ejercicio 3.1. Compensación tacométrica (en paralelo). Lazo auxiliar.** Se trata de calcular los parámetros del compensador tacométrico (compensación en paralelo o control con lazo auxiliar) de la Figura 4.

Las especificaciones son  $k_v = 10$  y  $m_\phi = 35^\circ$ . La corrección se realiza en paralelo con un tacómetro y un filtro *quasi* derivador que evita las altas frecuencias/ruido de forma que la transmitancia total del compensador es  $H(s) = s \frac{T_s}{1 + T_s} k_T$ .

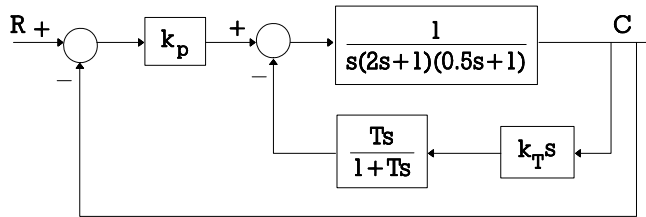


Figura 4

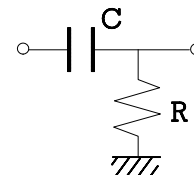


Figura 5

- 1) Fijar  $k_p$  para satisfacer la precisión.
- 2) Obtener, con la ayuda de un diagrama de Bode, unos valores adecuados para  $k_T$  y  $T$  ( $RC$ ).

**Simulación:**

- 1) Representar en un diagrama de Bode la respuesta frecuencial del lazo principal.
- 2) Representar la respuesta indicial del sistema.

**Ejercicio 3.2. Servomecanismo de posición con lazo interior tacométrico.** El modelo de un determinado servomecanismo es el siguiente:

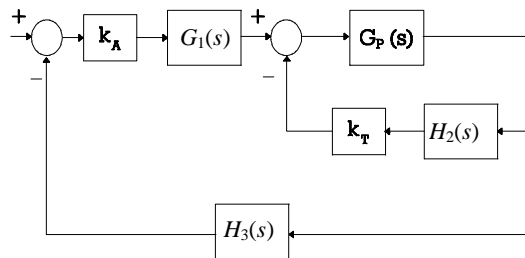


Figura 6

donde

$$k_A = 9 \times 10^4 k_1$$

$$G_1(s) = \frac{(s+5)(s+30)}{(s+20)(s+285)}$$

$$G_p(s) = 12 \frac{s(s+50)(s+26)(s^2+15s+10^6)}{(s+300)(s^2+176s+300^2)}$$

$$H_2(s) = \frac{(s+26)}{(s+0.1)(s+20)(s+285)}$$

$$k_T = 12k_2$$

$$H_3(s) = \frac{0.07}{s^2}$$

Se trata de estudiar su comportamiento y elegir adecuadamente  $k_T$  y  $k_A$  para un correcto funcionamiento. Para ello se analiza y ajusta el lazo interior (vía Bode, Nichols, Evans y Nyquist) y luego el lazo exterior, comparando los efectos de los distintos diseños. Se pide:

1) Lazo interior:

1.1) Trazar el lugar de las raíces correspondiente a la evolución de los polos del lazo interior al variar  $k_2$ . Determinar el valor límite y la frecuencia de oscilación.

1.2) Trazar los diagramas de Bode del lazo interior  $L_1(j\omega)$  con  $k_2 = 1$  y estudiar la estabilidad.

1.3) Trazar el diagrama polar de  $L_1(j\omega)$  con  $k_2 = 1$  y comprobar la estabilidad con el criterio de Nyquist.

1.4) Hallar, con ayuda del ábaco de Nichols, la respuesta en frecuencia del lazo menor

$$M_1(s) = \frac{G_p(s)}{1 + k_T G_p(s) H_1(s)}$$

y representarla en coordenadas de Bode (*log-log*) con  $k_2 = 0.1$ .

2) Lazo externo o principal:

2.1) Trazar el diagrama de Bode del lazo principal (usando las curvas de  $M_1(j\omega)$  halladas) para los casos  $k_1 = 1$  y  $k_1 = 0.1$ . Estudiar la estabilidad.

2.2) Con ayuda de Nichols hallar el diagrama de Bode de  $M(j\omega)$  para  $k_1 = 0.1$ .

**Simulación:**

1) Lazo interno:

1.1) Representar el lugar geométrico de las raíces de Evans (para  $k_2$  variable). Hallar  $k_1$ , crítico y  $\omega$ .

1.2) Representar el diagrama de Bode para  $k_2 = 1$ .

1.3) Representar el diagrama en polares para  $k_2 = 1$ .

1.4) Representar el diagrama de Bode de  $M_1(j\omega)$  con  $k_2 = 0.1$ .

1.5) Hallar y representar los polos y ceros de  $M_1(s)$ .

2) Lazo externo:

2.1) Representar el lugar geométrico de las raíces de Evans (para  $k_1$  variable). Hallar  $k_1$ , crítico y  $\omega$ .

2.2) Trazar el diagrama de Bode del lazo principal (para  $k_1 = 0.05; 0.063; 0.1; 0.15$ ). Para  $k_1=0.15$  pasarlo a  $A-\phi$  (amplitud-fase) y determinar  $\omega_r$  y el valor de la resonancia.

2.3) Trazar el diagrama de Bode de  $M(j\omega)$  principal (para  $k_1 = 0.05; 0.063; 0.1; 0.15$ ).

2.4) SIMULINK: Representar la respuesta indicial para los valores de  $k_1$  indicados. ■

**Ejercicio 3.3. Pseudoderivada.** Debido a que cualquier circuito derivador (o su equivalente numérico) es muy sensible al ruido (inevitable), en la práctica no se usan los derivadores puros

$G_c(s) = T_d s$  sino una versión más realista  $G_c(s) = \frac{T_d s}{1 + T_p s}$  llamada pseudoderivada. Se trata de

valorar las características de esta aproximación comparando los circuitos de las Figura 7 y Figura 8.

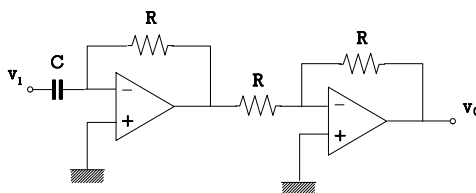


Figura 7

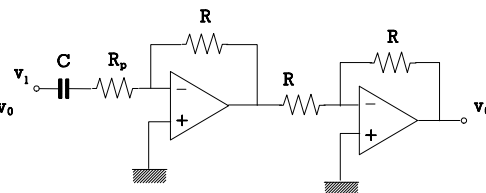


Figura 8

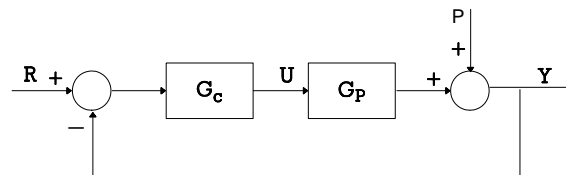
**Estudio Previo:**

- 1) Calcular la función de transferencia  $G(s) = \frac{V_0(s)}{V_1(s)}$  del circuito de la Figura 7, comprobar que es un derivador y representar su diagrama de Bode de ganancia.
- 2) Repetir el cálculo de  $G_a(s) = \frac{V_0(s)}{V_1(s)}$  para el circuito de la Figura 8, comprobar que es un pseudoderivador y representar su diagrama de Bode de ganancia.
- 3) Comentar en qué condiciones podemos suponer que en primera aproximación,  $G_a(s)$  se comporta como un derivador y en qué condiciones no se ve afectado por el ruido.

**Simulación:**

- 1) En el caso derivador fijar los valores  $R = C = 1$  y excitar el circuito con las siguientes señales: escalón, rampa, senoide y ruido blanco. Comentar los resultados observados.
- 2) En el caso pseudoderivador, elegir unos valores de  $R = C = R_p = 1$  y excitarlo con las siguientes señales: escalón, rampa, senoide y ruido blanco. Comentar los resultados. ■

En los próximos Ejercicios se pretende comprobar la mejora en la dinámica de la planta  $G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+4)(s+16)}$  al ser gobernada, en lazo cerrado, mediante un controlador  $G_c(s)$  en serie (ver Figura 9).



**Figura 9**

**Ejercicio 3. 4. Bode.** Resolver el mismo problema de los Ejercicios anteriores, pero esta vez con la ayuda de los diagramas de Bode y mediante un controlador serie de avance

$G_c(s) = k_c \frac{1+n\tau s}{1+\tau s}$ ,  $n > 1$ , de manera que se satisfagan las siguientes especificaciones:

- Precisión:  $k_v = 10$
- Estabilidad relativa:  $R_{pt} = 25\%$  □

**Estudio Previo:**

- 1) Si  $G_c = k_c$ , calcular  $k_c$  para que el servo tenga una  $k_p = 20$ .
- 2) Si  $G_c = k_c$ , con ayuda de los diagramas de Bode de la función de transferencia del lazo  $L(j\omega)$ , determinar  $k_{cu}$  y  $T_u$ .
- 3) Convertir la especificación  $R_{pt} = 25\%$  en otra equivalente en forma de  $m_\phi$ .
- 4) Calcular, por el método desarrollado en clase, los parámetros  $k_c$ ,  $n$  y  $\tau$ .

**Simulación:**

- 1) Mediante compensación estática o ajuste de la ganancia ( $G_c = k_c$ ), determinar  $\omega_c$ ,  $m_G$  y  $m_\phi$  correspondientes al valor de  $k_c$  calculado en el apartado 1) del Estudio Previo.
- 2) Mediante compensación por avance ( $G_c(s) = k_c \frac{1+n\tau s}{1+\tau s}$ ;  $n > 1$ ), hallar los nuevos valores de  $\omega_c$ ,  $m_G$  y  $m_\phi$  si ahora, además de ajustar  $k_c$  al valor anterior, añadimos un filtro corrector con transmitancia  $\frac{1+0.2s}{1+0.02s}$ .



- 3) Mediante compensación por retardo  $\left( G_c(s) = k_c \frac{1+\tau s}{1+n\tau s} ; n > 1 \right)$  hallar los nuevos valores de  $\omega_c$ ,  $m_G$  y  $m_\phi$  si ahora, además de ajustar  $k_c$  al valor del apartado 1) añadimos un filtro corrector con función de transferencia  $\frac{1+2s}{1+20s}$ .
- 4) Mediante compensación por retardo y avance  $\left( G_c(s) = k_c \frac{1+\tau_1 s}{1+n_1\tau_1 s} \frac{1+n_2\tau_2 s}{1+\tau_2 s} ; n_1, n_2 > 1 \right)$ , hallar los nuevos valores de  $\omega_c$ ,  $m_G$  y  $m_\phi$  si ahora, además de ajustar  $k_c$ , al valor del apartado 1), añadimos un filtro corrector con función de transferencia  $\frac{1+2s}{1+20s} \frac{1+0.2s}{1+0.02s}$ .
- 5) Comparar las respuestas a perturbaciones en escalón de los sistemas de los apartados 1), 2), 3) y 4).
- 6) Tanteando, hallar un nuevo corrector de retardo que consiga el mismo  $m_\phi$  que el de avance del apartado 2). Hallar la respuesta indicial (de la consigna) y comprobar su  $R_{pt}$ . (En caso de no satisfacer los requisitos, retocar los parámetros)
- 7) Tanteando, hallar un nuevo corrector de retardo-avance que alcanzando el mismo  $m_\phi$  que el de avance (apartado 2)) retenga la  $\omega_c$  obtenida con el sólo ajuste de la ganancia (apartado 1)). ■

**Ejercicio 3. 5. Ábaco de Nichols.** Resolver el mismo problema del ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia., pero esta vez con la ayuda del ábaco de Nichols.

□

**Estudio Previo:**

- 1) Estimar, por el método desarrollado en clase, los parámetros  $k_c$ ,  $n$  y  $\tau$  (¿Qué inconveniente tiene este método con relación al de Bode?)
- 2) Dibujar en el plano fase-ganancia la respuesta frecuencial de  $L(s)$  con la  $k_c$  calculada en el apartado 1) del estudio previo del ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..
- 3) Estimar  $\omega_b$  y  $t_r$ .
- 4) En el caso de que pudiéramos disponer de un corrector ideal de avance (es decir, sin que modificase la ganancia), determinar con ayuda del ábaco de Nichols el avance de fase necesario para producir una resonancia de  $M_r = 2 \text{ dB}$ .

**Simulación:**

- 1) Dibujar en el plano fase-ganancia la respuesta frecuencial del lazo  $L(j\omega)$ , antes y después de la compensación, determinando la variación de  $m_\phi$ ,  $m_G$ ,  $\omega_c$ ,  $\omega_b$ ,  $\omega_r$  y  $M_r$ . Estimar la  $\omega_n$  del servo.
- 2) Hallar la respuesta indicial y determinar  $R_{pt}$  y  $t_r$ . Hallar el *offset*,  $t_p$  y  $t_s$ . Comparar el valor de  $t_r$  con el previsto por la expresión  $\omega_b t_r \approx 3$ .
- 3) Comprobar el producto  $\omega_b t_r \approx 3$ . ■

**Ejercicio 3. 6. Evans.** Se trata de resolver el mismo problema del ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia., manteniendo la especificación de estabilidad pero cambiando la de precisión por la de velocidad (concretamente  $\omega_n = 11 \text{ rad/s}$ ) y utilizando el lugar de las raíces de Evans.

□

**Estudio Previo:**

- 1) Convertir la especificación de  $R_{pt} = 25\%$  en el correspondiente coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  y, junto con  $\omega_n$ , fijar la situación de los polos dominantes. Estimar el valor previsible de  $m_\phi$  ( $m_\phi \approx 100\zeta$ ).

- 2) Reformular el controlador  $G_c(s) = k_c \frac{1+n\tau s}{1+\tau s}$  en la forma  $G_c(s) = k_c' \frac{s+z}{s+p}$  (¿Por qué?).
- 3) Trazar aproximadamente el lugar de las raíces de  $1+L(s)$  correspondiente a la variación de  $G_c = k_c$ .
- 4) Determinar gráficamente la situación de un cero adicional que hiciera  $m_\phi = 45^\circ$ . Calcular, por el método desarrollado en clase,  $k_c'$ ,  $z$  y  $p$  y, a partir de ellos,  $k_c$ ,  $n$  y  $\tau$ .
- 5) Calcular la  $k_v$  que se obtiene de esta manera.
- 6) Fijando  $k_c$  para el valor calculado en los ejercicios anteriores, determinar los polos dominantes (comprobar si lo son), su coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  y hacer una estimación de  $t_r$ .

**Simulación:**

- 1) Comprobar el lugar geométrico del estudio previo y determinar las raíces para la  $k_c$  indicada.
- 2) Trazar el lugar de Evans cuando al lazo se le inserta el filtro  $\frac{1+0.2s}{1+0.02s}$ , observar el cambio que ha experimentado y determinar las nuevas raíces.
- 3) Ídem para el filtro  $\frac{1+2s}{1+20s}$ .
- 4) Ídem para el filtro  $\frac{1+2s}{1+20s} \frac{1+0.2s}{1+0.02s}$ .
- 5) Hallar las respuestas iniciales (de consigna) y comprobar  $R_{pt}$  y  $\omega_n$  (a partir de  $\omega_d$ ). ■

**Ejercicio 3. 7. Compensación en paralelo. Nyquist inverso.** Aquí, con la misma planta que venimos estudiando,  $G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+4)(s+16)}$ , en vez de la compensación en serie, se supone la configuración de la Figura 10 que consiste en una compensación tacométrica (en paralelo) además del amplificador  $k_c$  (en serie).

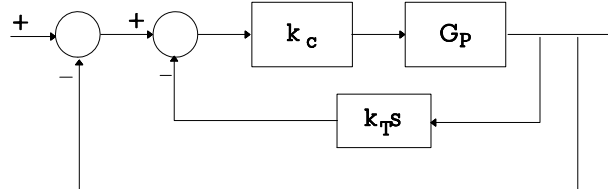


Figura 10

□


**Estudio Previo:**

- 1) Calcular  $M(s)$ . A partir de ella indicar el efecto que cada uno de los parámetros  $k_c$  y  $k_T$  tiene sobre los polos y ceros de  $M(s)$ . Fijar  $k_c$  para alcanzar la precisión exigida.
- 2) Tomando  $k_c = 1280$  y, con ayuda del lugar de Evans, determinar el valor de  $k_T$  para obtener  $\zeta = 0.7$  ( $R_{pt} = 25\%$ ). (**Nota:** Para resolver este problema hay que hacer dos lugares de raíces: uno, previo, para determinar las raíces de  $D(s)$  en la expresión  $1+k_T \frac{N(s)}{D(s)} = 0$ , y el segundo, de diseño, para fijar el valor de  $k_T$ ).
- 3) Comprobar si los polos complejos del servo son o no dominantes.
- 4) Con  $k_c = 1280$ , y con ayuda del diagrama polar inverso de  $M_1(s) = \frac{k_c G_p}{1+k_c G_p k_T s}$  y del ábaco de Hall inverso, determinar el valor de  $k_T$  para  $\zeta = 0.7$ . (Dibujar en polares la respuesta frecuencial de la transmitancia inversa del lazo interno ( $M_1^{-1}(s)$ ) y, comparándola con la correspondiente circunferencia de  $M_r$ , determinar la  $k_T$  necesaria).

**Simulación:**

- 1) Calcular las raíces del polinomio  $D(s)$  del estudio previo y compararlos con el resultado allí obtenido.
- 2) Trazar el lugar de los polos del servo  $M(s)$  con  $k_c = 1280$  y  $k_T$  variable.
- 3) Trazar el diagrama polar inverso de la transmitancia  $M_1(s)$  del lazo interno ( $k_c = 1280$  y  $k_T$  variable) y, por tanteo, variando  $k_T$ , determinar el valor de  $k_T$  para que  $M_r \approx 1.2$ . (Dibujar en polares  $M_1^{-1}(j\omega)$  y determinar  $k_T$  añadiendo verticalmente  $k_T\omega$  ( $k_T > 0$ ) hasta conseguir la tangencia en la correspondiente circunferencia del ábaco de Hall). Determinar  $\omega_r$  y comprobar que  $k_T\omega_r$  es el desplazamiento que ha experimentado la curva sin compensar en la  $\omega_{r0}$ .
- 4) Comparar ambos valores y hallar las respuestas iniciales. Verificar  $R_{pr}$ .
- 5) Dibujar la respuesta a una entrada en escalón sin el tacómetro y con el tacómetro. ■


#### 4. Métodos de estado

 **Ejercicio 4. 1. Realizaciones de una  $H(s)$ . Formas canónicas.** Dada la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} \quad H(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+4}$$

Se pide:

- 1) Obtener su realización en Forma Companion Controlable (FCC) (versión Matlab). (Matlab: tf2ss)
- 2) Obtener su realización en Forma Companion Controlable (FCC) (versión teoría). (Matlab: rot90, flipud, fliplr)
- 3) Obtener su realización en Forma Companion Controlable (FCC) a partir de la transformación de similaridad  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{T} = \mathbf{M}_c\mathbf{W}$ . (Matlab: ctrb, poly, inv)
- 4) Obtener su realización en Forma Companion Observable (FCO) a partir de la transformación de similaridad  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{T} = (\mathbf{W}\mathbf{M}_o)^{-1}$ . (Matlab: obsv, poly, inv)

 **Ejercicio 4. 2. Solución de ecuaciones de estado. ZS, ZI y matriz de transición.** Dada la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} \quad H(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+4}$$

se trata de obtener su respuesta temporal.

Se pide:

- 1) Calcular la respuesta *zero-input* tomando como condiciones iniciales (CI) a  $x_1(0) = 1$  y  $x_2(0) = 1$ . (Matlab: tf2ss, initial, ss, plot, title, xlabel)
- 2) Calcular la respuesta *zero-state* a una excitación escalón unitario. (Matlab: step, ss, plot, title, xlabel)
- 3) Calcular y representar la respuesta total (*zero-state* más *zero-input*). (Matlab: lsim, ss, plot title, xlabel)
- 4) Presentar en el plano de estado ( $x_2(x_1)$ ) la respuesta del sistema a un conjunto de condiciones iniciales (variando entre  $-1$  y  $1$ ). (Matlab: for..end, initial, ss, plot, axis, hold on hold off, title, xlabel, ylabel)

**Ejercicio 4. 3. Formas canónicas.** Dado el sistema con:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se pide:

- 1) Convertir las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  a la Forma Canónica Diagonal (**Nota:** Calcularla a través de  $\mathbf{x} = \mathbf{Mz}$ ).
- 2) Convertir las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  a la Forma Canónica Diagonal (**Nota:** Calcularla a través de la función **canon**).
- 3) Obtener la Forma Canónica Controlable de Kalman (FCCCK), separando el subsistema controlable ( $\mathbf{A}_c$ ) del no controlable ( $\mathbf{A}_{\bar{c}}$ ).

**Nota:** La transformación es  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1 \mid \mathbf{T}_2] \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$ , siendo  $\mathbf{T}_1$  una submatriz con  $n_1 < n$  columnas linealmente independientes de  $\mathbf{M}_c$  y el resto ( $\mathbf{T}_2$ ) columnas arbitrarias que no hagan singular la matriz  $\mathbf{T}$ . La función **ctrbf**  $\Rightarrow$  de matlab da como resultado  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\bar{c}} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}$ .

**Ejercicio 4.4. Análisis de estabilidad.** Dada la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$$

se trata de estudiar su estabilidad: **1)** obteniendo sus autovalores (por tratarse de un SLI), y **2)** aplicando el segundo método de Lyapunov (de gran utilidad en los sistemas no lineales).

Se pide:

- 1) Calcular los autovalores de dos de sus realizaciones y comprobar que coinciden con los polos de  $H(s)$ . (Matlab: roots, tf2ss, canon, ssdata, eig)
- 2) A partir de la matriz del sistema correspondiente a la Forma Companion Controlable, resolver la ecuación de Lyapunov ( $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{I}$ ) y determinar el signo de la forma cuadrática cuya matriz de coeficientes es  $\mathbf{P}$ , mediante el criterio de Sylvester. (Matlab: lyap, eye, det)

**Ejercicio 4.5. Controlabilidad y observabilidad. Estabilizabilidad y detectabilidad.** Dado el sistema definido por las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^t = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 0)$$

se trata de estudiar su controlabilidad (estabilizabilidad) y su observabilidad (detectabilidad).

Se pide:

- 1) Calcular la matriz de controlabilidad  $\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \mid \mathbf{A}\mathbf{b} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]$ , determinar por inspección su rango e interpretar el resultado. (Matlab: ctrb,rank)


2) Calcular la matriz de observabilidad  $\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c}' \\ \mathbf{c}'\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}'\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$ , determinar por inspección su

rango e interpretar el resultado. (Matlab: obsv, rank)

3) Hallar la Forma Canónica Diagonal e identificar los modos observables y/o controlables. (Matlab: canon)

4) A la vista del resultado anterior indicar si el sistema es estabilizable y/o detectable.

## 5. Control robusto

 **Ejercicio 5. 1. Control Robusto. Principio del modelo interno.** El hecho de que el regulador capaz de eliminar el *offset* a una entrada o a una perturbación en escalón sea el tipo *I* (integrador) y que éste sea justamente el modelo matemático del escalón, no es una casualidad. La idea puede extenderse al seguimiento asintótico de señales no transitorias (escalones, oscilaciones, rampas, exponenciales positivas, etc.) poniendo como controlador un  $G_c(s) = N_c(s) / D_c(s)$  siendo  $G_c(s)$  la transformada de Laplace de la señal que se quiera seguir (o filtrar). A dicha función de transferencia se le pueden añadir ceros adicionales para conformar el transitorio.

Para ilustrar lo antedicho vamos a controlar dos plantas:

**Planta A)**  $G_p(s) = \frac{1}{s+3}$ , de manera que no presente error permanente a entradas en escalón y, además, que su polinomio característico sea  $\alpha_c(s) = s^2 + 5s + 25$ .

**Planta B)**  $G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ , de manera que siga asintóticamente a una senoide con  $\omega = 1$  y cuyo polinomio característico sea  $\alpha_c(s) = s^2 + 5s + 25$ .

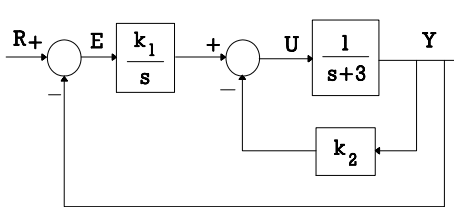


Figura 11

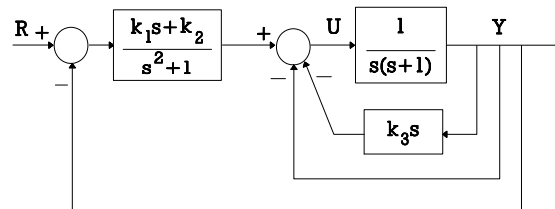


Figura 12

□

**Planta A)** Dada la estructura de la Figura 11, en la que  $k_2$  (¡retroacción de estado!) está para modificar los polos y  $\frac{k_1}{s}$  (corrector serie) para añadir precisión (ceros), se pide:

- 1) Calcular  $M(s)$  y determinar por inspección  $k_1$  y  $k_2$ .
- 2) Calcular  $\frac{E}{R}$  y comprobar que, efectivamente, presenta un cero que bloquea la señal de continua.
- 3) Con objeto de acelerar la respuesta se añade un término anticipativo  $Nr$ , de manera que:
 
$$u = k_1 \int e dt - k_2 y + Nr$$

**3.1)** Dibujar el nuevo esquema de bloques con la nueva señal  $Nr$ .

**3.2)** Repetir el dibujo en caso de que  $r$  no sea accesible pero sí lo sea  $e$  y, obviamente,  $y$ .

**3.3)** Calcular  $M(s)$  y comprobar que la señal  $Nr$  ha introducido un cero, ajustable a través del parámetro  $N$ .

**Simulación:** Dibujar la respuesta indicial en los siguientes casos

- 1)  $N = 0$
- 2)  $N = 5$
- 3)  $N = 0$ , y el polo (-3) de la planta perturbada al valor (-1)
- 4) Ídem perturbado a (-6)

**Planta B)** Considerar la estructura de la Figura 12.

- 4) Calcular  $k_3$  para modificar los polos de la planta a  $\alpha_c(s) = s^2 + 2.5s + 1$ .

5) Calcular  $M(s)$  y  $\frac{E}{R}$  y comprobar la existencia de ceros que pueden bloquear las señales sinusoidales.

Simulación: Dibujar la respuesta a  $r = 4\text{sen}(t)$  en los siguientes casos:

5)  $k_1 = k_2 = 1$

6)  $k_1 = k_2 = 5$

7)  $k_1 = 1; k_2 = 5$

8)  $k_1 = k_2 = 1$  ; si el polo (-1) ha sido perturbado y su nuevo valor es (-0.5)

9) Ídem, perturbado a (-2).

### Ejercicio 5. 2. Control robusto: Ceros de anclaje y prefiltro.

Enfoque del diseño:

1) Se elige  $G_c$  de modo que se satisfaga una adecuada sensibilidad en el intervalo de frecuencias de interés.

2) Se elige  $G_F$  de manera que se asegure una adecuada transmisión ( $M$ ).

Datos:

$$- G_p(s) = k \frac{2500}{s(s+25)}$$

-  $k$  tiene un valor nominal de 1 pero puede variar entre 0.5 y 20.

- Polos deseados:  $-12.4 \pm j9.6$

Se trata de:

1) Comprobar que un diseño convencional con un compensador de retardo  $G_c(s) = \frac{1+10s}{1+100s}$

presenta una fuerte sensibilidad (frecuencial, de los polos y temporal) a las variaciones de  $k$ .

2) Comprobar que esto puede mejorarse con un controlador robusto en serie con ceros cercanos

a los polos deseados  $G_c(s) = \frac{s^2 + 26s + 269}{269}$  y con un prefiltro (ver Figura 13) para

cancelar los ceros introducidos  $G_F(s) = \frac{269}{s^2 + 26s + 269}$ .

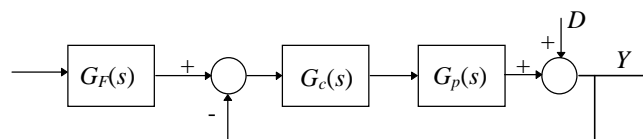


Figura 13

□

Para ello se pide:

1) Con corrector convencional (retardo):

1.1) Representar el LGR de Evans. Indicar los polos para  $k = 0.5, 1, 2$ .

1.2) Representar la respuesta indicial: Comparar los  $t_r$  (0.1% a 0.9%) para los valores indicados de  $k$ .

2) Con corrector robusto y prefiltro:

2.1) Representar el LGR de Evans. Indicar los polos para  $k = 0.5, 1, 2$ .

2.2) Representar la respuesta indicial: Comparar los  $t_r$  (0.1% a 0.9%) para los valores indicados de  $k$ .

3) Efecto de las perturbaciones:



- 3.1)** Calcular  $M_D(s) = \frac{Y(s)}{D(s)}$  (**Nota:** Obsérvese que en este caso coincide con la función de sensibilidad).
- 3.2)** Representar su módulo (Bode) en las siguientes condiciones:
- Servo sin compensar.
  - Servo con compensador de retardo.
  - Servo con compensador robusto y prefiltro.
- (¿Por qué aquí no se respeta la condición de la integral de la sensibilidad?)

## 6. Dos grados de libertad

**Ejercicio 6. 1. Feedforward. Tracking perfecto de una  $r(t)$  cuya forma de onda es conocida (continua y derivable).** El sistema ahora considerado es el de la Figura 14

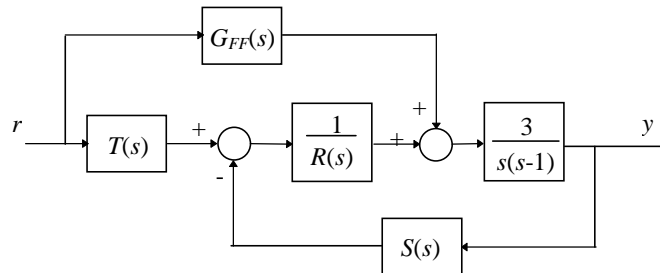


Figura 14

y se trata de que  $y(t)$  siga una señal cuyo perfil de evolución temporal es  $r(t) = 2 - t^2$ . El controlador elegido es  $T(s) = (s + 2)(s^2 + 2.4s + 2.44)$ ,  $S(s) = 4.2s + 1.63$ ,  $R(s) = s + 5.4$ ,  $G_{FF}(s) = 0.333s^2 - 0.33s + 4.2$ .

Se pide:

- 1) Calcular  $M(0)$ .
- 2) Calcular  $L(s)$

3) Comprobar que  $G_{FF}(s) \approx \frac{1}{G_p(s)}$ .

- 4) Hallar la respuesta  $y(t)$  y compararla con  $r(t)$ .

**Ejercicio 6. 2. Controlador con dos grados de libertad (2 DOF). Ajuste independiente de seguimiento y robustez mediante el procesamiento independiente de  $y(t)$  y  $r(t)$ .** Dado el servosistema de la Figura 15 se trata de conseguir que sus características de transmisión (seguimiento) correspondan a las del modelo  $M_m(s) = \frac{2.44}{s^2 + 2.4s + 2.44}$  elegido de forma que presente poco rebalse ( $\approx 3\%$ ) y un  $t_r \approx 2.5s$ . Y, por otra parte, que se puedan modificar las características de sensibilidad (lazo) sin modificar por ello la respuesta del servo.

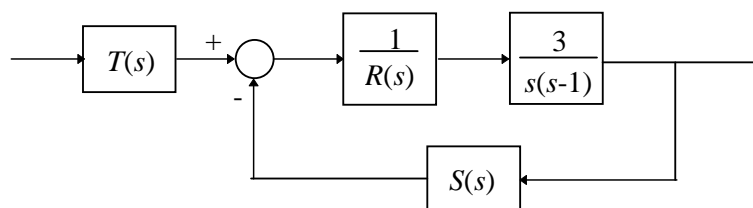


Figura 15

Para ello se eligen tres controladores:

- |                             |   |                      |   |                          |
|-----------------------------|---|----------------------|---|--------------------------|
| 1) $T_1(s) = 0.81(s + 0.2)$ | ; | $R_1(s) = s + 3.6$   | ; | $S_1(s) = 2.17s + 0.16$  |
| 2) $T_2(s) = 0.81(s + 2)$   | ; | $R_2(s) = s + 5.4$   | ; | $S_2(s) = 4.21s + 1.63$  |
| 3) $T_3(s) = 0.81(s + 20)$  | ; | $R_3(s) = s + 3.234$ | ; | $S_3(s) = 4.6s + 16.3$ □ |

Se pide:

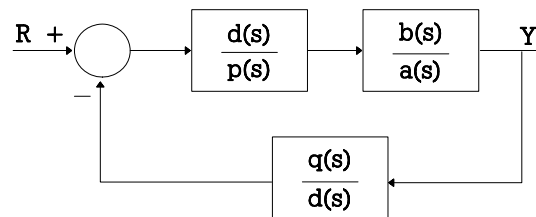
- 1) Estimar *a priori*  $t_r$  y  $R_{pt}$  de la respuesta indicial del modelo  $M_m(s)$ .

- 2) Calcular y representar a escala la respuesta indicial del modelo  $M_m(s)$ .
- 3) A partir de la gráfica determinar  $t_r$  y  $R_{pt}$ . Comparar con 1).
- 4) Hallar la expresión matemática de  $u(t)$  a partir de la de  $y(t)$ . calcular  $M(0)$  aplicando el Teorema del Valor Inicial.
- 5) Calcular y representar (Bode de amplitud)  $L(j\omega)$  para el primer caso.
- 6) Ídem para la función de sensibilidad  $S(j\omega) = \frac{1}{1 + L(j\omega)}$ .
- 7) Determinar el valor de  $\|S\|_\infty = |S(j\omega)|_{max}$  en cada caso.
- 8) ¿Asegura una estabilidad robusta frente a cambios paramétricos?

Simulación:

- 1) Representar la  $y(t)$  en los tres casos. Comprobar que es la misma.
- 2) Representar la  $u(t)$  en los tres casos. Ídem.
- 3) Representar  $|L(j\omega)|$  en una misma gráfica. Comparar.
- 4) Representar  $|S(j\omega)|$  en una misma gráfica. Comparar.
- 5) Comprobar la robustez del diseño:
  - 5.1) (MG) Comprobar que permanece estable al variar el parámetro de 3 a 5.
  - 5.2) (MF) Ídem si la planta presenta un retardo de  $e^{-0.15}$

**Ejercicio 6. 3. Métodos Polinómicos. Controlador RST.** Se trata de estabilizar la planta  $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{-1}{s^2 - 1}$  mediante los dos controladores de la configuración mostrada en la Figura 16.

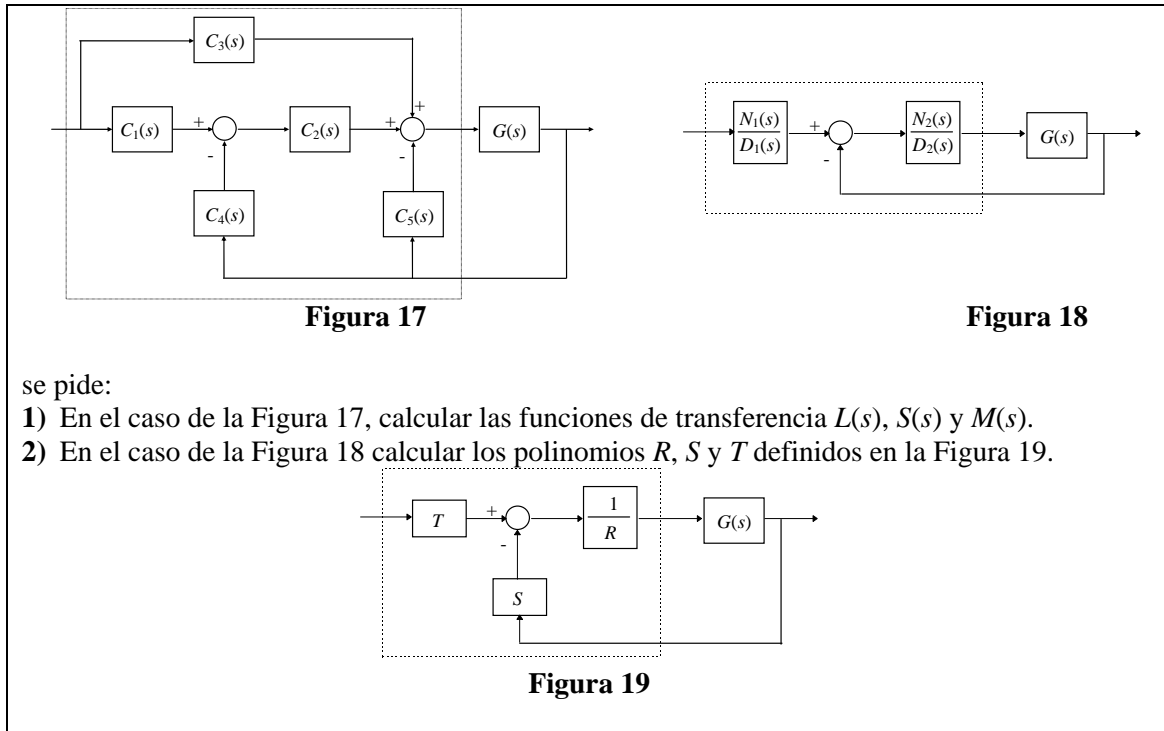


**Figura 16**

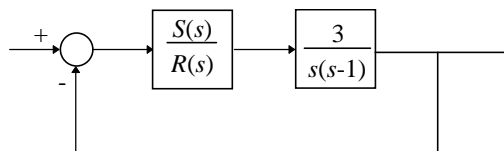
Se pide:

- 1) Hallar la expresión de  $M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ .
- 2) Hallar la solución (polinomios  $p(s)$  y  $q(s)$ ) de la ecuación diofántica obtenida al fijar el polinomio característico del servo a  $D_M(s) = \alpha_c(s) = s^2 + s + 0.5$  y siendo (por elección)  $d(s) = \alpha_o(s) = s^2 + 2s + 2$ .
- 3) Comprobar que  $M = \frac{db}{pa + bq}$  se reduce a  $M = \frac{b}{\alpha_c}$ .
- 4) Determinar la respuesta indicial y comprobar que se ha estabilizado. ■

**Ejercicio 6. 4. Controladores con dos grados de libertad.** Dados los controladores de la Figura 17 y la Figura 18.



**Ejercicio 6. 5. Diseño con un grado de libertad (1 DOF). Mantenimiento de las características del lazo y degradación de la respuesta.** El sistema ahora considerado es el de la Figura 20



**Figura 20**

tomando el controlador  $S/R$  los tres pares de valores del

Estudio Previo:

- 1) Calcular la expresión de  $L(s)$  y comprobar que es la misma
- 2) Comprobar que  $M(0)$  es en los tres casos la misma
- 3) Estimar gráficamente, a partir de la gráfica de  $y(t)$  anterior, la forma de las respuestas  $y(t)$  en los tres casos (**Nota:** Al tener un prefiltro con un cero  $(s + z)$ ,  $y_z(t) = \dot{y}(t) + zy(t)$ )
- 4) A partir de las gráficas de  $y(t)$  estimar las de  $u(t)$ . Comentar el posible problema de saturación.

Simulación:

- 1) Representar  $y(t)$  en los tres casos. Comparar con lo previsto.
- 2) Representar  $u(t)$ . Comparar. ■

**Ejercicio 6. 6. Regulador de mínima varianza.** En este caso, al ser un problema de regulación (que no de seguimiento) la solución se reduce a la simple asignación de los polos, objetivo que puede alcanzarse con sólo la parte retroactiva ( $S/R$ ). No obstante, resulta ilustrativo constatar que un problema originalmente tratado por variables de estado ( $LQG$ ) acepta también una formulación polinómica cuya solución depende de una (¡otra!) ecuación diofántica.

**Problema:** Dada una planta descrita por el modelo *ARMAX* :

$$y(n+1) - 0.8y(n) = u(n) + v(n+1) - 0.7v(n)$$

siendo  $v(n)$  una secuencia de ruido blanco gaussiano de media nula y varianza  $\sigma^2\delta(n)$ , se trata de generar una señal de control  $u(n)$  que reduzca lo más posible el efecto del ruido. Efecto que, sobre la salida, cuantificaremos mediante el criterio  $J(n) = E[y^2(n)]$ , es decir, mediante la varianza. □

Estudio Previo:

- 1) Dibujar un esquema de bloques que relacione  $u(n)$ ,  $v(n)$  y  $y(n)$ . Identificar la  $H(z)$  del filtro generador.
- 2) Razonar el término "modelo *ARMAX*".
- 3) Si la solución en este caso es (con referencia a la Figura 21)  $T = 0$ ,  $R = FB$ ,  $S = q^{-1}G$ , donde  $F$  y  $G$  se obtienen de  $C(q^{-1}) = A(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-(d+1)}G(q^{-1})$ , resolver la ecuación diofántica (por identificación de coeficientes) y determinar la  $H_c(z)$  del corrector  $\equiv \frac{U(z)}{Y(z)}$ .

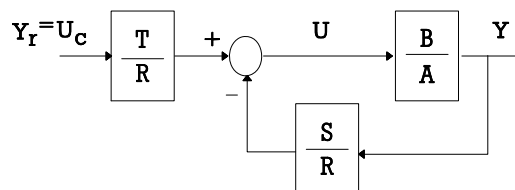


Figura 21

**Nota:** Estructura de los polinomios:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_1z^{-1} + \dots + b_nz^{-n}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + \dots + c_nz^{-n}$$

$$F(z^{-1}) = 1 + f_1z^{-1} + \dots + f_dz^{-d}$$

$$G(z^{-1}) = g_0z^{-1} + \dots + g_{n-1}z^{-(n-1)}$$

Simulación:

- 1) Obtener la respuesta, en lazo abierto, a una entrada aleatoria.
- 2) Ídem en lazo cerrado y comparar los resultados. ■

**Ejercicio 6. 7. Control anticipativo (*feedforward*) de las perturbaciones y señal de mando.** Se trata de estudiar el efecto de la acción *feedforward* (*FF*), tanto de las perturbaciones como de la señal de mando.

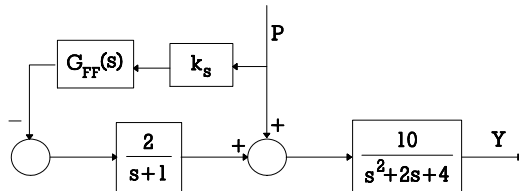


Figura 22

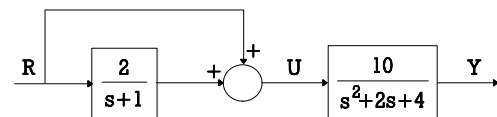


Figura 23 □

Estudio Previo:

- 1) Dibujar aproximadamente la forma de  $y(t)$  (sin *FF* en la Figura 22) cuando  $p(t)$  es un impulso unitario.

- 2) Si la sensibilidad del sensor es  $k_s = 1$ , calcular la  $G_{FF}(s)$  necesaria para reducir el efecto de la perturbación  $p(t)$ .
- 3) Dibujar aproximadamente las señales  $u(t)$  y  $y(t)$  (sin y con  $FF$  en la Figura 23) cuando  $r(t)$  es un escalón unitario.

Simulación:

- 1) Representar la respuesta a un impulso de  $p(t)$  (sistema de la Figura 22) sin y con  $FF$ .
- 2) Representar la respuesta a un escalón de  $r(t)$  (sistema de la Figura 23) sin y con  $FF$ . ■

**Ejercicio 6. 8. Retroacción condicional.** Dado el sistema de la Figura 24, con

$$G_p(s) = \frac{100}{(s+1)(s+5)},$$

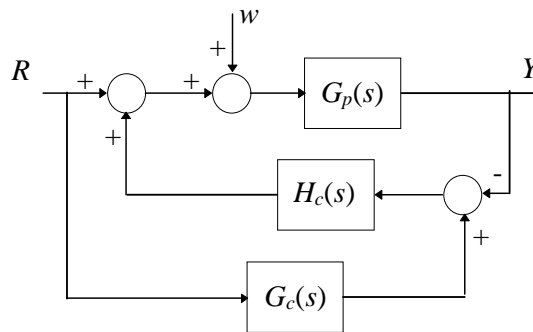


Figura 24

se pide:

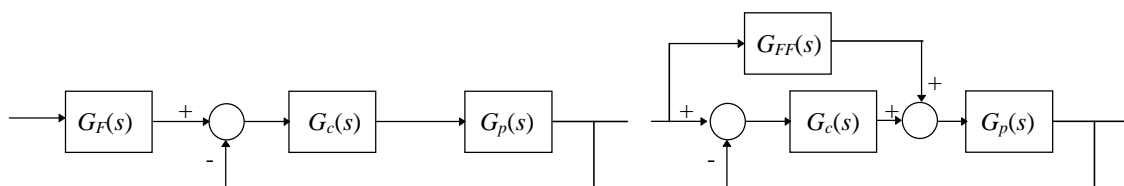
- 1) Hallar  $\frac{Y}{R}$  si  $G_c(s) = G_p(s)$ .
- 2) En el supuesto de diseñar una buena regulación frente a una perturbación  $w$  de tipo escalón, seleccionar la  $H_c(s)$  más adecuada de entre las siguientes opciones:

$$H_1(s) = \frac{10}{s(s+1)}, \quad H_2(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}, \quad H_3(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)}, \quad H_4(s) = \frac{k}{s^2}. \quad \square$$

**Ejercicio 6. 9. Compensación con prefiltro (*forward compensation*) y anticipativa (*feedforward*).** Aunque presenta varios parámetros de ajuste la compensación serie sólo tiene un grado de libertad y así los objetivos quedan limitados no pudiendo, a veces, superar la contradicción entre estabilidad y sensibilidad (que requiere ganancia alta). Una solución es recurrir a estrategias con dos grados de libertad, así

- 1) El prefiltro (*forward*) en cascada con el lazo (con su  $G_c$  serie).
- 2) El anticipativo (*feedforward*) en paralelo con  $G_c$ .

En ambos casos el corrector no afecta los polos del lazo. Se elige de manera que cancele polos y ceros. Vamos a ilustrarlo con un ejemplo: control con un grado de libertad ( $G_c$ ) ampliado a dos grados por dos métodos: **a)**  $G_F$  y **b)**  $G_{FF}$ .



<b>(a)</b>	<b>Figura 25</b>	<b>(b)</b>
<p><b>Nota:</b> Tomar <math>G_c(s)G_p(s) = \frac{2500(1+10s)}{s(s+25)(1+100s)}</math>. <span style="float: right;">□</span></p> <p>Estudio Previo:</p> <p>1) Calcular <math>G_{FF}</math> equivalente a <math>G_F(s) = 1 + 0.05s</math></p> <p>Simulación:</p> <p>1) Hallar <math>R_{pt}</math> y <math>t_r</math> del sistema básico (control con <math>G_c</math>).</p> <p>2) Para hacerlo más rápido sin degradar excesivamente la estabilidad se añade <math>G_F(s) = 1 + 0.05s</math>. Hallar de nuevo <math>R_{pt}</math> y <math>t_r</math>.</p> <p>3) Con la <math>G_{FF}</math> calculada anteriormente, hallar <math>R_{pt}</math> y <math>t_r</math>. <span style="float: right;">■</span></p>		

**Ejercicio 6. 10. Método de Truxal-Guillemín.** Se trata de familiarizarse con el método directo de Guillemín-Truxal y, en particular, con la construcción (síntesis) de  $M(s)$  a partir de las especificaciones de la respuesta temporal (Análisis Inverso). En concreto se trata de diseñar un sistema de control para una planta con  $G_p(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)}$  cuya dinámica se quiere modificar de manera que su salida  $c(t)$  responda a las señales de mando  $r(t)$  tipo escalón según las siguientes especificaciones:

Estabilidad:  $R_{pt} = 5\%$  ( $\zeta \approx 0.7$ , si el sistema es de segundo orden)

Precisión:  $e(\infty) = 0$

Velocidad:  $t_p \approx 0.1$

Realizabilidad: Exceso  $P - Z = 2$

Adicional:  $k_v \geq 50$ , en caso de entrada en rampa □

Estudio Previo:

1) Construcción de  $M(s)$ .

1.1) Partiendo del concepto de polos dominantes: Estimar  $\omega_n$  y  $\zeta$ . Añadir un polo adicional (para la realizabilidad), un cero adicional (para la precisión) y ajustar la  $k$ . (**Nota:** Recuérdese que el cero adicional disminuye el  $t_p$  y aumenta el  $R_{pt}$ )

1.2) Partiendo de un denominador con polinomios óptimos: Elegir un *ITAE* del orden adecuado (3° en este caso) con la  $\omega_n$  indicada por la velocidad y determinar el numerador necesario para que el tipo del sistema sea 1 y la  $k_v$  la especificada (ver Apéndices).

2) Estimar (en caso necesario) los polos y ceros y trazar aproximadamente la respuesta indicial.

Simulación:

1) Polos dominantes

1.1) A partir de la  $M(s)$  obtenida anteriormente, calcular el corrector serie necesario para realizarla.

1.2) Calcular  $k_v$  a partir de  $L(s)$  y a partir de  $M(s)$ .

1.3) Hallar la respuesta indicial del servo y comprobar los valores de  $\zeta$  y  $t_p$ .

2) Polinomio *ITAE*

2.1) Igual que en 1.1).

2.2) Igual que en 1.2).

2.3) Igual que en 1.3). ■

**Ejercicio 6. 11. Asignación de polos por métodos polinómicos (problema regulador). Controlador con dos grados de libertad y observador implícito. Ecuación diofántica.**

**Problema:** Dada la planta  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s+5}{s^2+3s+2}$  se trata de diseñar un controlador con observador implícito, o su equivalente serie/paralelo (ver figuras), con objeto de modificar sus polos.

**Solución:**

- **Comentario previo:** Esta configuración viene sugerida por los métodos desarrollados en la Teoría de Control Moderno, y su solución (condicionada a que  $N$  y  $D$  sean polinomios primos entre sí y a que los polinomios  $N_1$  y  $N_2$  sean de orden inferior al de  $D_0$ ) se lleva a cabo por métodos polinómicos (ecuación diofántica)

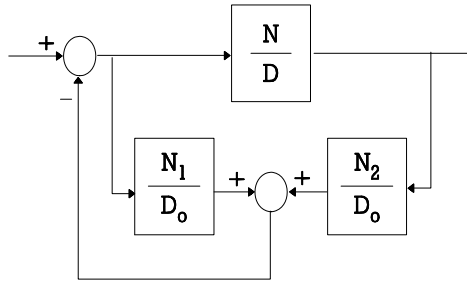


Figura 26

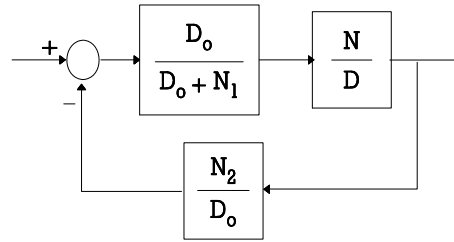


Figura 27

- **Datos:** Polinomio característico deseado:  $D_M = s^2 + 6s + 21 = \alpha_c$  (en los métodos de estado)  
 Observador, elegido con una dinámica:  $D_0 = s^2 + 15s + 50 = \alpha_0$  □

**Estudio Previo:**

- 1) Calcular  $D'_M = D_M D_0$ .
- 2) Resolver la ecuación diofántica  $D(N_1 + D_0) + NN_2 = D'_M$ . (**Nota:** Hacerlo por identificación de coeficientes, habiendo tenido en cuenta las restricciones, en cuanto a su grado, indicadas en el comentario previo).

**Simulación:**

- 1) Comprobar la solución de la ecuación diofántica.
- 2) Comparar las respuestas indiciales del sistema antes y después de ser controlado. ■

**Ejercicio 6. 12. Fijación de polos y ceros (problema servo). Seguimiento de un modelo.**

Una determinada planta (previamente discretizada) viene descrita por  $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z-0.8}{(z-1)(z-0.9)}$ , y se desea controlarla de manera que la transmisión desde la señal de

mando (problema servo) venga descrita por el modelo  $M_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{1.08z}{z^2 - 0.56z + 0.64}$ . Se pretende resolver este problema mediante la configuración (con dos grados de libertad) de la Figura 28, donde  $R, S, T, A$  y  $B$  son polinomios en  $z$ , y donde se supone un observador (implícito) con polinomio característico  $D_0 = 1$  (=  $A_0$  a partir de ahora siguiendo la nomenclatura de Åström).

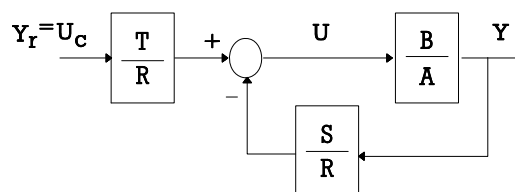


Figura 28

□

Estudio Previo:



- 1) ¿Por qué, dentro de la limitación de su grado, hemos podido elegir arbitrariamente  $A_m$  y  $A_0$  ?
- 2) Calcular  $M = \frac{Y}{Y_r}$ .
- 3) Suponiendo que conseguimos  $M = M_m$ , y teniendo en cuenta que  $D_M' = A_m A_0 B^+$  (\*), escribir las relaciones entre los numeradores y denominadores de  $M$  y  $M_m$ .
- 4) Resolver la ecuación diofántica  $AR + BS = A_m A_0 B^+$  (que tiene solución (\*\*)) por cuanto  $A$  y  $B$  son primos entre sí).
- 5) Calcular los controladores  $\frac{T}{R}$  y  $\frac{S}{R}$  y verificar que se alcanzan las especificaciones de transmisión. ¿Qué puede decirse sobre la sensibilidad a variaciones lentas de los parámetros de la planta?

(\*) **Nota:** Esta ecuación se demostrará en clase, y es una consecuencia del teorema de separación que aparece en el diseño del regulador por retroacción del estado, cuando se usa una estimación del mismo obtenida mediante un observador, en cuyo caso resulta  $D_M' = \alpha_0 \alpha_c$ . Al ser extendido al caso servo aparece el factor  $B^+$  proveniente de los factores estables de  $B$  ( $B = B^+ B^-$ ).

(\*\*) **Nota:** Para que, además de existir, la solución sea única hay que elegir, en este caso,  $S$  de primer grado y  $R$  de grado cero.

Simulación:

- 1) Comprobar la solución de la ecuación diofántica.
- 2) Hallar la respuesta del sistema ( $y$ ,  $u$ ).
- 3) Valorar la sensibilidad del sistema. ■

## 7. Control óptimo

**Ejercicio 7. 1. Solución paramétrica.** Se trata de controlar la planta del ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia. optimizando, ahora, su dinámica. Para ello se parte de la siguiente configuración ( $k > 0$ ):

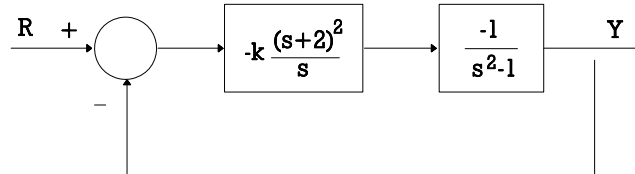


Figura 29

### Estudio Previo:

- 1) Razónese la elección del algoritmo de control (el polo, los ceros y el signo de  $k$ ).
- 2) Bosquejar el lugar de Evans correspondiente al parámetro  $k$ .
- 3) Calcular los valores de  $k$  que estabilizan el servo.
- 4) Estimar el valor de  $k$  para obtener unos polos dominantes con  $\zeta = 0.7$ .
- 5) Calcular el valor del criterio ISE ( $J_3(k)$ ) a una entrada en escalón (ver Apéndices).
- 6) Valorar la dificultad de hallar analíticamente el valor de  $k$  que minimiza el criterio  $J_3$ .

### Simulación:

- 1) Trazar el lugar de Evans y verificar los resultados obtenidos en los apartados 2), 3) y 4) del estudio previo.
- 2) Hallar el valor óptimo de  $k$  por medio de los siguientes procedimientos:
  - 2.1) Representando  $J_3(k)$  y estimando el mínimo gráficamente.
  - 2.2) Resolviendo la ecuación  $\frac{\partial J_3}{\partial k} = 0$ .
  - 2.3) Usando directamente la función de MATLAB **fmin** (Notar la eficacia de esta función en la detección de mínimos relativos).
- 3) Con el valor de  $k$  obtenido en el apartado 4) del estudio previo trazar la respuesta indicial y, sobre la gráfica, calcular aproximadamente el valor del ISE. Comparar el resultado con el obtenido al calcular  $J_3(k)$ . ■

**Ejercicio 7. 2. Solución funcional.** Dada la planta del ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia., se trata de hallar la función de transferencia óptima del servo, correspondiente a una

entrada en escalón y siendo  $J = \int_0^{\infty} (e^2(t) + u^2(t))dt$  el criterio a optimizar, mediante la

aplicación de la factorización espectral de Wiener. (**Nota:** La inclusión de  $u^2(t)$  introduce realismo en la optimización al restringirla indirectamente a valores "pequeños" de  $u(t)$  -no saturación). □

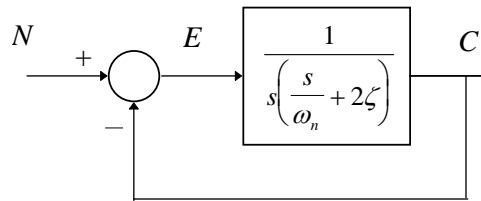
### Estudio Previo:

- 1) Realizar la factorización espectral solución de  $N\bar{N} + \rho^2 D\bar{D}$  (ver Apéndices).
- 2) Calcular  $M^o(s)$ .
- 3) Calcular el controlador serie (con  $H=1$ ) necesario para obtener dicha  $M^o(s)$ .

### Simulación:

- 1) Obtener la factorización espectral calculando las raíces de  $N\bar{N} + \rho^2 D\bar{D} = 0$ .
- 2) Trazar la respuesta impulsional y comprobar que el sistema se ha estabilizado.
- 3) Calcular el valor del criterio ISE a un escalón unitario. ■

**Ejercicio 7. 3. Solución Paramétrica (estructura fija).** Se trata de estudiar el efecto del ruido de entrada sobre el error del servo (medido en términos de  $\overline{e^2}$ ) y estudiar cómo depende de los parámetros del sistema.



**Figura 30**

En este caso se trata del servo de la Figura 30, siendo  $\zeta$  el parámetro ajustable y  $n(t)$  una señal aleatoria cuyo espectro de potencia es:

$$S_n(\omega) = \frac{S_0}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \square$$

**Estudio Previo:**

- 1) Calcular la función de transferencia  $\frac{E(s)}{N(s)}$ .
- 2) Calcular la densidad espectral del error  $S_e(\omega)$ .
- 3) Calcular  $\overline{e^2}(\zeta)$ , utilizando las tablas de los Apéndices. (Para simplificar la expresión, utilícese la frecuencia normalizada  $u \equiv \frac{\omega_n}{\omega_0}$ )
- 4) Hallar el valor óptimo de  $\zeta$  y particularizarlo para el caso  $\omega_0 = 10\omega_n$ .

**Simulación:**

- 1) Generar 100 muestras de ruido  $n(t)$  blanco gaussiano de media cero y varianza unidad.
- 2) Simular la respuesta del sistema a  $n(t)$  en lazo cerrado para  $\omega_n = 1$  y  $\zeta = \zeta^0$ .
- 3) Obsérvese la respuesta  $e(t)$  para los valores anteriores y calcular  $\overline{e^2}$  cuando  $\zeta = \zeta^0$ .
- 4) Comprobar la reducción del ruido al variar  $\zeta$  y acercarse a su valor óptimo. ■

**Ejercicio 7. 4. Regulador óptimo determinista (LQ). Solución polinómica.** Se trata de comprobar, una vez más, la versatilidad del controlador con dos grados de libertad, aplicado aquí a implementar un regulador óptimo LQ. La solución de este problema tiene, como paso previo, la solución de una ecuación diofántica (muy sencilla) que permite obtener un predictor de  $d$  pasos.

Problema: Se requiere regular una planta (lineal)  $H(z) = z^{-2} \frac{0.01z - 0.01}{z^2 - 2.002z + 1.002}$  de manera que los estados perturbados se recuperen de forma que se minimice el criterio (cuadrático)

$$J(n) = y^2(n+d) + \left[0.1(u_n - u_{n-1})\right]^2.$$

Solución: La teoría de control óptimo demuestra que la solución viene dada ¡también! por la configuración de la Figura 28, satisfaciendo aquí los polinomios  $R(z^{-1})$ ,  $S(z^{-1})$ ,  $T(z^{-1})$  las siguientes expresiones:

$$R = PBF + \frac{r_0}{b_0} R_u \quad ; \quad S = PG \quad ; \quad T = Q$$

siendo:

$P, Q, R_u$  los polinomios de ponderación de  $J(n)$

que, en este caso, valen  $P = 1$ ,  $Q = 0$ , y  $R_u = 0.1 - 0.1z^{-1}$ .

$B(z^{-1})$  el numerador de la planta.

$r_0, b_0$  los términos constantes de los polinomios  $R_u(z^{-1})$  y  $B(z^{-1})$  respectivamente.

$F, G$  los polinomios solución de la ecuación diofántica  $1 = A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-d}G(z^{-1})$ . □

**Estudio Previo:**

1) Comprobar que la planta es inestable.

2) Resolver la ecuación diofántica realizando la división:  $\frac{1}{A(z^{-1})}$ , de donde resulta que  $F$  es el cociente y  $G$  el resto.

3) Calcular  $R, S, T$ .

4) Hallar los polos del sistema y comprobar su estabilidad.

Comentario sobre las notaciones: Obsérvese que la  $G(z)$  de la ecuación diofántica no es la función de transmitancia de la planta, aquí representada por  $H(z)$ . El cambio en la notación es debido a la generalización de su uso, extendido por Åström.

**Simulación:**

1) Calcular  $M(z)$  a partir de la estructura y componentes del sistema.

2) Determinar la respuesta a una entrada de  $r(n)$  en escalón.

3) Determinar la respuesta a una perturbación impulsional,  $p(n)$ , a la entrada de la planta. ■

**Ejercicio 7. 5. Comparación de métodos de cálculo.** Se trata de controlar una planta

$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)}$ , con una misma estructura de control ( $H = 1$  y corrector serie), para satisfacer especificaciones diversas y por diferentes métodos de cálculo:

1) Bode. Corrector de avance  $G_c(s) = k \frac{1+n\tau s}{1+\tau s}$ . Especificaciones: MF = 45°,  $k_v = 10$ .

2) Evans. Corrector de avance  $G_c(s) = k \frac{s+z}{s+p}$ . Especificaciones (dinámica del servo):  $\zeta = 0.5$ ;  $\omega_n = 2$ .

3) Truxal. Dinámica del servo:  $\zeta = 0.5$ ;  $\omega_n = 2$ . Precisión:  $M(0) = 1$ .

4) Optimización paramétrica (frente a entradas en escalón):  $G_c = k$ ,  $J = \int_0^\infty (e^2 + u^2) dt$

5) Optimización funcional (frente a entradas en escalón):  $J = \int_0^\infty (e^2 + u^2) dt$

6) Optimización estocástica. Señales de entrada: Referencia:  $S_r(s) = \frac{3}{1-s^2}$ ; Ruido aditivo no correlado  $S_n = 1$ . Criterio:  $\min(\overline{e^2})$  □