

# MODELADO DISCRETO DE SISTEMAS DE TRANSMISIÓN DIGITAL


## 1. Modulaciones de alta velocidad

## 2. Simulación de sistemas de tx. digital

2.1. Modelado de señal y generación de datos

2.2. Modelado de canal

2.2.1. Canal invariante (LTI)

 2.2.2. Canal variante

2.3. Demodulación y detección: estimación de BER

2.4. Aspectos tecnológicos

## 2.2.2 Canales variantes en tiempo con propagación multicamino

En comunicación radioeléctricas muchas veces la respuesta impulsional del canal varía aleatoriamente con el tiempo. Este es el caso de:

- canales ionosféricos de onda corta: 3 a 30 MHz (HF)
- "scatter" troposférico (más allá del horizonte): 0.3 a 3 GHz (UHF) y de 3-30 GHz (SHF)
- canales de transmisión en comunicaciones móviles

En estos casos es necesario caracterizar el canal estadísticamente. Desde el punto de vista de calidad de la comunicación, en general, podemos decir que estos canales penalizan la SNR. A continuación se comentará también como, en comunicaciones digitales, *cuanto mayor sea la velocidad de transmisión* (o menor sea el tiempo de símbolo) y mayores sean las frecuencias portadoras, más afectarán las degradaciones del canal. se hace por tanto necesario emplear modulaciones sofisticadas que reduzcan esta penalización.

El canal variante se caracterizará por el equivalente paso bajo  $c(\tau;t)$  de la respuesta en "t" a un impulso aplicado en "t- $\tau$ "

$$c(\tau;t) = \Gamma(\delta(t - \tau))$$

En el dominio frecuencia se define la transformada de Fourier del canal como

$$C(f;t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau;t) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

Si la señal transmitida es  $s(t)$ , con equivalente paso bajo  $s_b(t)$ , el equivalente paso bajo de la señal recibida a través de  $c(\tau;t)$  es<sup>1</sup>

$$y_b(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_b(\tau) c(\tau;t) d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_b(t - \tau) c(\tau;t) d\tau \quad (1)$$

A continuación se hallará la respuesta impulsional para el caso concreto de un canal variante con propagación multicamino. En este caso, la señal recibida  $y(t)$  puede expresarse como la superposición de  $N(t)$  diferentes ecos, cada uno de amplitud  $\alpha_n(t)$  y retardo  $\tau_n(t)$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) s(t - \tau_n(t)) = \text{Re} \left\{ \left( \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} s_b(t - \tau_n(t)) \right) e^{j2\pi f_c t} \right\}$$

Siendo el equivalente paso bajo correspondiente de dicha señal

$$y_b(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) \exp(-j\theta_n(t)) s_b(t - \tau_n(t)) \quad \text{con} \quad \theta_n(t) = 2\pi f_c \tau_n(t)$$

Si se identifica entonces esta expresión con la expresión general (1), se obtiene que el equivalente paso bajo del canal es

$$c(\tau;t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) \exp(-j\theta_n(t)) \delta(\tau - \tau_n(t)) \quad (2)$$

<sup>1</sup> En el resto de esta sección se omitirá por comodidad el factor 1/2 cuando se trabaje con filtrado equivalente paso-bajo.

En dicho modelo formulado en (2) se pueden observar los siguientes efectos de la propagación multicamino:

- debido a los ecos, la señal recibida se ensancha, es decir, si se transmite un pulso de duración  $T_s$ , se recibe un pulso de mayor duración;
- se producen desvanecimientos o "fadings" debido a la suma constructiva o destructiva entre las réplicas o ecos de la señal transmitida;
- los ecos o "multipath" varían con "t" de forma impredecible para el receptor y, por lo tanto, el canal se modelará como un proceso aleatorio. Si tenemos en cuenta que la fase de cada eco es  $\theta_n(t) = 2\pi f_c \tau_n(t)$ , observamos además que pequeños retardos  $\tau_n(t)$  de cada uno de los ecos provocarán mayores cambios de fase  $\theta_n(t)$  cuanto mayor sea la frecuencia de la portadora  $f_c$ .

El canal con "multipath" presenta 2 tipos de variaciones que se pueden considerar aisladamente:

1.- Variación en frecuencia debido al ensanchamiento temporal. Si se considera únicamente este efecto en la función de transferencia  $C(f;t)$ , bastará con estudiarla para  $t=0 \rightarrow C(f;t)=C(f)$

2.- Variación en tiempo. Si se considera únicamente este efecto en la función de transferencia  $C(f;t)$ , bastará con estudiarla para  $f=0 \rightarrow C(f;t)=C(0;t)$

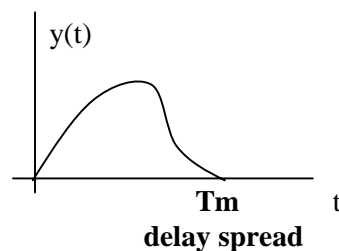
A continuación se hará un primer estudio de los diferentes parámetros que caracterizan el canal y para ello se considerarán por separado la variación frecuencial y la variación temporal del mismo. Más adelante se justificarán estadísticamente dichos parámetros.

### 2.2.2.1 Ensanchamiento temporal o "delay spread"

Como consecuencia del multicamino, cuando se transmite un impulso ideal en el receptor no aparece una, sino un tren de deltas. Esta respuesta será diferente en función del instante considerado como consecuencia de las variaciones temporales del canal. De momento no se pretenden considerar dichas variaciones y se supondrá un  $t_0$  fijo; por lo tanto, la función de transferencia no dependerá del tiempo  $C(f;t)=C(f)$ .

$$\delta(t-t_0) \rightarrow \boxed{c(\tau;t)} \rightarrow y(t) = \sum_{l=1}^L \alpha_l(t_0) \delta(t-t_0 - \tau_l(t_0)) = c(t;t_0)$$

Si se tiene un gran número de reflexiones, el tren discreto de impulsos se convierte en un pulso de longitud  $T_m$ . Esto es lo que se conoce como el "delay spread".



El **ancho de banda de coherencia** es un parámetro estrechamente ligado con el anterior. Se sigue considerando un instante de transmisión  $t_0$  para el que se tiene una respuesta determinada del canal. Se transmiten dos sinusoides de frecuencias  $f_1$  y  $f_2$

$$\begin{array}{ccc} \exp(2\pi f_1 t) & \rightarrow & \boxed{c(\tau;t)} & \rightarrow & y_1(t) = C(f_1) \exp(2\pi f_1 t) \\ \exp(2\pi f_2 t) & & & & y_2(t) = C(f_2) \exp(2\pi f_2 t) \end{array}$$

Si ambas frecuencias son próximas, las señales experimentarán aproximadamente los mismos cambios de fase cuando sufran reflexión (es decir,  $C(f1) \approx C(f2)$ ). Como consecuencia de esto ambas componentes experimentarán los desvanecimientos al mismo tiempo, es decir, la respuesta del canal para ambas señales estará correlada. El ancho de banda de coherencia se define como la distancia en Hz que se ha de tomar para que la correlación de las dos señales recibidas sea menor que 0.5. Su valor es

$$B_c \approx \frac{1}{T_m}$$

Considerando que la señal transmitida tiene un ancho de banda  $B_s$ , en función de cómo sea dicho ancho de banda respecto al ancho de banda de coherencia, el canal introducirá o no distorsión:

- Si  $B_s < B_c$ , el canal no distorsiona ya que trata todas las frecuencias por igual y se le denomina **CANAL NO SELECTIVO EN FRECUENCIA o con "flat fading"**.
- Si  $B_s > B_c$ , el canal distorsiona y se le denomina **CANAL SELECTIVO EN FRECUENCIA**

*Observación:* Si  $B_s \approx \frac{1}{T_s}$ , las condiciones anteriores se pueden reformular. Por ejemplo, si  $T_s > T_m$  se pueden

despreciar los ecos o ensanchamiento que produce el canal (los ecos no se pueden resolver en la señal recibida) y se dice que el canal no es selectivo en frecuencia. Generalmente en transmisiones a *alta velocidad* no suele cumplirse esta condición, por lo que el canal con multipath genera distorsión, sino se evita con técnicas más sofisticadas como son las modulación multiportadora.

### 2.2.2.2 Ensanchamiento frecuencial o "doppler spread"

A continuación se considerará un canal no selectivo en frecuencia y sólo se atenderá a las variaciones temporales del canal. Si el canal variante no es selectivo en frecuencia, únicamente provoca una distorsión multiplicativa sobre la señal transmitida tal y como se observa en (3)

$$y_b(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) \exp(-j\theta_n(t)) s_b(t - \tau_n(t)) \cong s_b(t) \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) \exp(-j\theta_n(t)) \quad (3)$$

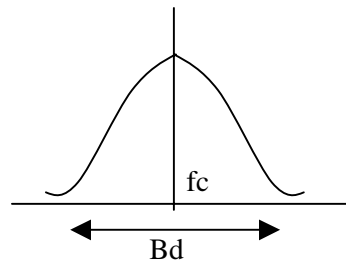
Observamos que dicha distorsión multiplicativa  $\sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) \exp(-j\theta_n(t))$  es igual a  $C(0;t)$

$$C(0;t) = \int c(\tau;t) d\tau = \int \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) \exp(-j\theta_n(t)) \delta(\tau - \tau_n(t)) d\tau = \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) \exp(-j\theta_n(t))$$

Para visualizar mejor los efectos de dicha distorsión consideraremos que  $s(t)$  es un tono frecuencial cuyo equivalente paso bajo es  $s_b(t) = \exp(j2\pi f_o t)$ , en dicho caso el equivalente paso bajo de la salida es

$$y_b(t) = \int c(\tau;t) \exp(j2\pi f_o(t - \tau)) d\tau = C(f_o;t) \exp(j2\pi f_o t)$$

es decir, el tono puro que se tenía en un principio sufrirá un ensanchamiento debido a la variación temporal del canal. Es lo que se conoce como ensanchamiento doppler **Bd** o "**doppler spread**".

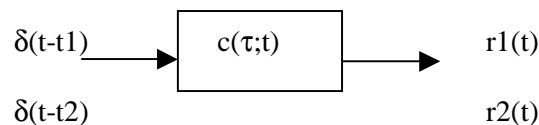


El ensanchamiento  $B_d$  dependerá del ritmo de cambio del canal. Por ejemplo en una comunicación móvil

$$B_d \cong 2f_c \frac{v}{c}$$

en donde  $f_c$  es la frecuencia de la portadora y  $v$  es la velocidad del móvil.

Relacionado con el "doppler spread" está el **tiempo de coherencia,  $T_c$** . Se trata ahora de medir la correlación entre señales cuando se transmite en diferentes instantes de tiempo. Para ello:



La respuesta para ambos impulsos estará correlada, estará afectada por el mismo desvanecimiento, si la separación entre  $t_1$  y  $t_2$  es menor que el tiempo de coherencia, cuyo valor viene dado por el ritmo de variación de los desvanecimientos  $B_d$

$$T_c \cong \frac{1}{B_d}$$

Considerando que la señal transmitida presenta una velocidad de  $T_s$  símbolos/seg, el canal distorsionará o no en función del valor de  $T_s$  respecto al tiempo de coherencia del canal  $T_c$ :

- Si  $T_s \ll T_c$  o, equivalentemente,  $B_d T_s \ll 1$ , el canal se puede considerar constante en un tiempo de símbolo y se dice que el canal presenta **DESVANECIMIENTOS LENTOS o "slow fading"**
- Si  $B_d T_s \cong 1$ , el canal presenta **DESVANECIMIENTOS RÁPIDOS** que degradan más la señal y dificultan el trabajo del receptor.

En conclusión un canal variante que presenta propagación multicamino puede distorsionar de varios modos la señal modulada digitalmente, según sea su tiempo de símbolo  $T_s$  respecto a las características o parámetros del canal. El peor caso será si el canal es selectivo en frecuencia y además presenta desvanecimientos rápidos. A continuación se indicará cómo se pueden medir los parámetros del canal. Como éste es un proceso aleatorio, se tendrá que recurrir a sus estadísticas.

### 2.2.2.3 Correlación y densidad espectral del canal

La correlación del canal se define como  $R_c(\tau_1, \tau_2; \Delta t)$

$$R_c(\tau_1, \tau_2; \Delta t) = \frac{1}{2} E[c^*(\tau_1; t) c^*(\tau_2; t + \Delta t)] = R_c(\tau_1; \Delta t) \delta(\tau_1 - \tau_2) = R_c(\tau; \Delta t)$$

en donde se ha considerado que la propagación con retardo  $\tau_1$  y la propagación con retardo  $\tau_2$  están incorreladas.

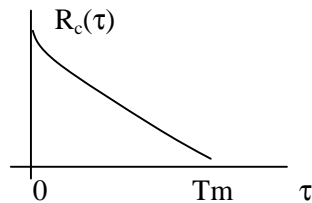
A continuación aislaremos los diferentes efectos del canal.

$\Delta t = 0$  no se consideran las variaciones temporales

En este caso se tiene que la correlación mide la potencia promedio del canal en función del retardo  $\tau$

$$R_c(\tau) = \frac{1}{2} E \left\{ |c(\tau_1; t) c^*(\tau_2; t)|^2 \right\}.$$

El valor de dicha correlación es menor que 0.5 para  $\tau \geq T_m$  ("delay spread").



Para medir la correlación en este caso se emiten pulsos muy estrechos y se calcula la correlación cruzada de la señal recibida con una versión retardada  $\tau$  de la misma.

En frecuencia se tiene que la función de transferencia del canal es

$$C(f; t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau; t) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau$$

como dicha función de transferencia es aleatoria conviene calcular su autocorrelación

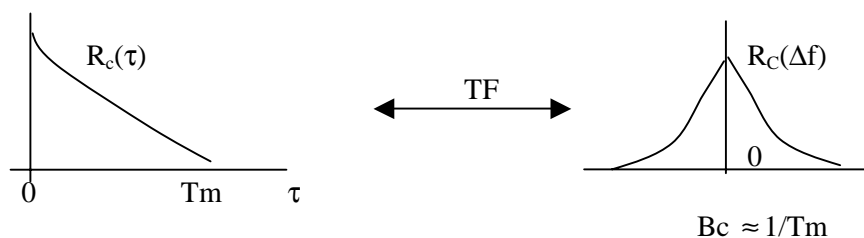
$$R_C(f_1, f_2; \Delta t) = \frac{1}{2} E [C^*(f_1; t) C(f_2; t + \Delta t)] = R_C(\Delta f; \Delta t)$$

Dicha autocorrelación se mide emitiendo 2 tonos separados  $\Delta f$  y calculando la correlación cruzada en 2 señales recibidas separadas un retardo  $\Delta t$ .

Para el caso de que  $\Delta t = 0$  se obtiene  $R_C(\Delta f)$  y fácilmente se puede demostrar que

$$R_C(\Delta f) = \int R_c(\tau) \exp(-j2\pi \Delta f \tau) d\tau$$

Como es una autocorrelación en el dominio transformado mide la coherencia frecuencial del canal y tiene una duración efectiva que se denomina ancho de **banda de coherencia** o  $B_c$ .

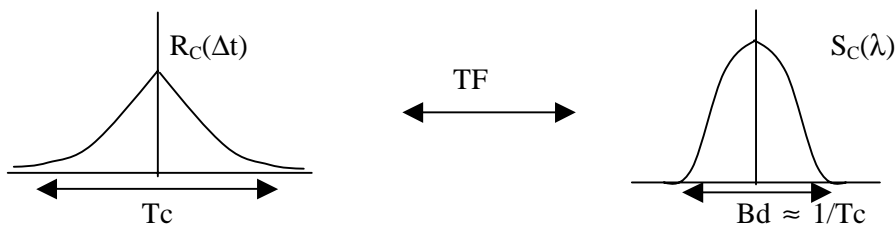


$\Delta f = 0$  sólo se consideran las variaciones temporales del canal.

En este caso a partir de la función de transferencia del canal se puede definir la siguiente función de autocorrelación

$$R_C(\Delta t) = \frac{1}{2} E[C^*(0;t)C^*(0;t + \Delta t)]$$

la cual da una medida de la rapidez de las variaciones del canal. Su duración se denomina **tiempo de coherencia del canal** o  $T_c$



Otro modo de medir la rapidez de las variaciones del canal es a través de la transformada de Fourier de  $R_C(\Delta t)$ , la cual se denomina *espectro doppler*

$$S_C(\lambda) = \int R_C(\Delta t) \exp(-j2\pi\lambda\Delta t) d\Delta t$$

el cual, para canales no variantes es  $S_C(\lambda) = \delta(\lambda)$

Para terminar con la caracterización del canal estudiaremos a continuación algunos de los modelos más habituales de función de densidad de probabilidad o fdp.

#### 2.2.2.4 Función de densidad de probabilidad del canal

Si hay numerosos ecos (propagación troposférica o ionosférica) se puede aplicar el Teorema Central del Límite y suponer que  $c(\tau;t)$  es un proceso Gaussiano complejo. A continuación estudiaremos las estadísticas más comunes que presentan la envolvente  $e_c(\tau;t)$  y la fase  $\varphi_c(\tau;t)$  de dicho proceso para el caso de que el canal sea variante y no selectivo en frecuencia, es decir, cuando el canal introduce una distorsión multiplicativa como la que se modela en (4)

$$y_b(t) = C(0;t) s_b(t) = s_b(t) \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) \exp(-j\theta_n(t))$$

$$c(0;t) = c_i(t) + jc_q(t) + m_i(t) + jm_q(t) \quad (4)$$

#### A.- Escenario sin ecos o "scatters" fijos

En este caso el escenario presenta propagación o ecos denominados difusos, la fase de la cual considera uniformemente distribuida entre 0 y  $2\pi$ . En cuanto a la envolvente, esta es de media cero y presenta una estadística Rayleigh

$$f_e = \frac{2e}{\Omega} \exp\left(-\frac{e^2}{\Omega}\right) \quad e \geq 0 \quad \Omega = E[e^2]: \text{único parámetro}$$





## B.- Escenarios con ecos fijos

Este es el caso, por ejemplo, de tener una camino de propagación directo al que se le añaden propagaciones multicamino difusas de menor potencia. La envolvente, por tanto, tiene una media diferente de cero y su estadística pasa a ser Rice

$$f_e = \frac{e}{\Omega} \exp\left(\frac{-e^2 + \rho^2}{2\Omega}\right) I_0\left(\frac{e\rho}{\Omega}\right) \quad e \geq 0 \quad \Omega = E[e^2]$$

en donde  $I_0$  es la función de Bessel modificada de orden 0.

A diferencia de la estadística Rayleigh, la fdp Rice viene caracterizada por dos parámetros:  $\Omega$  y  $\rho$ . El parámetro  $\rho$  indica la importancia del multipath difuso:

$$\begin{cases} - \rho=0 & \text{la envolvente tiene estadística Rayleigh; ya que no hay ecos fijos} \\ - \rho= \infty & f_e = \delta(e - \sqrt{\Omega}) \quad \text{canal AWGN} \end{cases}$$

La caracterización del canal a nivel de fdp es útil tanto para el cálculo de probabilidades de error como para construir modelos de simulación de dicho canal. En el siguiente apartado trataremos los modelos de simulación. Antes, no obstante pondremos un ejemplo de cálculo analítico de probabilidad de error.

### Ejemplo:

Cálculo de la BER para una tx. BPSK a través de un canal no selectivo en frecuencia y con desvanecimientos lentos ( $Bd.T_s \ll 1$ ).

En dichas condiciones de tx., el equivalente paso bajo de la señal recibida durante un tiempo de símbolo será

$$y_b(t) = e_c \exp(-j\varphi_c) s_b(t) + n(t)$$

Si el ruido  $n(t)$  se considera Gaussiano, y el receptor puede estimar  $\varphi_c$  y hacer una demodulación coherente, la probabilidad de error condicionada a un determinado valor de envolvente será igual a

$$p^c = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b e^2}{N_o}}\right) = Q(\sqrt{\gamma_b})$$

y la probabilidad de error total se obtendrá promediando los  $P_c$  para los diferentes valores que puede adoptar la envolvente según su estadística  $f_e$

$$p = \int_0^{\infty} p^c(\gamma_b) f(\gamma_b) d\gamma_b$$

### 2.2.2.5 Modelos de simulación de canales móviles con desvanecimientos

Los desvanecimientos que sufre la envolvente de la señal recibida cuando ésta atraviesa canales móviles no selectivos en frecuencia se pueden modelar en la mayoría de los casos como procesos Rice y Rayleigh. Para simular estos procesos se necesitan dos procesos Gaussianos reales coloreados según el espectro doppler. En canales selectivos en frecuencia, el modelo consistirá en "n" caminos principales de propagación que introducirán

"n" retardos no despreciables en comparación con el tiempo de símbolo. Estos caminos de propagación se simularán con una línea con "n" taps que requerirán realizar "2n" procesos de ruido real Gaussiano coloreado.

### A.- Canales no selectivos en frecuencia

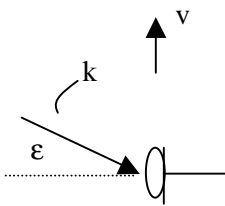
El canal complejo se puede modelar como

$$c(t) = c_i(t) + jc_q(t) + m_i(t) + jm_q(t)$$

en donde  $c_i(t)$  y  $c_q(t)$  con procesos reales Gaussianos coloreado incorrelados (por ser canales no selectivos en frecuencia) y de potencia  $\sigma^2$  cada uno de ellos. Estos procesos modelan el multipath difuso mientras que  $m_i(t)$  y  $m_q(t)$  modelan los ecos fijos o camino de propagación directo que hacen que el canal sea un proceso de media no nula

$$m_i(t) + jm_q(t) = \rho \exp(j(2\pi f_d t + \theta_d)) \quad (5)$$

En donde  $\rho$  dependerá de la potencia del rayo directo respecto a la potencia de los ecos difusos. En cuanto a la frecuencia doppler  $f_d$ , se observa que para comunicaciones móviles cuya frecuencia portadora es  $f_c$ ,  $f_d$  es



$$f_d = f_c \frac{v}{c} \sin(\varepsilon)$$

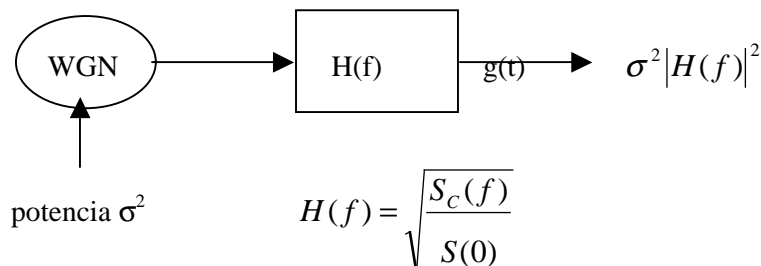
Por lo tanto, si la dirección de llegada del rayo directo (dirección del vector de propagación de onda  $k$ ) es ortogonal a la dirección del movimiento del vehículo receptor,  $m_i(t)$  y  $m_q(t)$  pasan a ser constantes.

El modelo más general será el que considere una propagación con ecos fijos, es decir, el caso en el que la envolvente tiene estadística Rice. El modelo estocástico del mismo consistirá en generar dos procesos gaussianos reales coloreados independientes Su generación puede ser estocástica o determinista. A continuación se describen cada uno de los dos procedimientos.

### Simulación de un proceso Gaussiano coloreado $g(t)$

#### Modelo estocástico

Una alternativa usual es generar un ruido Gaussiano blanco (AWGN) y filtrarlo con un filtro cuya función de transferencia sea la raíz cuadrada del espectro Doppler y de amplitud máxima normalizada a la unidad.



Hay diferentes modelos de espectro Doppler  $S_c(f)$  según sea el escenario de propagación

- Modelo de Jakes (empleado en comunicaciones móviles celulares)

$$S_C(f) = \frac{1}{\pi f_{max} \sqrt{1 - (f / f_{max})^2}} \quad |f| \leq f_{max}$$

$f_{max}$  es la máxima frecuencia Doppler ( $Bd=2 f_{max}$ ). La antitransformada de Fourier de  $S_C(f)$  es la

$$R_C(t) = J_0(2\pi f_{max} t)$$

siendo  $J_0$  la función de Bessel de primera clase.

- Para comunicaciones móviles satélite o canales HF son habituales los siguientes modelos que consisten en pasar ruido blanco por filtros conformadores Gaussianos o de Butterworth de orden "n"

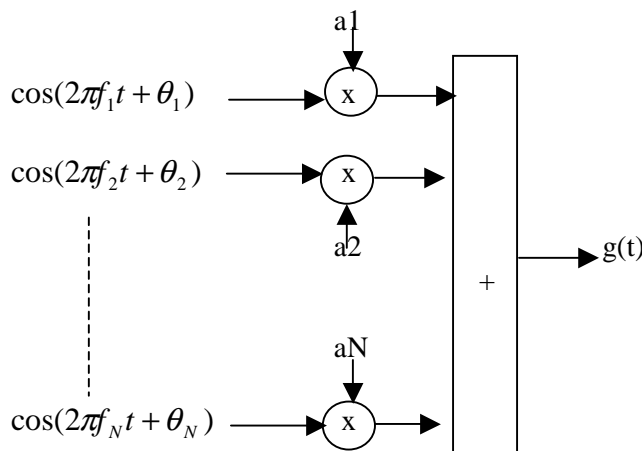
$$S_C(f) = \frac{S(0)}{1 + (f / f_{max})^{2n}}$$

o

$$S_C(f) = S(0) \exp\left\{-\frac{f^2}{2f_{max}^2}\right\}$$

*Modelo determinista*

Una alternativa al modelado estocástico se basa en aproximar un proceso Gaussiano por la suma de un número finito de senoides de amplitudes, frecuencias y fases a diseñar según el espectro doppler y la estadística de la envolvente. Este modelo se denomina determinista; ya que todos los parámetros de las senoides se han de determinar antes de iniciar la simulación y, por lo tanto, son cantidades constantes durante toda la simulación.



*Parámetros doppler del modelo determinista*

Consideremos cada uno de los dos procesos Gaussianos reales coloreados  $c_i(t)$  y  $c_q(t)$ , que se denominarán por comodidad  $c_l(t)$  con  $l=1,2$

$$c_l(t) = \sum_{n=1}^{N_l} a_{l,n} \cos(2\pi f_{l,n} t + \theta_{l,n}) \quad l = 1, 2 \quad (6)$$

### Cálculo de los coeficientes doppler $a_{l,n}$

Los  $a_{l,n}$  óptimos tales que la fdp de  $c_l(t)$ ,  $\hat{f}_{c_l}$ , aproxime lo mejor posible a la fdp Gaussiana  $f_{c_l}$  minimizando la siguiente norma

$$\left\{ \int |f_{c_l}(x) - \hat{f}_{c_l}(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

son

$$a_{l,n} = \sigma \sqrt{\frac{2}{N_l}}$$

para un número de rayos o ecos  $N_l \geq 7$ ; ya que entonces la distorsión es despreciable.

Observamos que la fdp de la señal generada como suma de rayos o tonos  $\hat{f}_{c_l}$  se obtiene convolucionando los  $N_l$  rayos  $c_{l,n}(t) = a_{l,n} \cos(2\pi f_{l,n} t + \theta_{l,n})$ , cada uno con distribución

$$\hat{f}_{c_{l,n}}(x) = \frac{1}{\pi a_{l,n} \sqrt{1 - (x/a_{l,n})^2}} \quad |x| < a_{l,n}$$

### Cálculo de las frecuencias doppler $f_{l,n}$

Para la obtención de estos parámetros se ajustará la función de autocorrelación de la señal generada en (6),  $\hat{R}_{C_l}(t)$  con la autocorrelación  $R_{C_l}(t)$  del proceso gaussiano de espectro doppler. El ajuste será tal que se minimice la siguiente norma

$$\frac{1}{T} \left\{ \int_0^T |R_{C_l}(t) - \hat{R}_{C_l}(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

Si consideramos un canal cuyo espectro doppler  $S_C(f)$  se puede modelar según el modelo de Jakes, entonces  $T = N_l / (2 f_{max})$  y la función de autocorrelación será

$$R_{C_l}(t) = \sigma^2 J_0(2\pi f_{max} t)$$

y el ajuste se puede realizar empleando la siguiente aproximación de la función de Bessel

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z \sin(a)) da \approx \lim_{N_l \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N_l} \cos(z \sin(a_n)) \Delta a \quad a_n = \pi(2n-1)/4N_l \quad \Delta a = \frac{\pi}{2N_l}$$

En cuanto a la función de autocorrelación  $\hat{R}_{C_i}(t)$  esta se puede calcular considerando las señales  $c_i(t)$  señales de deterministas de potencia media finita, por lo tanto,

$$\hat{R}_{C_i}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} c_i(t+a)c_i(a) da = \sum_{n=1}^{N_i} \frac{a_{i,n}^2}{2} \cos(2\pi f_{i,n}t)$$

El valor de cada una de las frecuencias doppler que resulta es es

$$f_{i,n} = f_{max} \sin \left[ \frac{\pi}{2N_i} (n-1/2) \right]$$

y para  $N_i \geq 7$  el valor de la aproximación se considera adecuado.

Observamos que  $f_{1,n} \neq \pm f_{2,m}$  para todo  $n=1,2,\dots,N_1$  y  $m=1,2,\dots,N_2$ , por lo tanto se obtendrán procesos  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$  incorrelados.

#### Fase doppler $\theta_{i,n}$

Las fases doppler  $\theta_{i,n}$  no influyen en la estadística de  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$  siempre y cuando estas sean señales incorreladas. Son variables aleatorias que están uniformemente distribuidas entre 0 y  $2\pi$ , no obstante, para un modelo de simulación con parámetros deterministas, se propone la siguiente alternativa al modelo estocástico. Considérese el vector de fase  $\Theta_i$

$$\Theta_i = \left( 2\pi \frac{1}{N_i+1}, 2\pi \frac{2}{N_i+1}, \dots, 2\pi \frac{N_i}{N_i+1} \right)$$

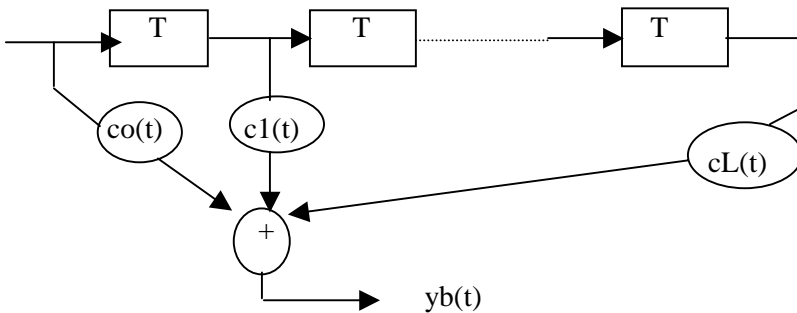
y que las fases  $\theta_{in}$  de las  $N_i$  senoides se agrupan en el vector de fase doppler  $\theta_i$

$$\theta_i = (\theta_{i1}, \theta_{i2} \dots \theta_{iN_i})$$

Entonces se pueden identificar las fases de los vectores  $\Theta_i$  y  $\theta_i$  después de permutar las componentes de  $\Theta_i$ . De este modo para un  $N_i$  dado se pueden obtener  $N_i!$  diferentes vectores de fase doppler con componentes igualmente distribuidas.

**B.- Canal selectivo en frecuencia**

En este caso, el canal se puede modelar como la superposición de un cierto número de canales de banda estrecha con desvanecimientos afectados por un factor de atenuación y retardo como el de la figura.



Para demostrarlo partiremos del teorema de muestreo de Nyquist

$$s_b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_b(nT) \text{sinc}((t - nT)\pi / T) \quad T \leq \frac{1}{B_s}$$

$$S_b(f) = T \sum_n s_b(nT) \exp(-j2\pi f nT) \quad |f| \leq B_s / 2$$

A la salida del canal se obtiene

$$y_b(t) = T \sum_n s_b(nT) \int C(f;t) \exp(j2\pi f(t - nT)) df = T \sum_n s_b(t - nT) c(\tau - nT;t)$$

o, alternativamente,

$$y_b(t) = \sum_n s_b(t - nT) c_n(t)$$

Si se define

$$c_n(t) = T c(nT;t)$$

entonces

$$y_b(t) = \sum_n s_b(t - nT) c_n(t)$$

A partir de aquí, la respuesta impulsional del canal se puede expresar como

$$c(\tau;t) = \sum_n c_n(t) \delta(\tau - nT)$$

lo cual se corresponde con la figura anterior. En la práctica, el número de retardos a considerar, teniendo en cuenta el "delay spread"  $T_m$  es  $L = [T_m B_s] + 1$  y como  $B_s > B_c$  los  $c_n(t)$  serán estadísticamente independientes.

Finalmente a modo de ejemplo se muestran los diferentes modelos de propagación considerados en el estándar móvil GSM ( $T_s = 3.69 \mu\text{seg}$ ) para diferentes entornos

