VARIABLE COMPLEXA

- variable complexa: $s = \sigma + j\,\omega$

- mòdul: $|s| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$

- angle (fase): $\theta = \mathrm{arctg}(\omega / \sigma)$

- variable complexa conjugada: $s = \sigma - j\,\omega$

- mòdul del producte o del quocient

- fase del producte o del quocient

TEOREMA D'EULER

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots..$$

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots..$$

$$\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta = 1 + j\theta + \frac{\left(j\theta^2\right)}{2!} + \frac{\left(j\theta^3\right)}{3!} + \frac{\left(j\theta^4\right)}{4!} + \ldots..$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots...$$

$$\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta = e^{j\theta} \qquad \textit{teorema de Euler}$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$\mathrm{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$ transformada de Laplace

$$\mathrm{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$ transformada inversa de Laplace

propiedades

1 - $\mathrm{L}[Af(t)] = A\mathrm{L}[f(t)]$ A = cte

2.- $\mathrm{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathrm{L}[f_1(t)] + \mathrm{L}[f_2(t)]$

veure exemple

- s = una variable complexa
- f(t) una funció del temps t, tal que f(t) = 0 per t<0
- F(s) transformada de Laplace de f(t)

Transformada de Laplace: EXEMPLE

Funció exponencial:

f(t) = 0 per t < 0

f(t) = Ae-$^{\alpha t}$ per t <= 0

$$L[Ae^{-\alpha t}] = AL[e^{-\alpha t}] = A\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = A\int_0^{\infty} e^{-(\alpha + s)t} = \frac{A}{s+\alpha}$$

Altres exemples:

- Funció graó
- Funció rampa

Transformada de Laplace: TAULES

Transformada de Laplace: TAULES

Transformada de Laplace: DERIVADA

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$ primera derivada

segona derivada

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = L\left[\frac{d}{dt}g(t)\right] = sG(s) - g(0) = sL[g(t)] - g(0) =$$

$$sL\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] - df(0)/dt = s^2F(s) - sf(0) - df(0)/dt$$

derivada n-èsima

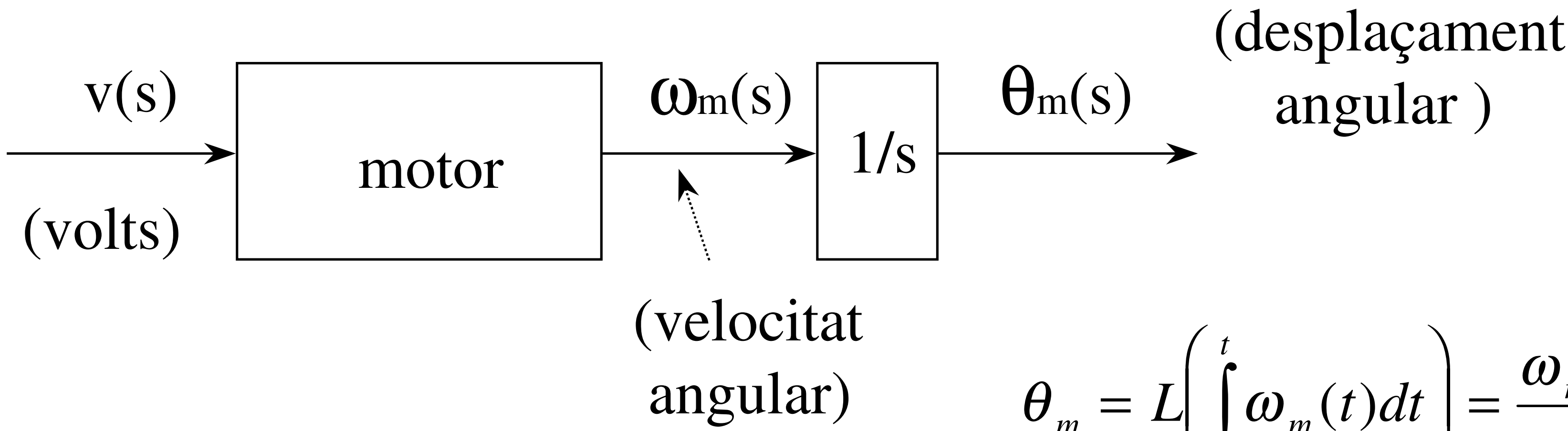
exemple Dorf

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - \cdots - s\overset{(n-2)}{f}(0) - \overset{(n-1)}{f}(0)$$

Transformada de Laplace: INTEGRAL

$$L\left(\int_0^t f(t)dt\right) = \frac{F(s)}{s}$$

La integració en el domini del temps es converteix en divisió en el domini de *s*.

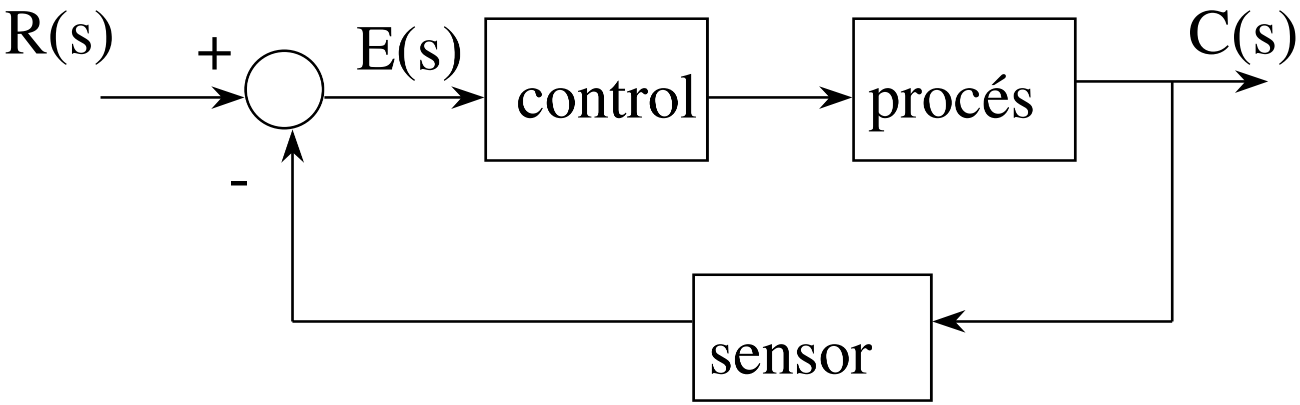


$$\theta_m = L\left(\int_0^t \omega_m(t)dt\right) = \frac{\omega_m(s)}{s}$$

TEOREMA DEL VALOR FINAL

$$f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Exemple:



- reposta del sistema en règim permanent: $c(\infty)$
- error (precisió) del sistema en règim permanent: $e(\infty)$

TEOREMA DEL VALOR INICIAL

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

El teorema del **valor inicial** i del **valor final** permeten predir el comportament del sistema en el domini del temps, sense haver de transformar les funcions en **s** a funcions del temps.

Exemple Dorf sistema tipus 0: determinar valor de k per mantenir l’error en règim per sota d’un cert valor.

Transformada inversa de Laplace: CONCEPTE

$$\mathrm{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

$$\mathrm{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(S)e^{st}\,ds$$

- En general, no s'utilitza l'expressió matemàtica anterior.
- La forma més convenient es l'ús de les taules de Laplace.
- Si no es troba en la taula la transformada inversa de F(s), es pot desenvolupar en *fraccions simples*, i escriure F(s) en termes de funcions simples de **s**, per les quals es coneixen les transformades inverses de Laplace.

Transf. inversa de Laplace: expansió en fraccions parcials

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

En la teoria d'Automàtica, la tranformada de f(t), F(s), normalment és d'aquesta forma. A(s) i B(s) són polinomis en **s**. El grau de B(s) és menor que el de A(s). Veure exemples.

Si F(s) es descomposa en les seves components

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + ... + F_n(s)$$

aleshores

$$f(t) = L^{-1}(F(s)) = L^{-1}[F_1(s)] + L^{-1}[F_2(s)] + ... + L^{-1}[F_n(s)] =$$
$$= f_1(t) + f_2(t) + ... + f_n(t)$$

POLS I ZEROS D'UNA FUNCIÓ

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

- Funció d'ordre 2 (grau del polinomi del denominador)
- zeros: arrels del polinomi del numerador -B(s)-.
- pols: arrels del polinomi del denominador -A(s)-

Per aplicar el mètode d'expansió en fraccions simples i trobar la transformada inversa de Laplace de F(s), s'han de conèixer prèviament les arrels del polinomi del denominador: cal factorizar el polinomi del denominador.

Expansió en fraccions simples: F(s) conté pols diferents

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)....(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)....(s+p_n)}$$

on p_1, p_2,...., p_n y z_1, z_2,...., z_m són quantitats reals o complexes.
Si F(s) conté només pols diferents, pot expandir-se en:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{(s+p_1)} + \frac{a_2}{(s+p_2)} + \ldots + \frac{a_n}{(s+p_n)}$$

on els diferents coeficients $\mathbf{a_k}$ (k=1,2,...,n) són constants.
$\mathbf{a_k}$ s'anomena *residu* en el pol de $\mathbf{s = -p_k}$.

$$a_k = \left[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k}$$

Expansió en fraccions simples: F(s) conté pols diferents

ır la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

La expansión de $F(s)$ en fracciones parciales es

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$$

le a_1 y a_2 se determinan utilizando la ecuación (1-11).

$$a_1 = \left[(s+1)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-1} = \left[\frac{s+3}{s+2}\right]_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = \left[(s+2)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-2} = \left[\frac{s+3}{s+1}\right]_{s=-2} = -1$$

nces

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}\right] \\ &= 2e^{-t} - e^{-2t} \qquad (t \geq 0) \end{aligned}$$

Expansió en fraccions simples

Comentar altres cassos:

- F(s) té pols complexes conjugats
- F(s) té pols múltiples

Exemples

Resolució d'equacions diferencials lineals invariants en el temps

Exemple: $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0, \quad x(0) = a,$

- $$[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + 3[sX(s) - x(0)] + 2X(s) = 0$$
- $$[s^2X(s) - as - b] + 3[sX(s) - a] + 2X(s) = 0$$
- $$(s^2 + 3s + 2)X(s) = as + b + 3a$$
- $$X(s) = \frac{as + b + 3a}{s^2 + 3s + 2} = \frac{as + b + 3a}{(s+1)(s+2)} = \frac{2a + b}{s + 1} - \frac{a + b}{s + 2}$$
- $$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2a+b}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a+b}{s+2}\right] \\ &= (2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t} \qquad (t \geq 0) \end{aligned}$$