CRITERI D'ESTABILITAT DE ROUTH-HURWITZ

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_o s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_o s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + b_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$a_i, b_j = constants$$

$$m \leq n$$

El criteri d'estabilitat de Routh permet determinar en un sistema la quantitat de pols que hi ha en el semiplà dret del pla s (inestables), sense que calgui factoritzar el polinomi característic (denominador de la funció de transferència).

La *condició necessària però no suficient* d'estabilitat, és que tots els coeficients de l'equació característica (A(s)=0) siguin diferents de zero, i que tots tinguin igual signe.

CRITERI D'ESTABILITAT DE ROUTH

Si tots els coeficients de A(s) tenen igual signe, es coloquen en files i columnes d'acord amb l'esquema annex:

Càlcul dels coeficients b_i, c_i, d_i, ...:
vegeu exemples

$$\begin{array}{llllllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \bullet & \bullet & \bullet \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \bullet & \bullet & \bullet \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & & & \\
s^1 & f_1 & & & & & & \\
s^0 & g_1 & & & & & &
\end{array}$$

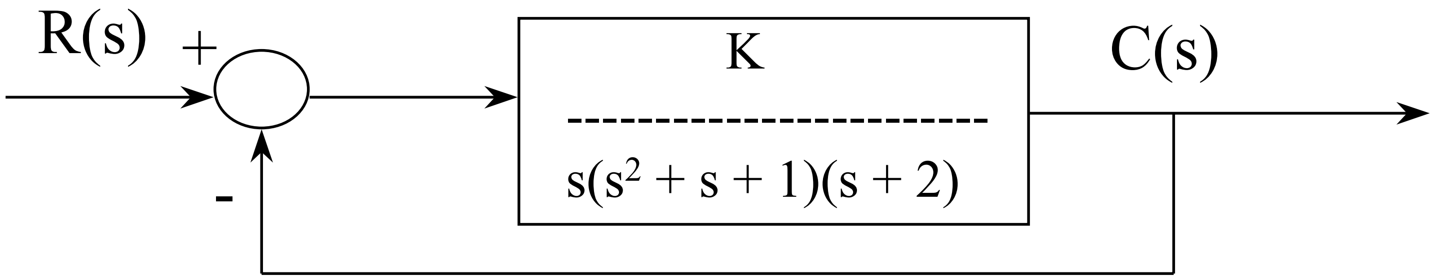
Criteri de Routh: cassos especials

- Cas 1: No hi ha zeros en la primera columna
- Cas 2: Un terme de la primera columna és zero però hi han termes no nuls en la mateixa fila.
- Cas 3: Tots els termes d'una fila són zero.

Exemple: $A(s)=s^3 + 2s^2 + s + 2$

Exemple: $A(s)=s^3 + 2s^2 + 4s + 8$

Exemple: determinar el rang de k per al que el sistema és estable



Estabilitat en el domini de la freqüència

- El diagrama de Nyquist permet determinar si un sistema és estable o inestable i també proporciona informació de com millorar l'estabilitat, en el cas que calgui.

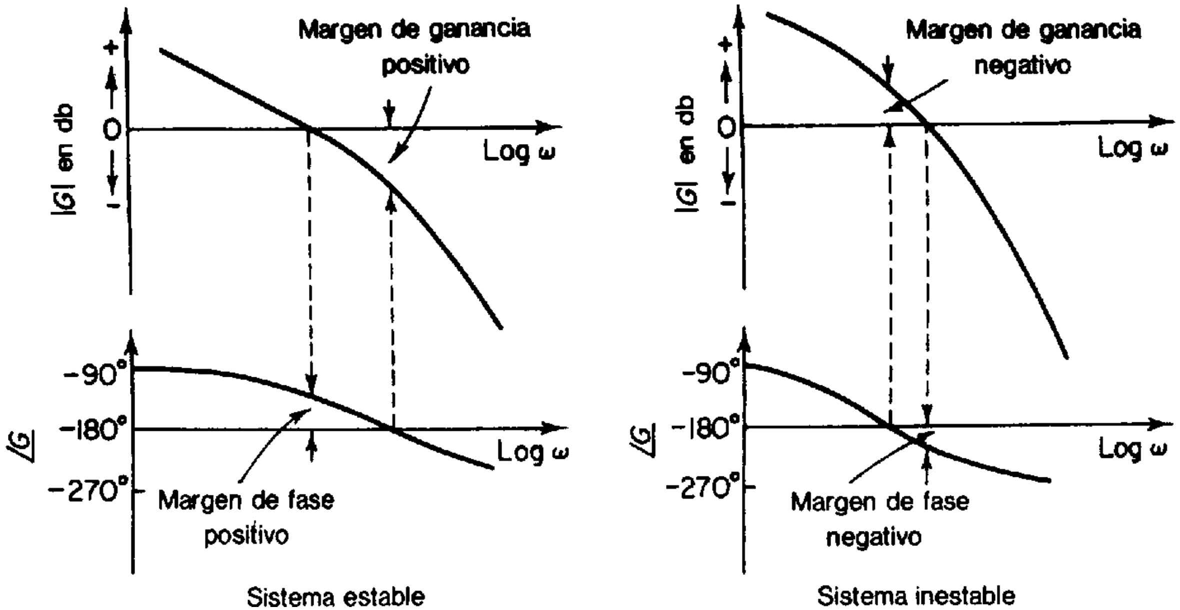
- L'anàlisi d'estabilitat es fa en base als termes de marge de guany i marge de fase.

- El marge de guany i el de fase es basen en l'anàlisi de la resposta en freqüència, a la freqüència per a la que la fase és de -180 graus, o a la freqüència per a la que el guany és de 0 db.

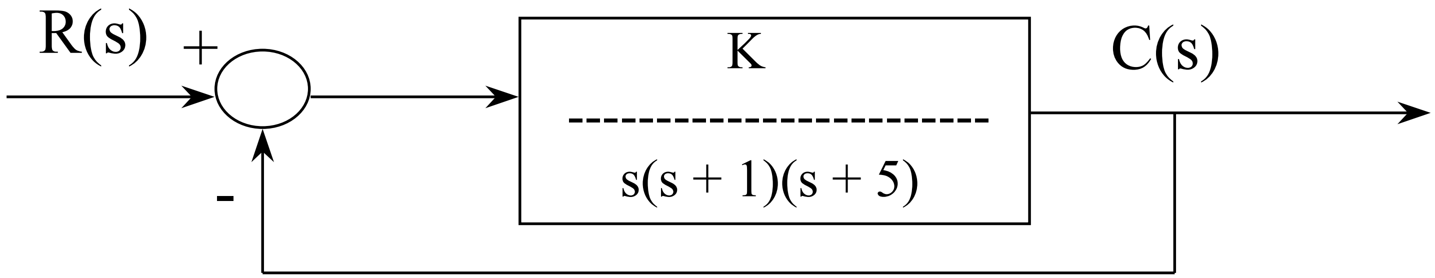
Margen de fase y de ganancia

Margen de fase: Es la cantidad de retraso de fase que se requiere añadir a la frecuencia de transición o cruce de ganancia, para llevar al sistema al borde de la inestabilidad. La frecuencia de cruce es aquella a la cual |G(jw)| = 1, es decir 0 db.

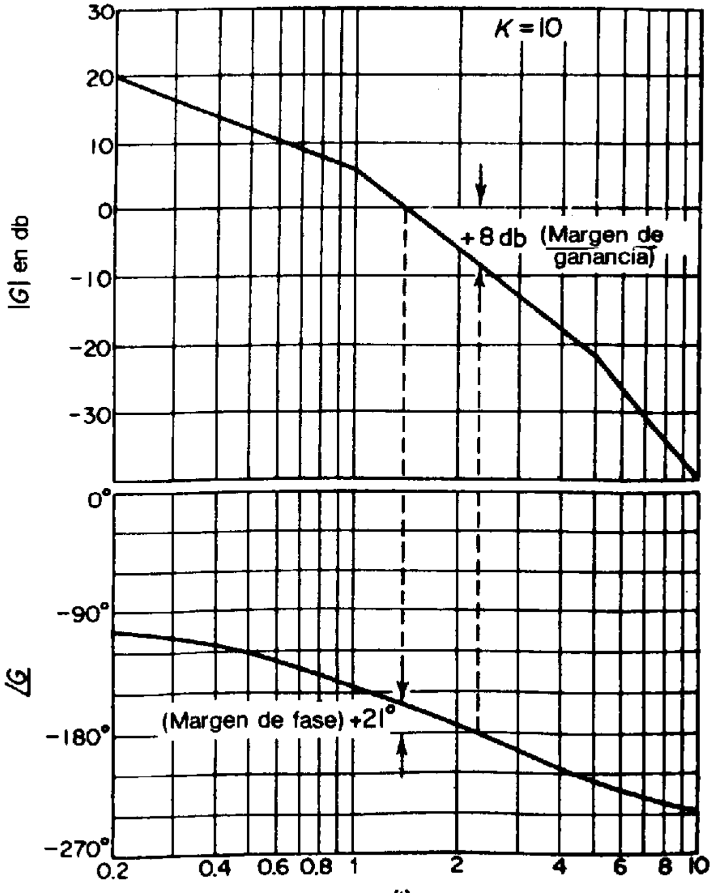
Margen de ganancia: El margen de ganancia es el reciproco de la magnitud de |G(jw)| a la frecuencia w1 en la que el ángulo de fase es de -180 grados. El margen de ganancia Kg se obtiene como: Kg = 1 / |G(jw1)|.



Margen de fase y de ganancia: ejemplo



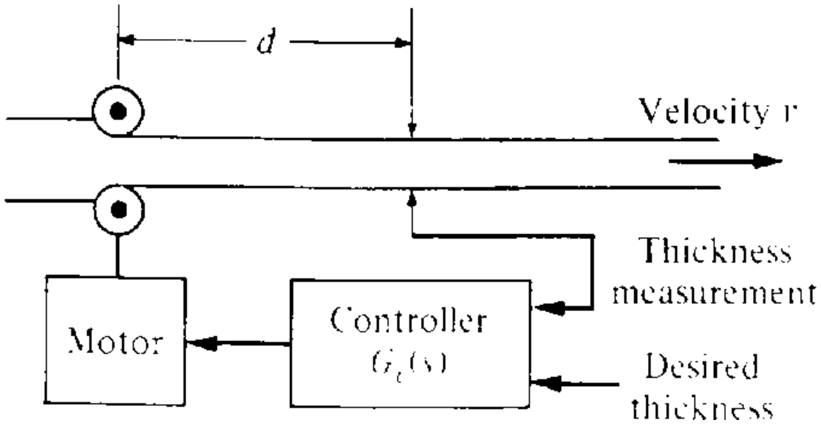
Obtener los márgenes de fase y de ganancia del sistema para los casos en que K=10 y K = 100. Para el segundo caso, en cuanto hay que disminuir K para que el sistema sea estable.



Estabilidad de los sistemas de control con atraso del tiempo

Un atraso de tiempo puro, sin atenuación, se presenta por la función de transferencia: $Gd(jw) = e^{-jwT}$. Este término no introduce ningún polo o cero adicional en la función de transferencia. Solo altera en ángulo de fase sin modificar la magnitud.

Ejemplo: El sistema de control de una laminadora ajusta a través de un motor la separación de los rodillos de tal forma que se minimiza el error.

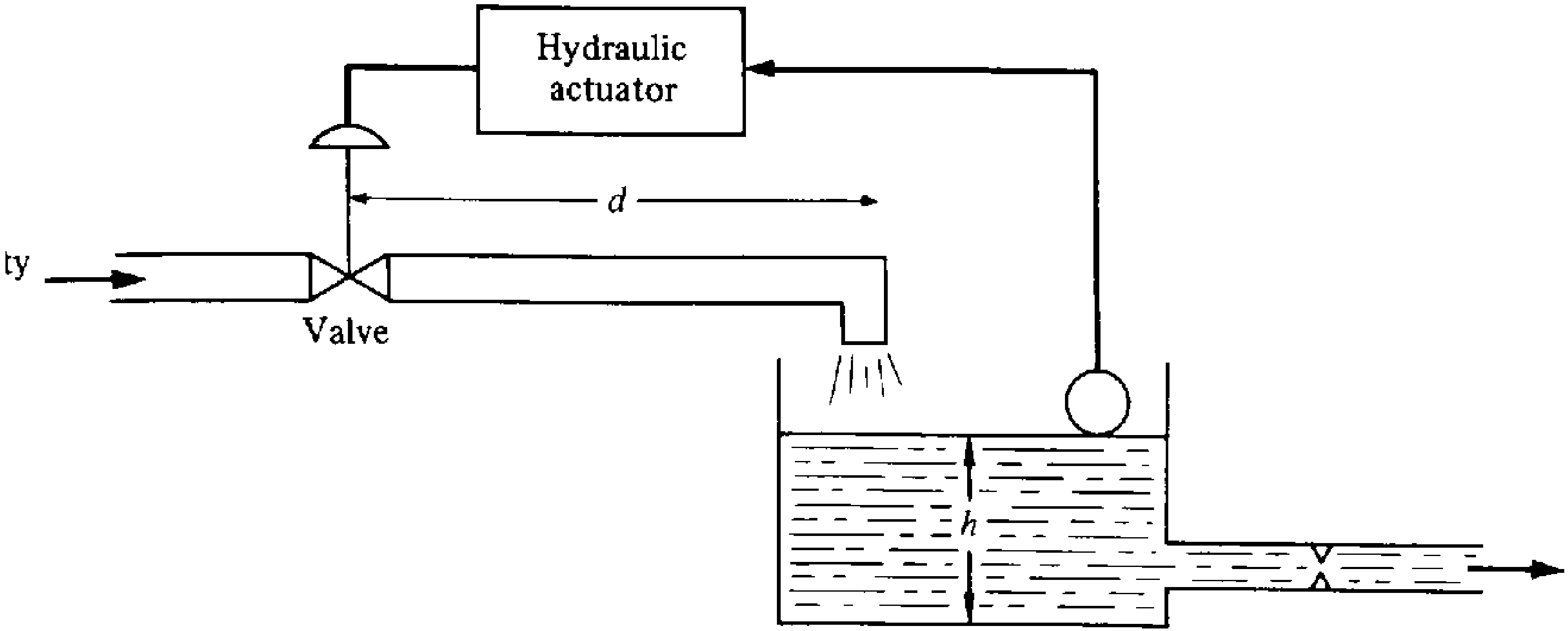


Atraso en el tiempo: T = d/v

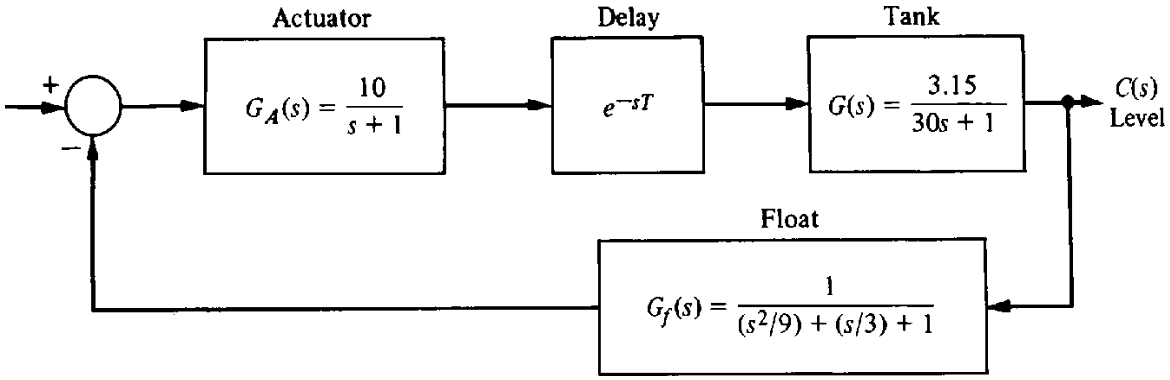
F.T. en red abierta:
$GH(jw) = G(jw)Gc(jw)e^{-jwT}$

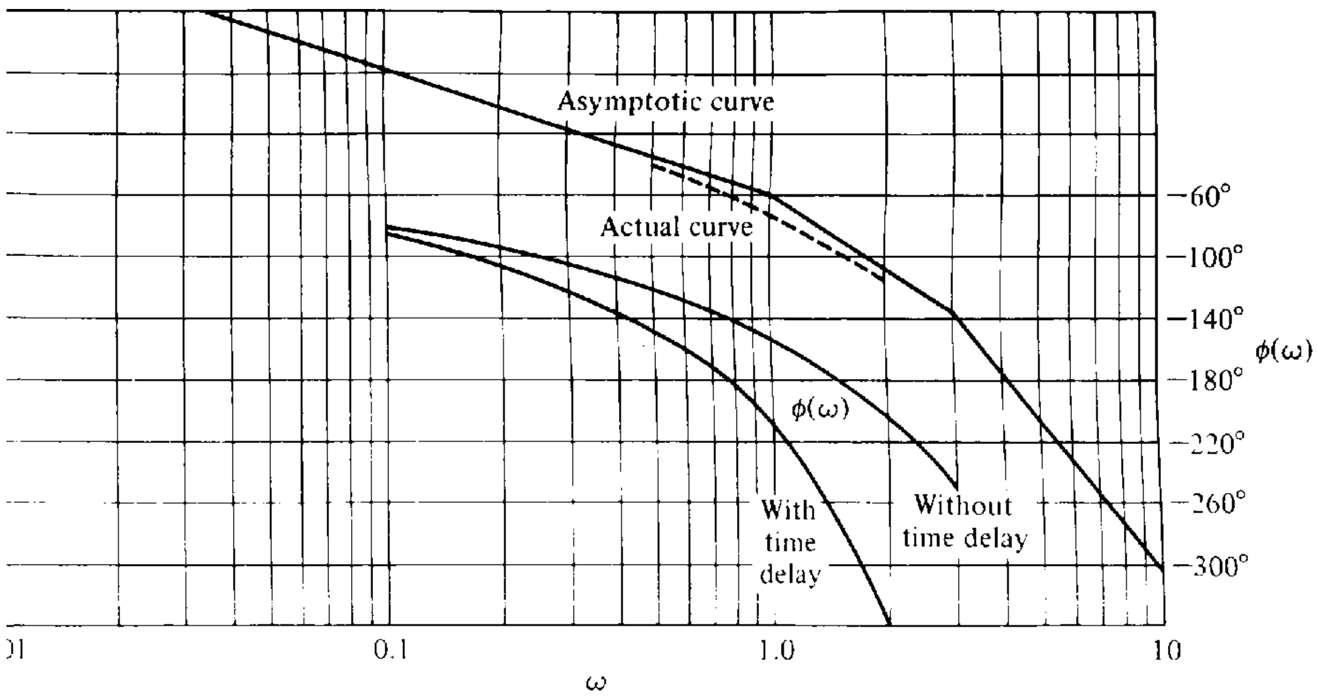
Se representa el diagrama de Bode sin retardo y ha continuación se añade este. El cambio de fase que aporta el retardo es $-wT$ (rad.) = $-(wT/2\pi) * 360$ grados

Estabilidad de los sistemas de control con atraso del tiempo: Ejemplo



Estabilidad de los sistemas de control con atraso del tiempo: Ejemplo





Estabilidad de los sistemas de control con atraso del tiempo

Un atraso de tiempo en un sistema de retroalimentación introduce una última fase adicional y da como resultado un sistema menos estable. Por tanto, en estos casos, frecuentemente es necesario reducir la ganancia de la red con el objeto de obtener una respuesta estable.

Sin embargo, el precio de la estabilidad es el aumento resultante en el error del sistema en estado estacionario cuando se reduce la ganancia de la red.

Error estacionario y tipos

El que un sistema dado presente o no error estacionario ante un determinado tipo de señal de entrada, depende del tipo de F.T. de lazo abierto del sistema.

Los sistema de control se pueden clasificar de acuerdo a su capacidad de seguir entradas escalón, rampa, parabólica, ...

Dado G(s)H(s):

$$G(s)H(s) = \frac{K\left(T_a s + 1\right)\left(T_b s + 1\right)\cdots\left(T_m + 1\right)}{s^N\left(T_1 s + 1\right)\left(T_2 s + 1\right)\cdots\left(T_p + 1\right)}$$

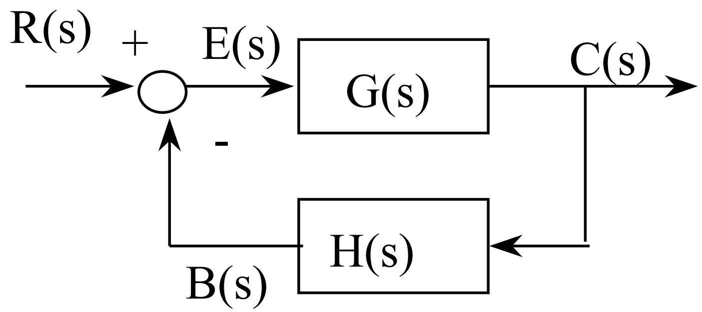
El termino S^N en el denominador representa un polo de multiplicidad N en el origen (N integradores). Un sistema se denomina tipo 0, tipo 1, tipo 2,..., si N=0, N=1, N=2, ..., respectivamente.

Al aumentar el tipo aumenta la exactitud en régimen permanente; sin embargo al aumentar el tipo disminuye la estabilidad.

Errores en estado estacionario

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)} R(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$$



Constante Kp de error estático de posición:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)H(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1+G(0)H(0)}$$

$$Kp = \lim_{s\to 0} G(0)H(0)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+Kp}$$

N=0 => Kp = K
N>=1=>Kp = infinito

Constante Kv de error estático de velocidad

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1+G(s)H(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{sG(s)H(s)}$$

$$Kv = \lim_{s \to 0} sG(0)H(0)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{Kv}$$

El termino velocidad expresa el error estacionario ante una entrada en rampa unitaria. El error de velocidad no es en la velocidad, sino en la posición debido a una entrada en rampa.

Si N=0 $$K_v = \lim_{s \to 0} = \frac{sK(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p+1)} = 0$$

Si N=1 $$K_v = \lim_{s \to 0} = \frac{sK(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p+1)} = K$$

Si N>=2 $$K_v = \lim_{s \to 0} = \frac{sK(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m+1)}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p+1)} = \infty$$

Constante Ka de error estático de aceleración

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)H(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s^2 G(s)H(s)}$$

$$Ka = \lim_{s\to 0} s^2 G(0)H(0)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{Ka}$$

Nótese que el error de aceleración, que es el error en estado estacionario causado por una entrada parabólica, es un error en posición.

Si N=0 $$K_a = \lim_{s\to 0} = \frac{s^2 K\left(T_a s+1\right)\left(T_b s+1\right)\cdots\left(T_m+1\right)}{\left(T_1 s+1\right)\left(T_2 s+1\right)\cdots\left(T_p+1\right)} = 0$$

Si N=1 $$K_a = \lim_{s\to 0} = \frac{s^2 K\left(T_a s+1\right)\left(T_b s+1\right)\cdots\left(T_m+1\right)}{s\left(T_1 s+1\right)\left(T_2 s+1\right)\cdots\left(T_p+1\right)} = 0$$

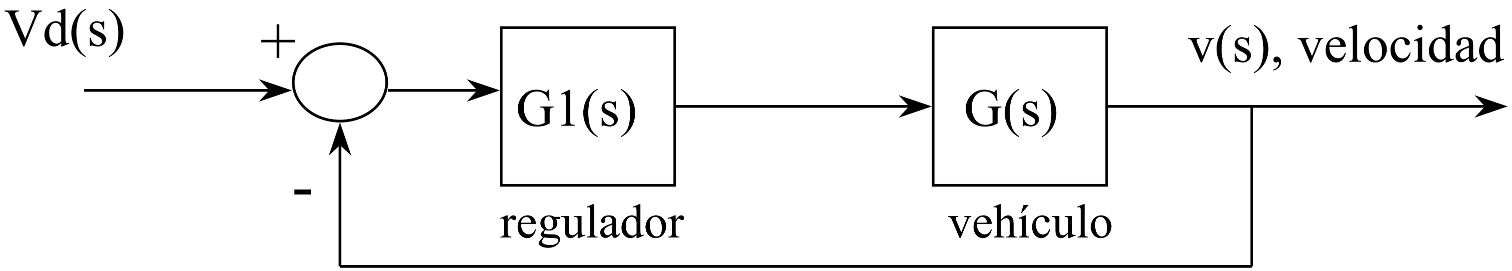
Si N=2 $$K_a = \lim_{s\to 0} = \frac{s^2 K\left(T_a s+1\right)\left(T_b s+1\right)\cdots\left(T_m+1\right)}{s^2\left(T_1 s+1\right)\left(T_2 s+1\right)\cdots\left(T_p+1\right)} = K$$

Error en estado estacionario en términos de la ganancia k

	$\text{gra}\,o$	$rampa\_vel$	$rampa\_d'acceler.$
$N=0$	$\dfrac{1}{1+K}$	∞	∞
$N=1$	0	$\dfrac{1}{K}$	∞
$N=2$	0	0	$\dfrac{1}{K}$

Error en estado estacionario: Ejemplo

Sistema de control de velocidad de un automóvil



$$G1(s) = K1 + K2 /$$

$$G(s) = \frac{Ke}{\tau s + 1}$$

1- error en regimen permanente para una entrada de posición si K2=0 o K2 > 0

2- error para una entrada de velocidad si K2>0