1. Determinar el domini de les funcions que tenen com a definició analítica:

(a) $f(x) = x^2 + 1$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (d) $f(x) = \sqrt{-x}$

(e) $f(x) = \ln(x)$ (f) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

(g) $f(x) = e^{x/2} - 6\log(x+2) + 3$

2. Expreseu cadascuna de les funcions següents com a composició de dos (u,g) de tal forma que $f(x) = g(u(x))$

(a) $f(x) = (x^2 + 5x + 1)^5$ (b) $f(x) = (\cos x)^3$

(c) $f(x) = \sin(x^3)$ (d) $f(x) = \sqrt{5x^2 - x}$

3. Són iguals les funcions f1 i f2?

(a) $f1(x) = \dfrac{2x^2 + x}{x}$; $f2(x) = 2x + 1$;

(b) $f1(x) = \dfrac{2x^2 + x}{x}$; $f2(x) = 2x + 1$ si $x \neq 0$.

4. Per la funció f definida en cada cas, trobar la seva inversa si existeix i, si és així, especificar el seu domini:

(a) $f(x) = 2x - 1$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$; (c) $f(x) = x^2$;

(d) $f(x) = x^3 + 2$; (e) $f(x) = \ln(\dfrac{x}{2})$; (f) $f(x) = \sin x$;

(g) $f(x) = x^2$ si $x \leq 0$; (h) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ si $x \in (-1, 1)$.

5. Comproveu els següents límits:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2+}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^{\frac{1}{x-2}}=e^{\frac{1}{5}}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ \nexists\ \begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty\end{cases}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos(3x)}{x-\cos(3x)}=1$

6. Es considera la funció:

$$\mathrm{signe(x)}=\begin{cases}1 & \text{si x} > 0\\ 0 & \text{si x} = 0\\ -1 & \text{si x} < 0\end{cases}$$

- Calculeu signe(f(x)) quan:

  a) $\mathrm{f(x)=x^2-x-1}$ b) $\mathrm{f(x)}=\sin \mathrm{x}\,,\quad \mathrm{x}\in[0,2\pi)$

- Demostreu que $\displaystyle\mathrm{signe(x)}=\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{2}{\pi}\arctan(\mathrm{nx})$

7. Comproveu els següents límits:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x}=0$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{8x+10}=\frac{1}{8}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}|x|=0$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{8x}{x-2}\ \nexists$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$

8. Calculeu els límits de les següents funcions racionals allà on s'anul.la el denominador:

(a) $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ (b) $f(x)=\dfrac{1-x^3}{x^2-4x}$ (c) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{3-2x^2}$

9. Comproveu els següents límits:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} e^{1/x}; \qquad \text{(b)} \lim_{x\to -2} e^{x/2} - 6\ln(x+2) + 3 = +\infty.$$

10. Sabent que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, comproveu els següents límits:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin x} = 3.$$

11. Comproveu els següents límits a l'infinit:

$$\text{(a)} \lim_{x\to +\infty} \frac{2 - x - 5x^2}{3x^2 + 1} = -\frac{5}{3} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to +\infty} \frac{7x - 3}{4x^2 + 2} = 0$$

$$\text{(c)} \lim_{x\to +\infty} \left(3 + \frac{2 - 2x}{x - 4}\right)^{\frac{x+1}{2}} = e^{-3} \qquad \text{(d)} \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x - 2 = -2$$

$$\text{(e)} \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x + 5}{x + 2}\right)^{x+3} = e^3 \qquad \text{(f)} \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + x + 2}{2x + 3} + \frac{1 - x^3}{x^2 + 5} = -\infty$$

$$\text{(g)} \lim_{x\to +\infty} \sqrt{3x^2 + 5x - 9} - \sqrt{3x^2 - x + 1} = \sqrt{3}$$

12. Comproveu els següents límits:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = -4 \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{(c)} \lim_{x\to -1} \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = -2 \qquad \text{(d)} \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{\sqrt{x^2 + 3} - 2x} = 4$$

13. Comproveu que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0 \text{ i que } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

Ajuda: $\sin(x) \sim x$ i $\sin(x) - x \sim -\frac{1}{6}x^3$ en $x = 0$.

14. Sabent que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, calculeu el valor de $k \in \mathbb{R}$ per tal que la funció següent sigui contínua a tot $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{1-x} + k^2 x & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$$

15. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ x + a & x \geq 0 \end{cases}$$

Com s'ha d'escollit a per tal que la funció sigui contínua.

16. Estudieu la continuïtat i classifiqueu els punts de discontinuïtat per a les funcions:

- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$
- $g(x) = \begin{cases} x - E(x) & x \geq 0 \\ -x - E(-x) & x < 0 \end{cases}$
- $h(x) = \begin{cases} \sqrt{(x)} \sin(\frac{1}{x}) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

17. Estudieu la continuïtat de la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} |x - a| & x \leq a \\ 2|a| & x > a \end{cases}$$

18. Sabent que $\lim_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$ definiu $f(1)$ per tal que la funció

$$f(x) = \frac{\ln(3x-2)}{x^3-1}$$

sigui contínua en $x=1$. Justifiqueu la resposta.

19. Estudieu la continuïtat de la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \leq 1 \\ e^{\frac{-1}{x(x-2)}} & x > 1 \end{cases}$$

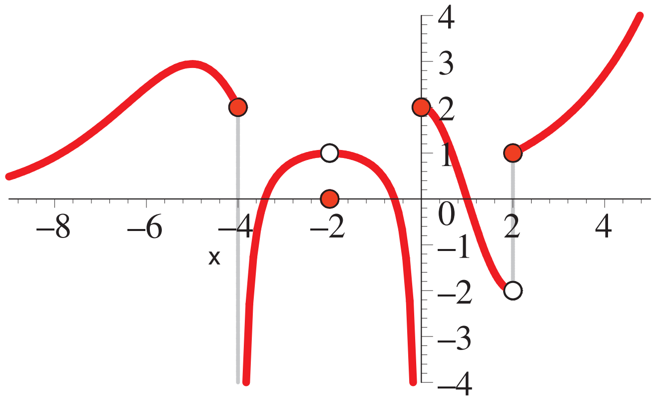
20. En la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{px+1}{x-4} & x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-x} & x > 1 \end{cases}$$

(a) Trobeu el valor de p perquè sigui contínua en $x=1$

(b) Hi ha algun altre punt en què la funció és discontínua? Doneu el tipus de discontinuitat.

21. Justifica i classifica les discontinuitats de la funció representada gràficament:



22. Diem que α és un punt fix de la funció $f(x)$ si $f(\alpha) = \alpha$. Suposem que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és contínua i $f(a) < a$, $f(b) > b$. Proveu que existeix un punt fix de f dins l'interval (a, b).

23. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció definida de la forma:

$$f(x) = x^{180} + \frac{260}{2 + x^2 + \sin^2(x)}$$

Proveu que existeix un $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = 100$.

24. Demostreu que l'equació $\ln(x) = x^2 - 4x$ té una solució real a l'interval $[1, +\infty]$.