R1. Determinar el domini de les funcions que tenen com a definició analítica:

(a) $f(x) = x^2 + 1$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (d) $f(x) = \sqrt{-x}$

(e) $f(x) = \ln(x)$ (f) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

(g) $f(x) = e^{x/2} - 6\log(x+2) + 3$

Resultat:

(a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

(b) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

(c) $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} - (-1, 1)$

(d) $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0]$

(e) $\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$

(f) $\mathrm{Dom}(f) = [1, +\infty)$

(f) $\mathrm{Dom}(g) = (-2, +\infty)$

□

R2. Expreseu cadascuna de les funcions següents com a composició de dos (u,g) de tal forma que $f(x) = g(u(x))$

(a) $f(x) = (x^2 + 5x + 1)^5$ (b) $f(x) = (\cos x)^3$

(c) $f(x) = \sin(x^3)$ (d) $f(x) = \sqrt{5x^2 - x}$

Resultat:

(a) $g(x) = x^5, \; u(x) = x^2 + 5x + 1$

(b) $g(x) = x^3, \; u(x) = \cos x$

(c) $g(x) = \sin(x), \; u(x) = x^3$

(d) $g(x) = \sqrt{x}, \; u(x) = 5x^2 - x$

$\square$

R3. Són iguals les funcions f_1 i f_2?

$$\text{(a)} \; f_1(x) = \frac{2x^2 + x}{x}; \qquad f_2(x) = 2x + 1;$$

$$\text{(b)} \; f_1(x) = \frac{2x^2 + x}{x}; \qquad f_2(x) = 2x + 1 \;\; \text{si x} \neq 0.$$

(a) Les funcions $f1$ i $f2$ no són iguals perquè no tenen el mateix domini. En particular, $x = 0 \notin \mathrm{Dom}(f1)$, i en canvi $f2(0) = 1$.

(b) Les dues funcions són iguals ja que $\mathrm{Dom}(f1) = \mathrm{Dom}(f2)$ i en els punts del domini valen el mateix.

$\square$

R4. Per la funció f definida en cada cas, trobar la seva inversa si existeix i, si és així, especificar el seu domini:

(a) $f(x) = 2x - 1$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$; (c) $f(x) = x^2$;

(d) $f(x) = x^3 + 2$; (e) $f(x) = \ln(\dfrac{x}{2})$; (f) $f(x) = \sin x$;

(g) $f(x) = x^2$ si $x \leq 0$; (h) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ si $x \in (-1, 1)$.

Resultats:

(a) $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ i $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$

(b) $f^{-1}(x) = 5 + \frac{1}{x}$ i $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\}$

(c) no té inversa. Per exemple $f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$.

(d) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$ i $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$

(e) $f^{-1}(x) = 2e^{x}$ i $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$

(f) no té inversa. Per exemple $f^{-1}(1) = \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$.

(g) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ i $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = [0, +\infty)$

(h) no té inversa. Per exemple $f^{-1}(0) = \{-1, 1\}$.

$\square$

R5. Comproveu els següents límits:

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 2+} \left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{5}}$

(d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \nexists \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$

(e) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

(f) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{x+\cos(3x)}{x-\cos(3x)} = 1$

---

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \frac{0}{0} = \mathrm{IND}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(2+x)-2}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

b) $$\lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{acotat}} = 0$$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^{\frac{1}{x-2}} = 1^{+\infty} = \text{IND}$

$$= \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x+3+x-2}{x+3}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2^+}\left(1+\frac{x-2}{x+3}\right)^{\frac{1}{x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{x-2}}\right)^{\frac{x+3}{x-2}\cdot\frac{1}{x+3}} = \lim_{x\to 2^+}\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{x-2}}\right)^{\frac{x+3}{x-2}}\right]}_{\to e}{}^{\frac{1}{x+3}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x+3}} = e^{\frac{1}{5}}.$$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \nexists$ perquè $\displaystyle \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$ i $\displaystyle \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$

e) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$

f) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\cos(3x)}{x-\cos(3x)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x}{x}+\overbrace{\frac{\cos(3x)}{x}}^{\to 0}}{\frac{x}{x}-\underbrace{\frac{\cos(3x)}{x}}_{\to 0}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$\square$

R6. Es considera la funció:

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Calculeu signe(f(x)) quan:

a) $f(x) = x^2 - x - 1$ b) $f(x) = \sin x\,,\quad x \in [0, 2\pi)$

- Demostreu que $\text{signe}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \arctan(nx)$

(a) Hem de calcular la funció $\text{signe}(f(x))$.

$$\text{signe}(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) > 0 \\ 0 & \text{si } f(x) = 0 \\ -1 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

per tant hem d'estudiar el signe de la funció $f(x)$. Els canvis de signe venen donats per $f(x) = 0 \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff$

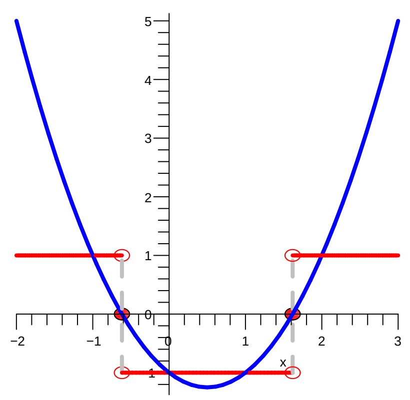
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

A més, com que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, sabem que

$$\begin{cases} \text{si } x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \infty) \Longrightarrow f(x) > 0 \\ \text{si } x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow f(x) = 0 \\ \text{si } x \in (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \Longrightarrow f(x) < 0. \end{cases}$$

Per tant:

$$\text{signe}(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \infty) \\ 0 & \text{si } x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \text{si } x \in (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \end{cases}$$



A la figura s'han representat $f(x)$ i $\text{signe}(f(x))$.

(b) Hem de calcular la funció signe($f(x)$) on $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, 2\pi)$.

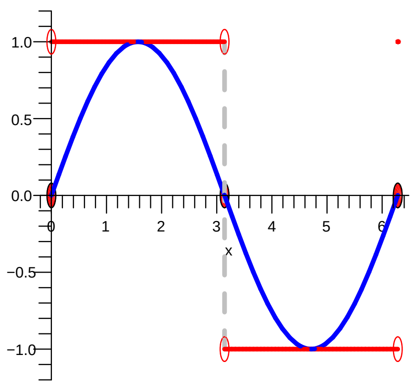
$$\sin(x) = 0 \iff x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$

per tant $f(x) = 0$ en $x = 0, \pi, 2\pi$. A més,

$$f(x) > 0 \text{ si } x \in (0,\pi) \quad \text{i} \quad f(x) < 0 \text{ si } x \in (\pi, 2\pi).$$

Per tant:

$$\text{signe(f(x))} = \begin{cases} 1 & \text{si x} \in (0,\pi) \cup (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \infty) \\ 0 & \text{si x} = 0, \pi, 2\pi \\ -1 & \text{si x} \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$



A la figura s'han representat $f(x)$ i signe($f(x)$).

$\square$

R7. Comproveu els següents límits:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x} = 0$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{8x+10} = \frac{1}{8}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} |x| = 0$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{8x}{x-2} \nexists$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

---

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x} = \frac{0}{1+0} = 0$

b) $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \sin\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\right) = \sin 0 = 0$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{8x+10} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{8x}{x}+\frac{10}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+0}{8+0} = \frac{1}{8}$

d) $\lim_{x\to 0} |x| = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} |x| = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

e) $\lim_{x\to 2} \frac{8x}{x-2} = \frac{16}{0}$ =IND

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{8x}{\underbrace{x-2}_{>0}} = \frac{16}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{8x}{\underbrace{x-2}_{<0}} = \frac{16}{0^-} = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 2} \frac{8x}{x-2} \nexists$$

f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 0 \cdot \text{acotat} = 0$

□

R8. Calculeu els límits de les següents funcions racionals allà on s'anul.la el denominador:

(a) $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ (b) $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2-4x}$ (c) $f(x) = \frac{x^3+x}{3-2x^2}$

---

a) $1 - x^2 = 0 \iff x = \pm 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1}{0} = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1}{0^-} = +\infty \end{array}\right.$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{-1}{0} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

b) $x^2 - 4x = 0 \iff x(x-4) = 0 \iff x = 0\ ,\ 4$

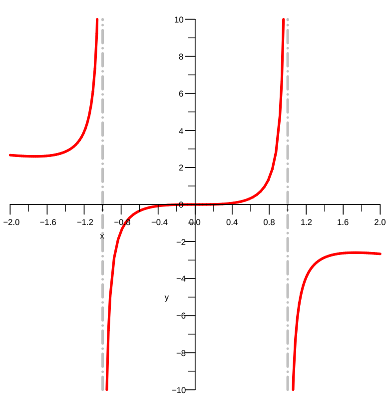
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-x^3}{x^2-4x} = \frac{1}{0} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-x^3}{x^2-4x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1-x^3}{x^2-4x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{1-x^3}{x^2-4x} = \frac{-64}{0} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 4^+} \frac{1-x^3}{x^2-4x} = \frac{-64}{0^+} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 4^-} \frac{1-x^3}{x^2-4x} = \frac{-64}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

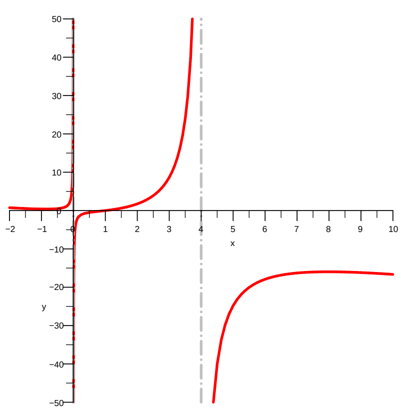
c) $3 - 2x^2 = 0 \implies x^2 = \dfrac{3}{2} \implies x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

$$\lim_{x\to \sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{x^3+x}{3-2x^2} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{6}}{0} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to \sqrt{\frac{3}{2}}^+} \frac{x^3+x}{3-2x^2} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{6}}{0^-} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to \sqrt{\frac{3}{2}}^-} \frac{x^3+x}{3-2x^2} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{6}}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

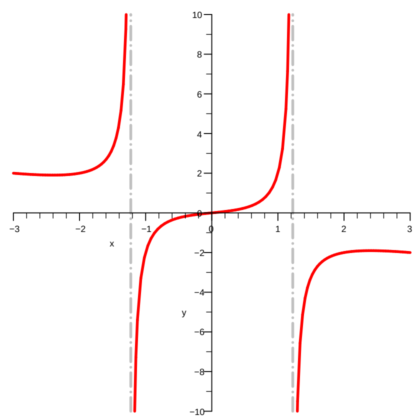
$$\lim_{x\to -\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{x^3+x}{3-2x^2} = \frac{-\frac{5}{4}\sqrt{6}}{0} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to -\sqrt{\frac{3}{2}}^+} \frac{x^3+x}{3-2x^2} = \frac{-\frac{5}{4}\sqrt{6}}{0^+} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -\sqrt{\frac{3}{2}}^-} \frac{x^3+x}{3-2x^2} = \frac{-\frac{5}{4}\sqrt{6}}{0^-} = +\infty \end{cases}$$



(a)



(b)



(c)

$\square$

R9. Comproveu els següents límits:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} e^{1/x}; \qquad \text{(b)} \lim_{x\to -2} e^{x/2} - 6\ln(x+2) + 3 = +\infty.$$

---

a) $\lim_{x\to 0} e^{1/x} \quad \nexists$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

si $x \to 0^+$, llavors $\frac{1}{x} \to \frac{1}{0^+} = +\infty$ i $e^{+\infty} \to +\infty$.

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$$

si $x \to 0^-$, llavors $\frac{1}{x} \to \frac{1}{0^-} = -\infty$ i $e^{-\infty} \to 0$.

b) $$\lim_{x\to -2^+} \underbrace{e^{x/2}}_{\to e^{-1}} - \underbrace{6\ln(x+2)}_{\to -\infty} + 3 = \text{“} - 6(-\infty)\text{”} = +\infty$$

$\square$

R10. Sabent que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, comproveu els següents límits:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin x} = 3.$$

---

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin x} = 3 \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 3\cdot 1 = 3$$

$\square$

R11. Comproveu els següents límits a l'infinit:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-x-5x^2}{3x^2+1} = -\dfrac{5}{3}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x-3}{4x^2+2} = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3+\dfrac{2-2x}{x-4}\right)^{\frac{x+1}{2}} = e^{-3}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x-2 = -2$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{x+3} = e^3$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x+2}{2x+3} + \dfrac{1-x^3}{x^2+5} = -\infty$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+5x-9} - \sqrt{3x^2-x+1} = \sqrt{3}$

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-x-5x^2}{3x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{5x^2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \frac{0-0-5}{3+0} = -\frac{5}{3}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x-3}{4x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{7x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{7}{x}}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty} \left(3+\frac{2-2x}{x-4}\right)^{\frac{x+1}{2}} = 1^{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(3+\frac{2-2x}{x-4}\right)^{\frac{x+1}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2x-8+2-2x}{x-4}\right)^{\frac{x+1}{2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{-6}{x-4}\right)^{\frac{x+1}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{4-x}{6}}\right)^{\frac{4-x}{6}\cdot\frac{6}{4-x}\cdot\frac{x+1}{2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{4-x}{6}}\right)^{\frac{4-x}{6}}\right]^{\frac{6}{4-x}\cdot\frac{x+1}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3(x+1)}{4-x}} = e^{-3}$$

d) $$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{+\infty} - \underbrace{x}_{+\infty} - 2 = +\infty - \infty = \text{IND}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x-2$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}-2$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}-2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}-2=-2$$

e) Denotem per L$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{x+3}$, llavors

$$\ln(\mathrm{L}) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{x+3}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{x+3}\right) = \lim_{x\to+\infty}(x+3)\ln\left(\frac{x+5}{x+2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(x+3)\ln\left(\frac{x+2+3}{x+2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(x+3)\ln\left(1+\frac{3}{x+2}\right) =$$

$$\underset{*}{=} \lim_{t\to0^+}\left(\frac{3}{t}-2+3\right)\ln(1+t) = \lim_{t\to0^+}\left(\frac{3}{t}-1\right)\ln(1+t)$$

$$= \lim_{t\to0^+}\frac{3-3t}{t}\cdot\ln(1+t) = \lim_{t\to0^+}(3-3t)\underbrace{\frac{\ln(1+t)}{t}}_{\to1}$$

$$= \lim_{t\to0^+}(3-3t) = 3-0=3$$

$*$ considerem el canvi de variable $t=\frac{3}{x+2}$

llavors $x=\frac{3}{t}-2$ i $x\to+\infty \Longrightarrow t\to0^+$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+5x-9} - \sqrt{3x^2-x+1} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^2+5x-9} - \sqrt{3x^2-x+1}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{3x^2+5x-9} + \sqrt{3x^2-x+1}}{\sqrt{3x^2+5x-9} + \sqrt{3x^2-x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x-9-(3x^2-x+1)}{\sqrt{3x^2+5x-9} + \sqrt{3x^2-x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x-10}{\sqrt{3x^2+5x-9} + \sqrt{3x^2-x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{6x}{x} - \frac{10}{x}}{\sqrt{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{9}{x^2}} + \sqrt{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \frac{6-0}{\sqrt{3+0-0} + \sqrt{3-0+0}} = \frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$\square$

R13. Comproveu que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = 0 \text{ i que } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

Ajuda: $\sin(x) \sim x$ i $\sin(x) - x \sim -\frac{1}{6}x^3$ en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{-\frac{1}{6}x^3} \cdot \left(-\frac{1}{6}x\right) = \lim_{x\to 0} 1 \cdot \left(\frac{-1}{6}x\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{-\frac{1}{6}x^3} \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6}$$

$\square$

R14. Sabent que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$, calculeu el valor de $k\in\mathbb{R}$ per tal que la funció següent sigui contínua a tot $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x-1)}{1-x}+k^2x & x\neq 1\\ k & x=1\end{cases}$$

Si $x\neq 1$, la funció f és contínua per ser suma i quocient de funcions contínues.

La funció k^2x és contínua per ser polinòmica i la funció $\frac{\sin(x-1)}{1-x}$ és contínua per ser quocient de dues funcions contínues on el denominador no s'anul·la.

Vegem si f és contínua en x=1. f serà contínua en x=1 si

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x).$$

Com que $f(1)=k$, f serà contínua si $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=k$:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{1-x}+k^2x\underset{*}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{-y}+k^2(y+1)=$$

$$*\text{ canvi:}\quad y=x-1\Longrightarrow x=y+1$$

$$\text{i } x\to 1\Longrightarrow y\to 0$$

$$=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}+\lim_{y\to 0}k^2(y+1)=-1+k^2.$$

Per tant, perque f sigui contínua

$$k=k^2-1\Longleftrightarrow k^2-k-1=0\Longleftrightarrow \boxed{k=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}}$$

□

R15. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ x + a & x \geq 0 \end{cases}$$

Com s'ha d'escollir a per tal que la funció sigui contínua.

---

f és contínua si $x \neq 0$ per ser polinòmica i exponencial. Perquè també sigui contínua en $x = 0$ cal que

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(0) = 0 + a = a \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1 \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x + a = a \end{array}\right\} \text{per tant } a = 1.$$

□

R16. Estudieu la continuïtat i classifiqueu els punts de discontinuïtat per a les funcions:

- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$
- $g(x) = \begin{cases} x - E(x) & x \geq 0 \\ -x - E(-x) & x < 0 \end{cases}$
- $h(x) = \begin{cases} \sqrt(x) \sin(\frac{1}{x}) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$\boxed{f}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

f és contínua en tot punt $x \neq 0$. Estudiem la continuïtat en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} \sqrt{-x} = 0 \quad , \quad f(0) = 1$$

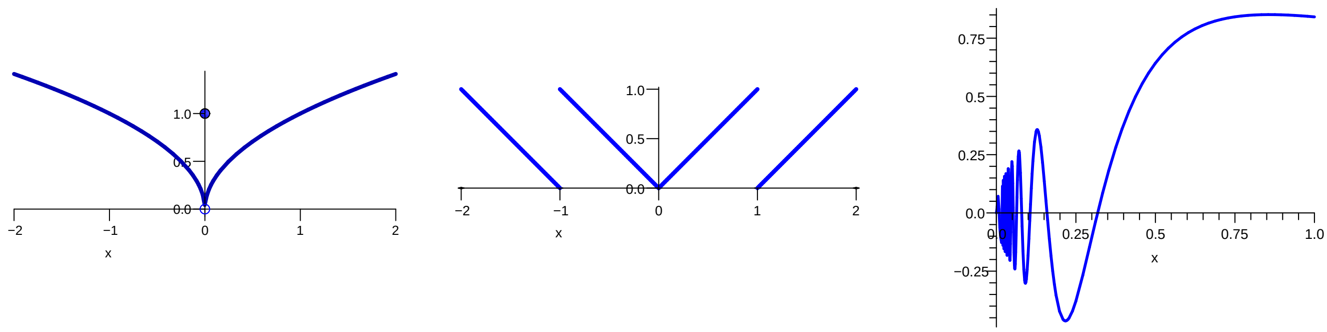
$\Longrightarrow$ f té una discontinuïtat evitable en $x = 0$.

$\boxed{g}$ g és una funció contínua en $(\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \cup \{0\}$.

$\boxed{h}$ La funció h és contínua en $x > 0$. Estudiem què passa en el zero.

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\sqrt{x}}_{0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{acotada}} = 0 \quad , \quad h(0) = 0$$

$\Longrightarrow$ h és contínua per la dreta en el zero.



(a) (b) (c)

□

R17. Estudieu la continuïtat de la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} |x - a| & x \leq a \\ 2|a| & x > a \end{cases}$$

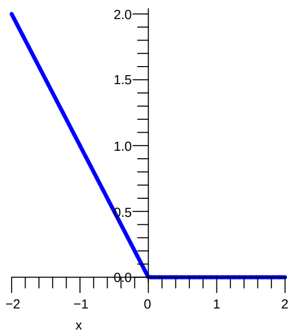
Si $x \leq a \implies x - a \leq 0 \implies |x-a| = a - x$ per tant:

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \leq a \\ 2|a| & \text{si } x > a \end{cases}$$

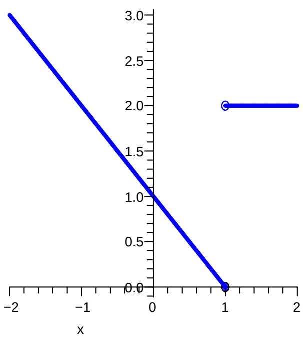
f és contínua en $x \neq a$ per ser polinòmica i constant. Estudiem què passa en $x = a$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} 2|a| = 2|a| \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} a - x = 0 \end{array}\right\} \quad \text{i } f(a) = 0.$$

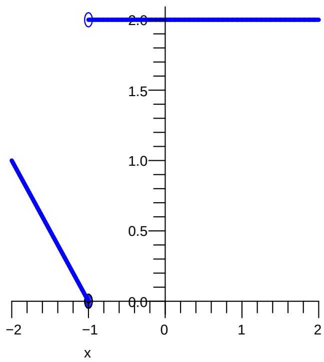
Per tant f és contínua en el punt $x = a \iff a = 0$. Sinó, f té una discontinuïtat de salt (és contínua per l'esquerra però no per la dreta).



$a = 0$



$a = 1$



$a = -1$

$\square$

R18. Sabent que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$ definiu $f(1)$ per tal que la funció

$$f(x) = \frac{\ln(3x-2)}{x^3 - 1}$$

sigui contínua en $x = 1$. Justifiqueu la resposta.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(3x-2)}{x^3-1} = \frac{0}{0} = \text{IND}$$

Per resoldre la indeterminació farem el canvi de variable

$$3x-2=1+t \Longleftrightarrow t=3x-3 \text{ i } x=\frac{t+3}{3}.$$

A més $x\to 1 \Longrightarrow t\to 0$. Llavors:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{\ln(3x-2)}{x^3-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+t)}{\left(\frac{t+3}{3}\right)^3-1}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\cdot\frac{t}{\frac{1}{27}(t+3)^3-1}\\
&= \lim_{t\to 0} 1\cdot\frac{t}{\frac{1}{27}(t+3)^3-1} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{27}(t^3+9t^2+27t+27)-1}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{27}(t^3+9t^2+27t)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{27}(t^2+9t+27)} = 1
\end{aligned}$$

Per tant, com que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, f serà contínua si $f(1)=1$. $\square$

R19. Estudieu la continuïtat de la funció següent:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\dfrac{1}{x^2}} & x\le 1\\ e^{\dfrac{-1}{x(x-2)}} & x>1\end{cases}$$

Punts conflictius: $x=0,1,2$

$\boxed{x=0}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{x^2}} = \text{"}e^{-\infty}\text{"} = 0\\[2ex] f(0) \text{ no existeix}\end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{discontinuïtat}\\ \text{evitable}\end{array}$$

$\boxed{x=1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-1}\\[2ex] \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{-1}{x(x-2)}} = e^{\frac{-1}{1(-1)}} = e^{1}\end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{discontinuïtat}\\ \text{de salt}\end{array}$$

$\boxed{x=2}$

$$\lim_{x\to 2} e^{\frac{-1}{2(x-2)}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{2(2-x)}}$$

si $x \to 2^+$ $\quad 2-x<0 \implies \frac{1}{2(2-x)} \to -\infty \quad$ i $\quad e^{-\infty} \to 0$

si $x \to 2^-$ $\quad 2-x>0 \implies \frac{1}{2(2-x)} \to +\infty \quad$ i $\quad e^{+\infty} \to +\infty$

Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad f \text{ té una discontinuïtat essencial en } x=2$$

En els altres punts, la funció és contínua. $\square$

R20. En la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{px+1}{x-4} & x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-x} & x > 1 \end{cases}$$

(a) Trobeu el valor de p perquè sigui contínua en $x=1$

(b) Hi ha algun altre punt en què la funció és discontínua? Doneu el tipus de discontinuitat.

(a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{px+1}{x-4} = \dfrac{p+1}{-3} = -\dfrac{p+1}{3} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{x^2-x} = \dfrac{0}{0} = \text{IND} \\ \qquad = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x} = 1 \\ f(1) = -\dfrac{p+1}{3} \end{array}\right\}$$

Per tal que f sigui contínua

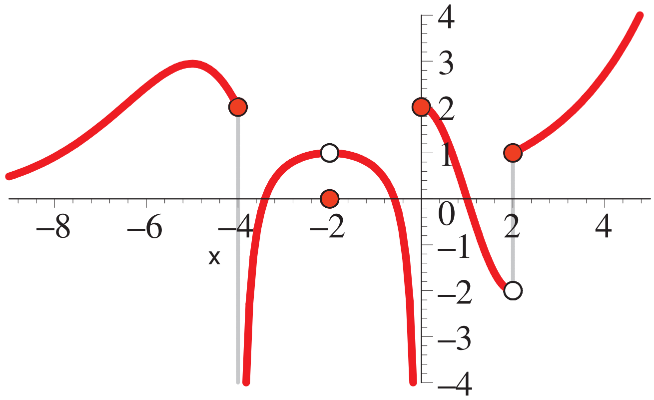
$$-\frac{p+1}{3} = 1 \implies -p-1=3 \implies \boxed{p=-4}.$$

b) La funció és contínua en tots els altres punts perquè $\frac{px+1}{x-4}$ té problemes en $x=4 \not\leq 1$.

De la mateixa manera, la funció $\frac{x-1}{x^2-x} = \frac{x-1}{x(x-1)}$ té problemes en $x=0 \not> 1$ i en $x=1$ que ja l'hem estudiat en l'apartat (a).

□

R21. Justifica i classifica les discontinuitats de la funció representada gràficament:



$\boxed{x=-4}$ la funció té una discontinuitat essencial perquè

$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = -\infty.$$

$\boxed{x=-2}$ la funció té una discontinuitat evitable perquè

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 1 \neq 0 = f(-2).$$

$\boxed{x=0}$ la funció té una discontinuitat essencial perquè

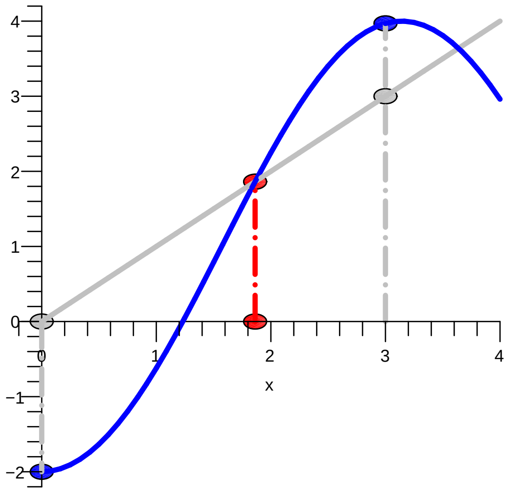
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$

$\boxed{x = 2}$ la funció té una discontinuitat de salt perquè

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -2 \neq 1 = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2).$$

$\square$

R22. Diem que α és un punt fix de la funció $f(x)$ si $f(\alpha) = \alpha$. Suposem que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua i $f(a) < a$, $f(b) > b$. Proveu que existeix un punt fix de f dins l'interval (a, b).



Sabem que f verifica que:

$$f(a) < a \text{ i } f(b) > b,$$

i volem trobar $\alpha \in (a, b)$ tal que

$$f(\alpha) = \alpha.$$

Les condicions anteriors es poden reescriure com: sabem que f verifica que:

$$f(a) - a < 0 \quad \text{i} \quad f(b) - b > 0,$$

i volem veure que: existeix un $\alpha \in (a, b)$ tal que

$$f(\alpha) - \alpha = 0.$$

Per tant, si considerem la funció $g(x) = f(x) - x$, estem en les hipòtesis del teorema de Bolzano.

- ▷ g és contínua en $[a, b]$ per ser suma de dues funcions contínues en $[a, b]$
- ▷ $g(a) = f(a) - a < 0$
- ▷ $g(b) = f(b) - b < 0$

Per tant, sabem que existeix un $\alpha \in (a,b)$ tal que

$$g(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow f(\alpha) - \alpha = 0 \Longleftrightarrow f(\alpha) = \alpha,$$

com volíem veure. $\square$

R23. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció definida de la forma:

$$f(x) = x^{180} + \frac{260}{2 + x^2 + \sin^2(x)}$$

Proveu que existeix un $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = 100$.

---

f és una funció contínua en tot $\mathbb{R}$, ja que és suma i quocient de funcions contínues on el denominador no s'anul.la, ja que $2 + x^2 + \sin^2(x) \geq 2 \forall x \in \mathbb{R}$. Per tant, en particular és contínua en $[0,1]$.

A més,

$$f(0) = \frac{260}{2} = 130$$
$$f(1) = 1 + \frac{260}{2 + 1 + \sin^2(1)} = 1 + \frac{260}{3 + \sin^2(1)} \leq 1 + \frac{260}{3} = \frac{263}{3} \leq 100.$$

Llavors, com que $f(1) < 100 < f(0)$, pel teorema dels valors intermitjos, existeix un $x_0 \in (0,1)$ tal que $f(x_0) = 100$ com volíem provar. $\square$

R24. Demostreu que l'equació $\ln(x) = x^2 - 4x$ té una solució real a l'interval $[1, +\infty)$.

---

x és solució de l'equació $\ln(x) = x^2 - 4x \Longleftrightarrow \ln(x) - x^2 + 4x = 0$. Per tant, el problema és equivalent a demostrar que la funció $f(x) = \ln(x) - x^2 + 4x$ té un zero en l'interval $[1, +\infty]$. Per fer-ho utilitzarem el teorema de Bolzano.

- ▷ f és contínua en tot interval de la forma $(a, +\infty)$ on $a > 0$. En particular, és una funció contínua per exemple en $(0.5, +\infty)$, i per tant també és contínua per exemple en l'interval $[1, 10]$.

- $f(1) = \ln(1) - 1 + 4 = 3 > 0$
- $f(10) = \ln(10) - 100 + 40 = -60 + \ln(10) < 0$

Per tant, pel teorema de Bolzano sabem que existeix un $c \in (0, 10)$ tal que

$$f(c) = 0 \iff \ln(c) - c^2 + 4c = 0 \iff \ln(c) = c^2 - 4c,$$

i hem provat que l'equació que ens donaven té com a mínim una solució real en $[1, +\infty)$. $\square$