

1. Aplicant el teorema d'integració per parts, calculeu les següents integrals:

$$(a) \int_0^{\pi} x \cos x dx = -2$$

$$(b) \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$(c) \int_1^e \ln x dx = 1$$

$$(d) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{5} \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{\pi}}$$

$$(e) \int_0^1 x^3 e^{2x} dx = \frac{1}{8}e^2 + \frac{3}{8}$$

$$(f) \int_{10}^{100} x e^{-x} dx = -101e^{-100} + 11e^{-10}.$$

2. Aplicant el mètode de primitivació per canvi de variable, calculeu les següents integrals indefinides:

$$(a) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \arctan(e^x), \quad t = e^x, \quad s = \tan(t)$$

$$(b) \int \frac{1}{\sqrt{25 - 16x^2}} dx = \frac{1}{4} \arcsin\left(\frac{4}{5}x\right), \quad x = \frac{5}{4} \sin(t)$$

$$(d) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos(x)}, \quad t = \cos(x)$$

$$(e) \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln(x)^2, \quad t = \ln(x)$$

$$(f) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}}, \quad x = t^2$$

$$(g) \int \frac{\sin(x) \cos(x)}{1 + \sin(x)} dx = \sin(x) - \ln(1 + \sin(x)), \quad t = \sin(x)$$

3. Calculeu l'àrea dels subconjunts del pla limitats per les corbes que s'indiquen:

- 1) les paràboles $y^2 = 2px$ i $x^2 = 2py$;
- 2) la paràbola $y^2 = 2x$ i el cercle $x^2 + y^2 = 8$;
- 3) l'arc sinusoidal $y = \sin x$ i les rectes $x = 0$, $x = \pi$, i $y = 1/2$;
- 4) les circumferències $x^2 + y^2 = 9$ i $(x - 3)^2 + y^2 = 9$;
- 5) les corbes $y = e^x$, $x = 1 - y^2$ i l'eix d'abscisses;
- 6) les paràboles $x = -y^2 + 2y$, $x = y^2 - 2y + 2$ i l'eix d'abscisses;
- 7) la corba $y^2 = x^2 - x^4$.

4. Calculeu l'àrea formada per les gràfiques de les funcions $y^2 = 8x$ i $y = x^2$.

5. Calculeu l'àrea de la funció $f(x) = e^{2x} \sin x$ entre $x = \pi$ i $x = \pi/2$.

6. Calculeu l'àrea que formen, en el primer quadrant, les corbes $x^2 + y^2 = 9$ i $y = 3 - x$.

7. Calculeu l'àrea que queda entre $y^2 = x$ i $y^2 = 4 - x$.

8. Calculeu les següents integrals impròpies de primera espècie:

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx$

(b) $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$

(c) $\int_1^{+\infty} x^{-4} dx$

(d) $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$

(e) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$.

9. Demostreu que les següents integrals són finites i trobeu una cota superior i una cota inferior del seu valor:

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx \quad (b) \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x) + \cos(x)}{x^2 + x + 1} dx.$$

10. Calculeu les següents integrals impròpies de segona espècie:

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad (b) \int_1^e \frac{1}{x \sqrt[3]{\ln(x)}} dx$$
$$(c) \int_1^1 t^{1/3} dx \quad (d) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

11. Té sentit calcular l'àrea limitada per la corba $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ des de $x = -2$ fins a $x = 2$?

12. Estudieu la convergència de

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}$$

segons els valors de α per a $a > 0$. Ajuda: Estudieu per separat els casos $\alpha = 1$, $\alpha < 1$ i $\alpha > 1$.