R1. Aplicant el teorema d'integració per parts, calculeu les següents integrals:

(a) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x dx = -2$ (b) $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^\pi + \frac{1}{2}$

(c) $\displaystyle\int_1^e \ln x dx = 1$ (d) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x}\cos x dx = \frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^\pi}$

(e) $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{2x} dx = \frac{1}{8}e^2 + \frac{3}{8}$ (f) $\displaystyle\int_{10}^{100} x e^{-x} dx = -101e^{-100} + 11e^{-10}.$

La integració per parts és un mètode que ens ajuda a calcular primitives de funcions mitjançant la següent fórmula:

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Prèviament cal definir quin terme de la integral és $u(x)$ i quin és $v'(x)$. Un cop definits es calcula $u'(x)$, derivant $u(x)$, i $v(x)$, integrant $v'(x)$. Seguidament s'aplica la fórmula i es resol l'expressió. Si és necessari, es torna a integrar per parts.

(a) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x dx = -2$

$$\int_0^\pi x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{\cos(x)\,\mathrm{d}x}_{v'(x)} \underset{(*)}{=}$$

$$(*)\left[\begin{array}{lcl} u(x) = x & \Rightarrow & u'(x) = 1\,\mathrm{d}x \\ v'(x) = \cos(x)\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v(x) = \sin(x) \end{array}\right]$$

$$= \Big[x\sin(2x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)1\,\mathrm{d}x =$$

$$= 0 - \Big[-\cos(x)\Big]_0^\pi = 0 + \Big[\cos(x)\Big]_0^\pi =$$

$$= 0 + (-1-1) = \boxed{-2}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \int_0^{\pi} \underbrace{e^x}_{u(x)} \underbrace{\sin(x)\,\mathrm{d}x}_{v'(x)} \underset{(*)}{=}$$

$$(*) \left[\begin{array}{lll} u(x) = e^x & \Rightarrow & u'(x) = e^x\,\mathrm{d}x \\ v'(x) = \sin(x)\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v(x) = -\cos(x) \end{array} \right]$$

$$= \left[-e^x \cos(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(x)e^x\,\mathrm{d}x =$$

$$= (e^{\pi}1 - (-1)1) + \underbrace{\int_0^{\pi} e^x \cos(x)dx}_{\text{per parts}} =$$

$$= (e^{\pi} + 1) + \int_0^{\pi} \underbrace{e^x}_{u(x)} \underbrace{\cos(x)dx}_{v'(x)} \underset{(**)}{=}$$

$$(**) \left[\begin{array}{lll} u(x) = e^x & \Rightarrow & u'(x) = e^x\,\mathrm{d}x \\ v'(x) = \cos(x)\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v(x) = \sin(x) \end{array} \right]$$

$$= (e^{\pi} + 1) + \left[e^x \sin(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(x)e^x\,\mathrm{d}x =$$

$$= (e^{\pi} + 1) + 0 - \underbrace{\int_0^{\pi} e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x}$$

En aquest cas podem veure que, després d'integrar dues vegades per parts, ens tornem a trobar amb una integral igual que la de l'inici. Tornar a fer integració per parts no serviria ja que arribaríem al mateix lloc una altra vegada.

Analitzem l'expressió a la qual hem arribat:

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = (e^{\pi} + 1) - \int_0^{\pi} e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Operant obtenim que:

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x \,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = (e^{\pi}+1)$$

$$2\int_0^{\pi} e^x \sin x \,\mathrm{d}x = (e^{\pi}+1)$$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{\pi}+\frac{1}{2}}.$$

(c) $\displaystyle\int_1^e \ln x dx = 1$

$$\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^e \underbrace{\ln(x)}_{u(x)}\,\underbrace{1\,\mathrm{d}x}_{v'(x)} \underset{(*)}{=} \Big[\ln(x)x\Big]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$(*)\left[\begin{array}{lll} u(x)=\ln(x) & \Rightarrow & u'(x)=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v'(x)=1\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v(x)=x \end{array}\right]$$

$$= e-0-\int_1^e 1\,\mathrm{d}x = e - x\Big|_1^e = e-(e-1) = \boxed{1}$$

(d) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x}\cos(x)dx = \frac{1}{5}\,\frac{e^{2\pi}+1}{e^{\pi}}$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x}\cos(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{e^{2x}}_{u(x)}\,\underbrace{\cos(x)\,\mathrm{d}x}_{v'(x)} \underset{(*)}{=}$$

$$(*)\left[\begin{array}{lll} u(x)=e^{2x} & \Rightarrow & u'(x)=2e^{2x}\,\mathrm{d}x \\ v'(x)=\cos(x)\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v(x)=\sin(x) \end{array}\right]$$

$$= \left[e^{2x}\sin(x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)2e^{2x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= (e^{\pi}1 - e^{-\pi}(-1)) - 2\underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x}\sin(x)dx}_{\text{per parts}} =$$

$$= (e^{\pi} + e^{-\pi}) - 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{e^{2x}}_{u(x)}\underbrace{\sin(x)dx}_{v'(x)} \underset{(**)}{=}$$

$$(**)\left[\begin{array}{lcl} u(x) = e^{2x} & \Rightarrow & u'(x) = 2e^{2x}\,\mathrm{d}x \\ v'(x) = \sin(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v(x) = -\cos(x) \end{array}\right]$$

$$= (e^{\pi} + e^{-\pi}) - 2\left[-e^{2x}\cos(x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\cos(x)2e^{2x}dx\right] =$$

$$= (e^{\pi} + e^{-\pi}) - 2\left[0 + 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= (e^{\pi} + e^{-\pi}) - 4\underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x}$$

En aquest ens tornem a trobar amb què, després d'integrar dues vegades per parts, la integral a resoldre és igual a la de l'inici. Tornar a fer integració per parts no serviria ja que arribaríem al mateix lloc una altra vegada.

Analitzem l'expressió a la qual hem arribat:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x}\cos(x)dx = (e^{\pi} + e^{-\pi}) - 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Operant obtenim que:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x}\cos(x)dx + 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x = e^{\pi} + e^{-\pi}$$

$$5\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x}\cos(x)dx = e^{\pi} + e^{-\pi} = e^{\pi} + \frac{1}{e^{\pi}} = \frac{e^{2\pi}+1}{e^{\pi}}$$

$$\boxed{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x}\cos(x)dx = \frac{1}{5}\,\frac{e^{2\pi}+1}{e^{\pi}}}.$$

(e) $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{2x}dx = \frac{1}{8}e^2 + \frac{3}{8}$

$$\int_0^1 x^3 e^{2x}dx \quad = \int_0^1 \underbrace{x^3}_{u(x)}\,\underbrace{e^{2x}\,\mathrm{d}x}_{v'(x)} \quad \underset{(*)}{=}$$

$$(*)\left[\begin{array}{lcl} u(x) = x^3 & \Rightarrow & u'(x) = 3x^2\,\mathrm{d}x \\ v'(x) = e^{2x}\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right]$$

$$= \left[x^3\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}3x^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 0 - \frac{3}{2}\int_0^1 e^{2x}x^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}\underbrace{\int_0^1 x^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x}_{\text{per parts}} =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}\int_0^1 \underbrace{x^2}_{u(x)}\,\underbrace{e^{2x}\,\mathrm{d}x}_{v'(x)} \underset{(**)}{=}$$

$$(**)\left[\begin{array}{lcl} u(x) = x^2 & \Rightarrow & u'(x) = 2x\,\mathrm{d}x \\ v'(x) = e^{2x}\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}\left[x^2\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}2x\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}e^2 - \int_0^1 xe^{2x}\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{2}\underbrace{\int_0^1 xe^{2x}\,\mathrm{d}x}_{\text{per parts}} =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{2}\int_0^1 \underbrace{x}_{u(x)}\,\underbrace{e^{2x}\,\mathrm{d}x}_{v'(x)} \underset{(***)}{=}$$

$$(***)\left[\begin{array}{lcl} u(x) = x & \Rightarrow & u'(x) = 1\,\mathrm{d}x \\ v'(x) = e^{2x}\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{2}\left[x\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{8}(e^2-1) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8} = \boxed{\frac{1}{8}e^2 + \frac{3}{8}}$$

(f) $\displaystyle\int_{10}^{100} xe^{-x}dx = -101e^{-100} + 11e^{-10}$

$$\int_{10}^{100} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_{10}^{100} \underbrace{x}_{u(x)}\,\underbrace{e^{-x}\,\mathrm{d}x}_{v'(x)} \underset{(*)}{=}$$

$$(*)\left[\begin{array}{lcl} u(x) = x & \Rightarrow & u'(x) = 1\,\mathrm{d}x \\ v'(x) = e^{-x}\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v(x) = -e^{-x} \end{array}\right]$$

$$= \Big[x\big(-e^{-x}\big)\Big]_{10}^{100} - \int_{10}^{100} -e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -100e^{-100} - \big(-10e^{-10}\big) + \int_{10}^{100} e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -100e^{-100} + 10e^{-10} + \big(-e^{-x}\big)\Big|_{10}^{100} =$$

$$= -100e^{-100} + 10e^{-10} - \big(e^{-100} - e^{-10}\big) =$$

$$= -100e^{-100} - e^{-100} + 10e^{-10} + e^{-10} =$$

$$= \boxed{-101e^{-100} + 11e^{-10}}$$

□

R2. Aplicant el mètode de primitivació per canvi de variable, calculeu les següents integrals indefinides:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \arctan(e^x), \quad t = e^x,\ s = \tan(t)$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{25 - 16x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{4}{5}x\right), \quad x = \frac{5}{4}\sin(t)$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{cos(x)}, \quad t = \cos(x)$

(d) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x)^2, \quad t = \ln(x)$

(e) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2e^{\sqrt{x}}, \quad x = t^2$

(f) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{1 + \sin(x)}\,\mathrm{d}x = \sin(x) - \ln(1 + \sin(x)), \quad t = \sin(x)$

El canvi de variable és un altre mètode que ens ajuda a calcular primitives de funcions. Es basa en la següent igualtat:

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x \underset{(*)}{=} \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t}$$

on s'ha considerat fer el canvi de variable

$$(*)\left[\begin{array}{ccc} x & = & g(t) \\ \mathrm{d}x & = & g'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right]$$

En primer lloc es defineix el canvi per tal que la resolució de la integral sigui més immediata $x = g(t)$. Després es calcula dx fent la derivada de la funció $g(t)$. S'aplica el canvi i es resol la integral, obtenint la primitiva. Seguidament es desfà el canvi per tal de tenir la primitiva expressada amb la mateixa variable que la integral donada. Si és necessari es pot fer més d'un canvi de variable.

En els següents casos, ja se'ns indica el canvi que hem d'emprar.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \arctan(e^x), \quad t = e^x,\ s = \tan(t)$

En aquesta integral se'ns proposen dos canvis. El primer canvi proposat és $t = e^x$; $\mathrm{d}t$ serà la derivada de t respecte d'x, per tant $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x$.

$$(*) \left[\begin{array}{ccc} t & = & e^x \\ \mathrm{d}t & = & e^x\,\mathrm{d}x \end{array}\right]$$

Convé que tinguem aquest canvi present per saber com desenvolupar la integral per tal que aquest es pugui aplicar. En aquest cas ens interessa que al numerador hi hagi e^x per tal que tinguem $e^x\,\mathrm{d}x$ i ho poguem substituir per $\mathrm{d}t$.

Comencem desenvolupant la integral:

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{e^x}{e^x e^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\underbrace{e^x}_{t}\ \underbrace{e^x}_{t} + 1}\,\underbrace{e^x\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} \overset{}{\underset{(*)}{=}}$$

Ara ja podem aplicar el canvi i obtenim

$$= \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

El següent canvi proposat és

$$(**) \left[\begin{array}{ccc} s & = & tan(t) \\ ds & = & \dfrac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)} \end{array}\right]$$

Desenvoluparem, doncs, la integral fins que poguem fer el canvi:

$$= \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\cos^2(t)}{t^2+1}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)} =$$

$$= \int \cos^2(t)\frac{1}{t^2+1}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)} =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(t)}}\frac{1}{t^2+1}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)} =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}\frac{1}{t^2+1}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)} =$$

$$= \int \frac{1}{1+\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}\frac{1}{t^2+1}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)} =$$

$$= \int \frac{1}{1+\underbrace{\tan^2(t)}_{s^2}}\frac{1}{\underbrace{t^2}_{\arctan^2(s)}+1}\underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)}}_{ds} \underset{(**)}{=}$$

Ara ja podem aplicar el canvi i obtenim

$$= \int \frac{1}{(1+s^2)(\arctan^2(s)+1)}ds.$$

Calculem la primitiva

$$= \int \frac{1}{(1+s^2)(\arctan^2(s)+1)}ds = \arctan\big(\arctan(s)\big)$$

i desfem els canvis

$$= \arctan\big(\arctan(s)\big) = \arctan\big(\arctan(\tan(t))\big) =$$

$$= \arctan(t) = \arctan(e^x) + k$$

Per tant,

$$\boxed{\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \arctan(e^x) + k}$$

Quan no es veu ràpidament com desenvolupar la integral a fi de poder aplicar el canvi, una altra solució és aïllar la variable del canvi en funció de la qual està expressada la integral, trobar el diferencial derivant i substituir directament:

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x \underset{(*)}{=} \int \frac{1}{e^{\ln(t)} + e^{-\ln(t)}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} =$$

$$(*) \left[\begin{array}{ccll} t & = & e^x & \Rightarrow x = \ln(t) \\ \mathrm{d}t & = & e^x\,\mathrm{d}x; & \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{t}{t^2+1}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Fem el mateix per aplicar el segon canvi:

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \underset{(**)}{=} \int \frac{1}{\arctan^2(s)+1} \cdot \frac{ds}{1+s^2} =$$

$$(**) \left[\begin{array}{ccll} s & = & \tan(t) & \Rightarrow t = \arctan(s) \\ ds & = & \dfrac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)}; & \mathrm{d}t = \dfrac{ds}{1+s^2} \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{1}{(\arctan^2(s)+1)(1+s^2)}\,ds$$

Podem veure que arribem al mateix lloc. Ara ja podríem integrar i desfer els canvis.

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{25-16x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{4}{5}x\right), \qquad x=\frac{5}{4}\sin(t)$

En aquest cas el canvi de variable és més senzill donat que tan sols hem de substituir x i $\mathrm{d}x$ pel que correspongui:

$$\int \frac{1}{\sqrt{25-16x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \left(25-16x^2\right)^{-1/2}\mathrm{d}x \underset{(*)}{=}$$

$$(*)\left[\begin{array}{ccc} x & = & \frac{5}{4}\sin(t) \\ \mathrm{d}x & = & \frac{5}{4}\cos(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right]$$

$$= \int \left(25-16\left(\frac{5}{4}\sin(t)\right)^2\right)^{-1/2}\cdot\frac{5}{4}\cos(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \left(25-16\frac{25}{16}\sin^2(t)\right)^{-1/2}\cdot\frac{5}{4}\cos(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \left(25(1-\sin^2(t))\right)^{-1/2}\cdot\frac{5}{4}\cos(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\frac{5}{4}\cos(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1}{4\cos(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int\frac{1}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t =$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{4}{5}x\right)+k}$$

Per desfer el canvi hem aïllat t del canvi proposat:

$$x=\frac{5}{4}\sin(t) \quad\Rightarrow\quad \sin(t)=\frac{4}{5}x \quad\Rightarrow\quad t=\arcsin\left(\frac{4}{5}x\right)$$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{cos(x)}, \quad t = \cos(x)$

En aquest cas es veu de forma molt clara l'aplicació del canvi. Així doncs, l'apliquem i resolem:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\underbrace{\cos^2(x)}_{t^2}} \underbrace{\sin(x)\,\mathrm{d}x}_{-\,\mathrm{d}t} \underset{(*)}{=} \int -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$(*) \begin{bmatrix} t & = & \cos(x) \\ \mathrm{d}t & = & -\sin(x)\,\mathrm{d}x \end{bmatrix}$$

$$= -\int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -\left(\frac{1}{-1} t^{-1}\right) =$$

$$= -\left(-\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} \quad \boxed{= \frac{1}{\cos(x)} + k}$$

(d) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x)^2, \quad t = \ln(x)$

En aquest cas també es veu de forma molt clara l'aplicació del canvi. L'apliquem, integrem i el desfem:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{ln(x)}_{t} \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{x}}_{\mathrm{d}t} \underset{(*)}{=} \int t\,\mathrm{d}t =$$

$$(*) \begin{bmatrix} t & = & \ln(x) \\ \mathrm{d}t & = & \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}t^2 \quad \boxed{= \frac{1}{2}\ln(x)^2 + k}$$

(e) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}}, \quad x = t^2$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \underset{(*)}{=} \int \frac{e^{\sqrt{t^2}}}{\sqrt{t^2}} 2t\,dt = \int \frac{e^t}{t} 2t\,dt =$$

$$(*) \left[\begin{array}{ccc} x & = & t^2 \\ dx & = & 2t\,dt \end{array}\right]$$

$$= 2\int e^t\,dt = 2e^t \boxed{= 2e^{\sqrt{x}} + k}$$

(f) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin(x)}\,dx = \sin(x) - \ln(1+\sin(x)), \quad t = \sin(x)$

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin(x)}\,dx = \int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\cos(x)\,dx \underset{(*)}{=} \int \frac{t}{1+t}\,dt =$$

$$(*) \left[\begin{array}{ccc} t & = & \sin(x) \\ dt & = & \cos(x)\,dx \end{array}\right]$$

Fem un artifici matemàtic sumant i restant 1 al numerador per tal d'obtenir dues integrals immediates:

$$= \int \frac{t+1-1}{1+t}\,dt = \int \left(\frac{1+t}{1+t} - \frac{1}{1+t}\right) dt =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = \int 1\,dt - \int \frac{1}{1+t}\,dt =$$

$$= t - \ln(1+t) \boxed{= \sin(x) - \ln(1+\sin(x)) + k}$$

$\square$

R3. Calculeu l'àrea dels subconjunts del pla limitats per les corbes que s'indiquen:

1) les paràboles $y^2 = 2px$ i $x^2 = 2py$;
2) la paràbola $y^2 = 2x$ i el cercle $x^2 + y^2 = 8$;
3) l'arc sinusoide $y = \sin x$ i les rectes $x = 0$, $x = \pi$, i $y = 1/2$;
4) les circumferències $x^2 + y^2 = 9\, i\, (x-3)^2 + y^2 = 9$;
5) les corbes $y = e^x$, $x = 1 - y^2$ i l'eix d'abcisses;
6) les paràboles $x = -y^2 + 2y$, $x = y^2 - 2y + 2$ i l'eix d'abcisses;
7) la corba $y^2 = x^2 - x^4$.

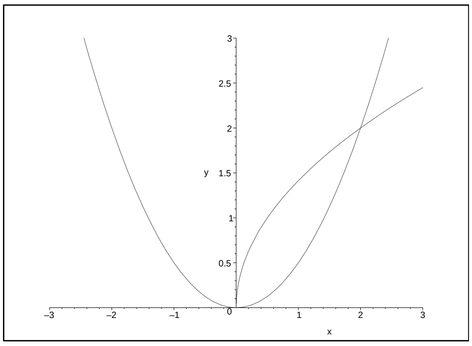
---

1) Se'ns demana trobar l'àrea que delimiten les dues paràboles $y^2 = 2px$ i $x^2 = 2py$ entre els punts on s'intersecten.

$\triangleright$Dibuixem les dues corbes:

$$y^2 = 2px \Rightarrow y = f(x) = \sqrt{2px}$$

$$x^2 = 2py \Rightarrow y = g(x) = \frac{x^2}{2p}$$



$\triangleright$Punts on interseccionen les dues funcions:

Mitjançant la gràfica podem veure que les corbes es creuen en dos punts. Un és l'origen, $(0,0)$ i l'altre és el $(2p, 2p)$. Per trobar aquest segon punt, igualem les dues funcions:

$$\sqrt{2px} = \frac{x^2}{2p} \Leftrightarrow 2px = \frac{x^4}{4p^2} \Leftrightarrow 8p^3 = \frac{x^4}{x} \Leftrightarrow 2^3p^3 = x^3$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2p = x}$$

$$y = \sqrt{2p2p} = \sqrt{2^2p^2} = 2p \Leftrightarrow \boxed{y = 2p}$$

Per tant els dos punts són: $(0,0)$ i $(2p, 2p)$

▷ A l'interval $[0, 2p] \longrightarrow f(x) \geq g(x)$

▷Àrea delimitada per les dues corbes:

$$A = \int_0^{2p} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{2p} \sqrt{2px}\,\mathrm{d}x - \int_0^{2p} \frac{x^2}{2p}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{2p} (2p)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - \int_0^{2p} \frac{1}{2p} x^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= (2p)^{\frac{1}{2}} \int_0^{2p} x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2p} \int_0^{2p} x^2 =$$

$$= (2p)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2p} - \frac{1}{2p} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{2p} =$$

$$= (2p)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3} (2p)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2p} \cdot \frac{1}{3} (2p)^3 = (2p)^{\frac{4}{2}} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} (2p)^2 =$$

$$= \frac{2}{3} 4p^2 - \frac{1}{3} 4p^2 = \frac{1}{3} 4p^2$$

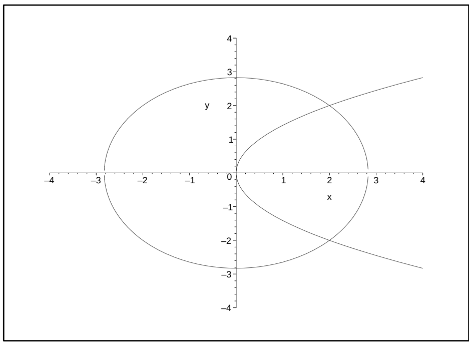
Per tant,

$$\boxed{A = \frac{1}{3} 4p^2}.$$

2) Se'ns demana trobar l'àrea comú delimitada per la paràbola $y^2 = 2x$ i el cercle $x^2 + y^2 = 8$.

▷Dibuixem les dues corbes:

$y^2 = 2x$
$\Rightarrow y = f(x) = \sqrt{2x}$
$x^2 + y^2 = 8$
$\Rightarrow y = g(x) = \sqrt{8 - x^2}$



▷Determinació d'intervals:

En primer lloc cal saber el punt on el cercle talla l'eix x.

Donat que es tracta d'una circumferència centrada a l'origen, aquest punt coincidirà amb el valor del radi:

$$x^2 + y^2 = R^2 \;\Rightarrow\; R^2 = 8 \;\Rightarrow\; R = \sqrt{8}$$

Per tant, el punt és $(\sqrt{8}, 0)$.

Determinem ara els punts on intersecten les dues corbes, igualant les dues funcions:

$$\sqrt{2x} = \sqrt{8 - x^2} \Leftrightarrow 2x = 8 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1(-8)}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_1 = 2} \qquad x_2 = -4$$

$$y = \sqrt{2x} = \sqrt{2 \cdot 2} = \pm 2 \;\Leftrightarrow\; \boxed{y = \pm 2}$$

Els dos punts són $(2, 2)$ i $(2, -2)$

Les corbes que integrarem a cada interval per conèixer l'àrea seran:

$$[0, 2] \longrightarrow f(x)$$

$$[2, \sqrt{8}] \longrightarrow g(x)$$

▷Àrea comú delimitada per les dues corbes:

Està formada per l'àrea compresa entre la corba $f(x)$ i l'eix X per la part positiva a l'interval [0,2] més l'àrea compresa entre la corba $g(x)$ i l'eix X per la part positiva a l'interval $[2, \sqrt{8}]$, per dues vegades (part positiva i part negativa):

$$
\begin{aligned}
A &= 2\left(\int_0^2 (f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^{\sqrt{8}} g(x))\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= 2\int_0^2 \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x + 2\int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= 2\int_0^2 (2x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + 2\int_2^{\sqrt{8}} (8-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \\
&= 2\left[\frac{1}{3}(2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 + 2\left[\frac{x\sqrt{8-x^2}}{2} + 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x}{4}\right)\right]_2^{\sqrt{8}} = \\
&= 2\cdot\frac{1}{3}\cdot 8 + 2(6.28 - 5,14) = 7.61
\end{aligned}
$$

Per tant,

$$\boxed{A = 7.61}.$$

3) l'arc sinusoide $y = \sin x$ i les rectes $x = 0$, $x = \pi$, i $y = 1/2$;
4) les circumferències $x^2 + y^2 = 9\, i\, (x-3)^2 + y^2 = 9$;
5) les corbes $y = e^x$, $x = 1 - y^2$ i l'eix d'abcisses;
6) les paràboles $x = -y^2 + 2y$, $x = y^2 - 2y + 2$ i l'eix d'abcisses;
7) la corba $y^2 = x^2 - x^4$.

□

R4. Calculeu l'àrea formada per les gràfiques de les funcions $y^2 = 8x$ i $y = x^2$.

□

R5. Calculeu l'àrea de la funció $f(x) = e^{2x}\sin x$ entre $x = \pi$ i $x = \pi/2$.

□

R6. Calculeu l'àrea que formen, en el primer quadrant, les corbes $x^2 + y^2 = 9$ i $y = 3 - x$.

□

R7. Calculeu l'àrea que queda entre $y^2 = x$ i $y^2 = 4 - x$.

□

R8. Calculeu les següents integrals impròpies de primera espècie:

$$\text{(a)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x}\,dx \qquad \text{(b)} \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

$$\text{(c)} \int_1^{+\infty} x^{-4}\,dx \qquad \text{(d)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$$

$$\text{(e)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx.$$

□

R9. Demostreu que les següents integrals són finites i trobeu una cota superior i una cota inferior del seu valor:

$$\text{(a)} \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \qquad \text{(b)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{x^2+x+1}\,dx.$$

□

R10. Calculeu les següents integrals impròpies de segona espècie:

$$\text{(a)} \int_0^{1} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{(b)} \int_1^{e} \frac{1}{x\sqrt[3]{ln(x)}}\,dx$$

$$\text{(c)} \int_0^{1} t^{-1/3}\,dx \qquad \text{(d)} \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

□

R11. Té sentit calcular l'àrea limitada per la corba $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ des de $x = -2$ fins a $x = 2$?

$\square$

R12. Estudieu la convergència de

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}$$

segons els valors de α per a $a > 0$. Ajuda: Estudieu per separat els casos $\alpha = 1$, $\alpha < 1$ i $\alpha > 1$.

$\square$