1. Es consideren els vectors de $\mathbb{R}^4$:

$$x_1 = (1, -2, 0, 3)\,,\ x_2 = (-1, 2, -1, -1)\,,\ x_3 = (1, 3, -2, 0)\,.$$

(a) Calculeu les combinacions lineals següents:
$2x_1 + x_2 + x_3$, $2(x_1 + x_2) + x_3$, $x_1 - x_2 + 3x_3$.

(b) Determineu els escalars $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que el vector $ax_1 + bx_2 + cx_3$ tingui les dues últimes components nul·les.

2. Estudieu la dependència o la independència lineal dels següents conjunts de vectors en $\mathbb{R}^2$ i, en cas de dependència lineal, trobeu-ne la relació de dependència:

$X_1 = \{(1, 2, 3)\}$;

$X_2 = \{(1, 2, 3)\,, (2, 5, 8)\}$;

$X_3 = \{(1, 2, 3)\,, (2, 5, 8)\,, (1, 3, 8)\}$;

$X_4 = \{(1, 2, 3)\,, (2, 5, 8)\,, (1, 3, 8)\,, (2, 1, -1)\}$.

3. Comproveu que el conjunt $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 9\right\}$ no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

4. A l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ estudieu quins dels següents subconjunts són subespais vectorials:

$X_1 = \{(a, b, c, d)\ \mid 2b + 3c = 5\}$;

$X_2 = \{(a, b, a, b)\ \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;

$X_3 = \{(a, -b + 2a, a + 2b, -b)\ \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;

$X_4 = \{(a, b, c, d)\ \mid a - b = d - c\}$.

5. A l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ es considera el subespai vectorial $F = [\{(1, 2, 3, 4)\,, (4, 7, 4, 1)\}]$. Calculeu els valors de a i b per tal que el vector $u = (a, b, 1, -3)$ pertanyi a F.

6. Determineu entre els següents conjunts quins són subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^4$:

a) $E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$

b) $E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 4x_1^2 - 2x_2 + x_3 = 0\right\}$

c) $E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 3x_1 + x_2 + x_3 = 1\right\}$

d) $E = \{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \,/\, x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, 4x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

e) $E = \{(3x_2, x_2, x_2 + x_4, x_4) \,/\, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

7. Contesteu les següents preguntes:

(a) Forma $B = \{(1, 2, 1), (0, -1, 1), (-1, 1, 0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$?

(b) Pertany el vector $(1, 0, 3, 4)$ al subespai generat per $(-1, 1, 0, 2)$ i $(2, 1, 1, 0)$?

(c) Sigui $F = \left\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2z = 0\right\}$. Demostra que és subespai vectorial. Troba una base i la dimensió de F.

8. A $\mathbb{R}^4$ es donen els vectors

$$u_1 = (1, 1, 2, 1),\ u_2 = (1, -1, 0, 1),\ u_3 = (0, 0, -1, 1),\ u_4 = (1, 2, 2, 0)$$

$$v = (1, 1, 1, 1)$$

(a) Demostreu que u_1, u_2, u_3 i u_4 formen una base.

(b) Determineu les coordenades de v en la base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

9. Es considera l'espai vectorial $E = \mathbb{R}^4$ i en aquest espai vectorial es defineix el subespai vectorial $F = [\{v_1, v_2, v_3\}]$ generat pels vectors:

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), \quad v_2 = (4, 7, 4, 1), \quad v_3 = (2, 3, -2, -7).$$

Determineu:

(a) Una base de F i la dimensió d'aquest subespai vectorial.

(b) El valor dels paràmetres a, b per tal que el vector $x = (3, 5, a, b)$ pertanyi a F.

10. Sigui $E = \mathbb{R}^4$ espai vectorial sobre $\mathbb{R}$. Es consideren els subespais F_1 i F_2 de E:

$F_1 = [(1,0,1,0), (0,1,1,-1), (3,-2,1,2), (-2,3,1,-3)]$

$F_2 = \{(2b, a-b, a+b, -a-4b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Es demana:

(a) Demostreu que F_2 és un subespai vectorial d'E.

(b) Calculeu la dimensió de cada subespai. Calculeu una base B_1 de F_1 i B_2 de F_2.

11. Comproveu si els següents subconjunts són subespais vectorials de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, i en cas afirmatiu, trobeu-ne una base:

$$A_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2,\ A_2 = \{(1,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$B_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\},\ B_2 = \left\{\left(x, x^2, 1\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

12. (a) Pertany el vector $(0,1,3,4)$ al subespai generat per $(1,-1,0,2)$ i $(-2,3,1,0)$?

(b) Sigui $F = \left\{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2z=0, x-y=0\right\}$. Demostra que és subespai vectorial. Troba una base i la dimensió de F.

13. Considereu l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre els reals.

(a) Forma $B = \{(1,1,0), (0,2,1), (1,0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$?

(b) És $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-y-2z=0\right\}$ un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$? Calcula la seva dimensió i base.

14. Si $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ i es consideren els vectors:

$$x = (1,2,3)_{B_1} \qquad i \qquad y = (1,0,-1)_{B_1},$$

calculeu les components d'aquests vectors en la base B_2 definida per:

$$v_1 = 3u_1 + 2u_2 - u_3, \quad v_2 = 4u_1 + u_2 + u_3, \quad v_3 = 2u_1 - u_2 + u_3.$$

Calculeu les components en la base B_1 del vector $z = (-1,0,1)_{B_2}$.

15. A l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ es consideren els vectors:

$$u_1 = (1,1,1)\,, \quad u_2 = (0,1,1)\,, \quad u_3 = (0,0,1)\,.$$

(a) Proveu que $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Trobeu una altra base $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, tal que les equacions de canvi de base de B_1 a B_2 siguin:

$$x_1' = x_1 - 2x_3, \quad x_2' = -x_2 + 5x_3, \quad x_3' = x_1 - 3x_3.$$

16. Donat l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$, $\{e_1, e_2\}$ una base i els vectors: $u_1 = e_1$ i $u_2 = e_1 - e_2$:

(a) Comproveu que $\{u_1, u_2\}$ és una base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Calculeu les components del vector $v = e_1 - 2e_2$ en la base $\{u_1, u_2\}$.

(c) Calculeu les components del vector $w = 3u_1 + u_2$ en la base $\{e_1, e_2\}$.

17. Calculeu la matriu de canvi de base de $B_1 = \{u_1, u_2\}$ a $B_2 = \{v_1, v_2\}$ on: $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (0,1)$, $v_1 = (2,1)$, $v_2 = (1,0)$.

18. (a) Calcula els valors de a i b per tal que el vector $(a,1,0,b)$ pertanyi a $[(1,1,-2,0)\,,(0,1,1,2)]$.

(b) Forma $B = \{(1,1,1)\,,(1,0,1)\,,(0,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$? Calcula la matriu de canvi de base que permet passar de la base canònica a B.

19. Considereu el subespai vectorial de les matrius amb coeficients reals d'ordre 3 antisimètriques.

(a) Calculeu una base d'aquest subespai vectorial.

(b) Calculeu les components de la matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

en aquesta base.

20. Considerem el subespai vectorial de les matrius amb coeficients reals d'ordre 2 simètriques.

(a) Determineu una base d'aquest subespai vectorial.

(b) Determineu les components de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

en la base anterior.

(c) Denotem per $u_i, i = 1 \ldots n$ els elements de la base anterior i considerem la base donada per $v_i = \sum_{j=1}^{i} u_j, i = 1 \ldots n$. Calculeu les components de la matriu donada en l'apartat anterior respecte aquesta nova base.

(d) Donada la matriu que té per components el vector unitari respecte la base $\{v_i\}_{i=1\ldots n}$, calculeu les components d'aquesta matriu respecte la base $\{u_i\}_{i=1\ldots n}$.