1. Demostrar que per a tot $n \in \mathbb{N}$, es compleix:

$$(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

2. Demostrar que per a tot $n \in \mathbb{N}$, es compleix:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

3. Demostrar que per a tot $n \in \mathbb{N}$, es compleix:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

4. A partir de les igualtats:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} &= 2 - \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= 2 - \frac{1}{4} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= 2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

deduïu si existeix una “llei general” al respecte, per qualsevol $n \geq 1$. En cas afirmatiu, enuncieu-la i demostreu-la per inducció.

5. Demostrar que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ és múltiple de 9, per tot $n \geq 1$.

6. Demostrar que per a tot $n \geq 1$, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} < 1$.

7. Proveu que $2^n \leq n!$ si $n \geq 4$.

8. Proveu que $n^2 \leq 2^n$ si $n \geq 4$.

9. Proveu que $2n + 1 \leq n^2$ si $n \geq 3$.

10. Proveu que $n^3 + 14n + 3$ és divisible per 3 $\forall n \in \mathbb{N}$.

11. Considerem la seqüència de nombres definada per la fòrmula recursiva $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-1}^2$. Demostreu que $a_n = 1 - (1 - a_0)^{2^n}$.

12. Els nombres de Fibonacci es defineixen de manera recursiva segons:

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \geq 2,$$

de manera que els primers nombres de Fibonacci són:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots$$

Demostreu les següents propietats d'aquests nombres:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_{3n} és parell.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_{4n} és divisible per tres.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$ i $\forall m \in \mathbb{N}$, $f_{m+n} = f_{m+1}f_n + f_m f_{n+1} - f_m f_n$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$.

(e) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n-1}f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n$.

13. `[exàmen p1:q1-03/04]` Calculeu el valor de l'expressió $\dfrac{2+4+\ldots+2n}{1+3+\ldots+(2n-1)}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i demostreu-ho per inducció.

Ajuda 1: Demostreu primer que $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n + 1)$.

Ajuda 2: Trobeu una expressió similar a l'anterior pel denominador donant diferents valors a la n i demostreu-la.

14. `[exàmen p1:q1-03/04]` Calculeu el valor de l'expressió $\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{2+4+\ldots+2n}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i demostreu-ho per inducció.

Ajuda 1: Demostreu primer que $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n + 1)$.

Ajuda 2: Trobeu una expressió similar a l'anterior pel numerador donant diferents valors a la n i demostreu-la.

Núria Parés, Francesc Pozo, Yolanda Vidal

15. Escriviu els següents nombres complexos:

(a) en forma polar: $1-i$, $i-\sqrt{3}$, -2.45, $-\dfrac{i}{3}$, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

(b) En forma binòmica: 3π, $8e^{\frac{\pi}{3}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, $5e^{\frac{3\pi}{5}i}$.

16. Expresseu en forma exponencial els nombres complexes següents:

(a) $z=1+i\sqrt{3}$ (b) $z=\sqrt{3}+i$

17. Calcula $\dfrac{(4+7i)+(1-i)(2-i)}{(5+i)^2}$, $\dfrac{10-((1-4i)-(2-3i))}{3i+(2+\sqrt{3i})(2-\sqrt{3i})}$ i $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^6$.

18. Expressa en forma binòmica el resultat de la divisió $6_{120^o} : 3_{30^o}$.

19. Calculeu:

(a) $z=\dfrac{3}{i}+\dfrac{2i}{2+i}+\dfrac{2+3i}{1+2i}$;

(b) els nombres reals $a,b\in\mathbb{R}$, sabent que

$$(-5+ai)(b+19i)=3+2i;$$

(c) el nombre real $a\in\mathbb{R}$ per tal que $z=\dfrac{3-2ai}{4-3i}$ estigui situat a la bisectriu del primer quadrant.

20. Demostra que si z és un nombre complex, el quocient $\dfrac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}$ és un nombre imaginari pur.

21. Comprova amb un exemple que quan es suma i quan es multiplica un nombre complex pel seu conjugat s'obté un nombre real en cada cas.

22. Determineu una condició necessària i suficient per a què dos nombres complexos $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ compleixin la igualtat: $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$.

23. Calcula i representa en el pla complex les arrels segones, terceres, quartes i cinquenes de $z = 1$. Comproba que la suma de les arrels quartes de la unitat dóna 0.

24. Expressa en forma binòmica les arrels quartes de $z = 4$.

25. Una de les arrels cúbiques d'un nombre complex és $1_{\frac{\pi}{3}}$. Calcula aquest nombre complex i les altres dues arrels.

26. Resol les equacions: $x^4 + 16 = 0$, $x^6 = i$ i $x^3 = -8i$.

27. (a) Determineu dos complexos z_1 i z_2, sabent que el seu quocient és 3, que la suma dels seus arguments és $\pi/3$ i que la suma dels seus mòduls és 8.

(b) Una de les arrels cúbiques d'un cert nombre complex z és $3i$; calculeu aquest nombre complex z i la resta de les seves arrels cúbiques.

28. Calculeu $z \in \mathbb{C}$ de manera que z, z^{-1} i $1 - z$ tinguin el mateix mòdul.

29. Si z_1, z_2 i z_3 són les arrels cúbiques de $z = 1 + i$, calculeu $z_1^6 + z_2^{12} + z_3^{24}$.

30. Calculeu: $\sqrt[5]{1 - i\sqrt{3}}$, $\dfrac{(3 - 2i)(2 + 3i)}{3 - 4i}$, i^{29}, $(1 + i)^4$.

31. Efectueu les operacions que s'indiquen:

$$\frac{2 - 3\mathrm{i}}{(2 + 3\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})} - \frac{3 + i}{4(2 - i)}, \quad (1 - 2i)^{52}, \quad \left(\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}}\right)^{12}.$$

32. Calculeu: $\sqrt[5]{1 - \sqrt{3}i}$, $(1 - i)^{\frac{5}{4}}$, $\dfrac{\sqrt[3]{-1 + i}}{\sqrt{1 + \sqrt{3}i}}$.

33. Tres nombres complexos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ són tals que: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ i $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Proveu que aquests complexos són vèrtexs d'un triangle equilàter inscrit en la circumferència de radi unitat centrada a l'origen.

34. Resoleu en $\mathbb{C}$ les següents equacions:

(a) $x^2 + ix + 1 = 0;$

(b) $x^4 + x^2 + 1 = 0;$

(c) $z^3 - iz + (-1 + i) = 0;$

(d) $z^3 + (1 + i)z^2 + (-2 + i)z - 2i = 0.$

35. Determineu els nombres complexos z tals que:

(a) $|z| = \dfrac{1}{|z|} = |1 - z|;$

(b) $\bar{z} = z^{-1};$

(c) $|1 - z|^2 \leq 1 - |z|^2;$

(d) $|z - \alpha| = |z - \beta|,\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$