Equacions Diferencials Ordinàries (EDO's)

Departament de Matemàtica Aplicada III
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Yolanda Vidal, Francesc Pozo, Núria Parés

Conceptes fonamentals i definicions.

Definició 1. *Una Equació Diferencial Ordinària (EDO) és una equació en la que apareix una funció d'una variable i les seves derivades. Alguns exemples són,*

$$y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = x^2$$

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + 4y(x) = 0$$

Definició 2. *Integrar o resoldre una EDO és trobar les funcions $y(x)$ que substituïdes a l'equació la satisfan.*

ex. *Donada la EDO*

$$y''(x) = -y(x)$$

comprovem que la funció $y(x) = \sin x$ n'és solució.

Efectivament, si $y(x) = \sin x$ aleshores

$$y(x) = \sin x$$

$$y'(x) = \cos x$$

$$y''(x) = -\sin x$$

i per tant es compleix que

$$y''(x) = -\sin x = -y(x).$$

És fàcil veure que $y(x) = \cos x$ també és solució.

Definició 3. *L'ordre d'una EDO és el major dels ordres de les derivades que hi apareixen.*

Definició 4. *El grau d'una EDO és el major dels exponents de les potències a les que estan elevades les derivades.*

ex. *La EDO següent,*

$$y''(x) + (y'(x))^3 + y(x)^2 = 4x^5$$

és una EDO d'ordre 2 i grau 3.

Definició 5. *La solució general d'una EDO d'ordre n és una expresió que inclou totes les funcions solució i conté sempre n constants arbitràries independents.*

Definició 6. *Una solució particular d'una EDO és una de les funcions concretes que verifica la EDO (les constants de la solució general tenen valors concrets).*

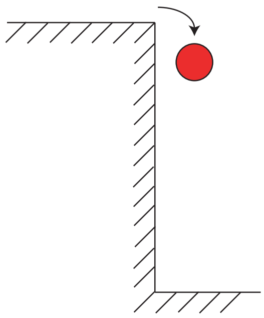
ex. *Donada la EDO*

$$y''(x) = -y(x)$$

- *la solució general és:* $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.
- *una solució particular és:* $y(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$.

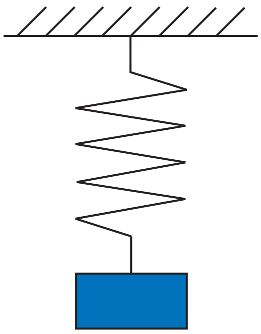
Problemes físics modelitzats amb EDO's.

- Caiguda lliure



$$y'' = -g$$
$$y(0) = y_0$$
$$y'(0) = 0$$

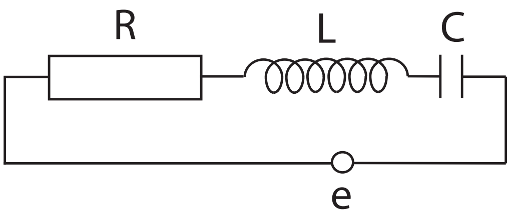
- Molla



$$my'' = -ky \text{ on } m, k = \text{cte.}$$
$$y'' + w^2 y = 0, \; w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

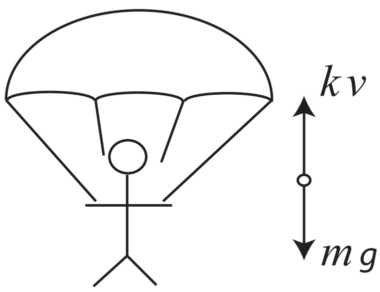
(Oscilacions en torn la posició d'equilibri)

- Circuits



$$e(t) = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q$$

- Paracaigudista



$$my'' = mg - ky'$$
$$v' + \frac{k}{m}v = g$$
$$y' = v$$
$$y'' = v'$$

Hem vist que és fàcil comprovar si una certa funció és o no solució d'una EDO. Molt més dur és el problema de trobar la solució.

EDO's de primer ordre.

Definició 7. *La més simple de les EDO's de primer ordre és*

$$y'(x) = f(x)$$

que es resol simplement integrant,

$$y(x) = \int f(x)dx + C.$$

Definició 8. *Si la EDO de primer ordre (on apareix $y'(x) = \frac{dy}{dx}$) es pot reescriure com*

$$f(x)dx = g(y)dy$$

es diu que la EDO és de variables separables i es resol simplement integrant,

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy.$$

ex. *Sigui la EDO*

$$y(x)y'(x) = \frac{4}{x}.$$

Substituint $y'(x)$ *per* $\frac{dy}{dx}$ *tenim*

$$y(x)\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x}$$

i per tant es pot reescriure com

$$ydy = \frac{4}{x}dx.$$

Així doncs, al ser una EDO de variables separables es resol simplement integrant,

$$\int ydy = \int \frac{4}{x}dx.$$

Al fer aquestes integrals obtenim,

$$\frac{y^2}{2} = 4\ln x + C$$

d'on podem obtenir la solució general fàcilment,

$$y(x) = \pm\sqrt{8\ln x + 2C}.$$

EDO's lineals (grau 1) de primer ordre.

Definició 9. *S'anomena EDO lineal de primer ordre a tota equació de la forma:*

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \Longleftarrow \textit{Forma canònica}$$

on $p(x)$ i $q(x)$ són funcions contínues de x.

Vegem com es resolen aquest tipus d'EDO's.
Multipliquem la EDO lineal pel terme $e^{\int p(x)dx}$

$$\underbrace{e^{\int p(x)dx}y'(x) + e^{\int p(x)dx}p(x)y(x)}_{\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y\right)} = e^{\int p(x)dx}q(x)$$

Així doncs, tenim

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y\right) = e^{\int p(x)dx}q(x).$$

Integrant respecte x obtenim

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y\right)dx = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx$$

és a dir,

$$\left(e^{\int p(x)dx}y\right) = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C$$

d'on podem aïllar la funció $y(x)$ i obtenim la solució general que és:

$$\boxed{y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right].}$$

ex. *Anem a resoldre la EDO lineal de primer ordre*

$$xy'(x) - 2y(x) = x^2.$$

Primer l'expresem en la forma canònica:

$$y'(x) + \underbrace{\left(\frac{-2}{x}\right)}_{p(x)} y(x) = \underbrace{x}_{q(x)}.$$

Ara hem de multiplicar pel terme

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \left(\frac{-2}{x}\right)dx} = e^{-2ln(|x|)} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Així doncs, hem de multiplicar la EDO en forma canònica pel terme $\frac{1}{x^2}$ *i obtenim,*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \frac{1}{x}.$$

Integrant respecte x*,*

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right)dx = \int \frac{1}{x}dx$$

obtenim,

$$\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \int \frac{1}{x}dx + C$$

d'on es pot aïllar la funció $y(x)$ *i obtenir la solució general que és:*

$$y(x) = x^2\left[\ln|x| + C\right].$$

EDO's lineals de segon ordre.

Definició 10. *S'anomena EDO lineal de segon ordre a tota equació de la forma:*

$$y'' + g_1(x)y' + g_2(x)y = f(x).$$

Nota 1. *A partir d'aquí ja no indiquem que la funció y depen de x. Ho donem per suposat. Per exemple, no indiquem $y''(x)$ sinó que simplement posem y''.*

Definició 11. *Es diu que la EDO és a coeficients constants quan $g_1(x) = a$ i $g_2(x) = b$, és a dir, la EDO té la forma*

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad \text{on} \ \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Definició 12. *Es diu que la EDO és homogènia si $f(x) = 0$.*

EDO's lineals de segon ordre homogènies a coeficients constants.

Teorema 1. *Si y_1 i y_2 són dues solucions particulars linealment independents de la EDO*

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

aleshores la solució general és

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Així per trobar la solució general n'hi ha prou amb trobar dues solucions particulars independents. Anem a veure com trobar dues solucions particulars.

La naturalesa de l'equació suggereix que pot tenir solucions de la forma $y = e^{mx}$ (ja que les derivades d'aquesta funció són sempre múltiples de la pròpia funció). Si fos així com,

$$y = e^{mx}$$

$$y' = me^{mx}$$

$$y'' = m^2 e^{mx}$$

per tal que fos solució de la EDO (1) s'hauria de satisfer

$$\underbrace{m^2 e^{mx}}_{y''} + a\underbrace{me^{mx}}_{y'} + b\underbrace{e^{mx}}_{y} = 0.$$

Treiem factor comú el terme e^{mx},

$$e^{mx}(m^2 + am + b) = 0$$

L'anterior equació es verificarà si i només si

$$\boxed{m^2 + am + b = 0} \longleftarrow \text{Equació característica.}$$

Resumint,

$$\boxed{y = e^{mx} \text{ és solució} \iff m^2 + am + b = 0}$$

Teorema 2 (Solucions de l'EDO $y'' + ay' + by = 0$)**.** *Es resol l'equació característica $m^2 + am + b = 0$. Al ser una equació de segon grau hi ha tres possibilitats:*

- *Arrels reals diferents.* *Si $m_1 \neq m_2$ ($m_1, m_2 \in \mathbb{R}$) aleshores la solució general és*

$$\boxed{y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}.}$$

- *Arrels reals iguals.* *Si $m_1 = m_2 =: m$ ($m \in \mathbb{R}$) aleshores la solució general és*

$$\boxed{y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx} = (C_1 + C_2 x) e^{mx}.}$$

- *Arrels complexes conjugades.* *Si $m_1 = \alpha + \beta i$ i $m_2 = \alpha - \beta i$ aleshores la solució general és*

$$\boxed{y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.}$$

ex. *Anem a resoldre l'EDO $y'' - 4y = 0$. L'equació característica és*

$$m^2 - 4 = 0 \iff m = \pm 2.$$

Així hem trobat dues arrels reals diferents i per tant la solució general és

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

---

ex. *Anem a resoldre l'EDO $y'' + 4y' + 4y = 0$. L'equació característica és*

$$m^2 + 4m + 4 = 0 \iff m = -2.$$

Així hem trobat dues arrels reals iguals i per tant la solució general és

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.$$

---

ex. *Anem a resoldre l'EDO $y'' + 6y' + 12y = 0$. L'equació característica és*

$$m^2 + 6m + 12 = 0 \iff m = -3 \pm \sqrt{3}i.$$

Així hem trobat dues arrels complexes conjugades i per tant la solució general és

$$y = C_1 e^{-3x} \cos \sqrt{3}\,x + C_2 e^{-3x} \sin \sqrt{3}\,x.$$

EDO's lineals de segon ordre NO homogènies a coeficients constants.

Teorema 3. *Sigui $y'' + ay' + by = f(x)$. Si y_p és una solució particular d'aquesta equació i y_h és la solució general de l'equació homogènia corresponent (fent $f(x) = 0$) aleshores*

$$y = y_p + y_h$$

és la solució general de l'EDO no homogènia.

Dem: Comprovem que $y = y_p + y_h$ és solució,

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= (y_p + y_h)'' + a(y_p + y_h)' + b(y_p + y_h) \\ &= (y_p'' + y_h'') + a(y_p' + y_h') + b(y_p + y_h) \\ &= \underbrace{(y_p'' + ay_p' + by_p)}_{f(x)} + \underbrace{(y_h'' + ay_h' + by_h)}_{0} = f(x). \end{aligned}$$

El que necessitem és doncs saber trobar una solució particular y_p de l'EDO no homogènia. Això ho aconseguirem amb el mètode dels coeficients indeterminats. Aquest mètode ens serà útil quan $f(x)$ consisteixi en la suma o productes de funcions del tipus

$$x^n, e^x, \cos \beta x, \sin \beta x.$$

La clau del mètode consisteix en conjecturar que y_p ha de ser *semblant* a $f(x)$. Fixeu-vos que $x^n, e^x, \cos \beta x, \sin \beta x$ són funcions que tenen derivades cícliques.

ex. *Volem trobar una solució particular de la EDO*

$$y'' + 3y' + 5y = e^{2x}.$$

Conjecturem que $y_p = Ae^{2x}$ *on* A *és el coeficient indeterminat a determinar. Substituint a la EDO,*

$$4Ae^{2x} + 3(2Ae^{2x}) + 5Ae^{2x} = e^{2x}.$$

Treiem factor comú A *i tenim,*

$$A(4+6+5)e^{2x} = e^{2x} \ \forall x \quad \Longrightarrow A = \frac{1}{15}.$$

Així la solució particular buscada és $y = \frac{1}{15}e^{2x}$.

Transformada de Laplace.

Una manera per a resoldre EDO's és aplicar a l'EDO la transformada de Laplace obtenint un sistema algebraic d'equacions. Es resol el sistema algebraic que és mes fàcil de resoldre i després es fa la transformada inversa de Laplace per obtenir la solució de la EDO.

Definició 13 (Transformada). *Sigui $f(t)$ funció definida per a $t \geq 0$. Suposem que existeix la següent integral impròpia:*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \quad amb\ s \geq 0\,. \tag{2}$$

Aleshores, $F(s)$ s'anomena transformada de Laplace de $f(t)$.

Notació: $F(s) = L(f) = \mathcal{L}(f)$.

Definició 14 (Antitransformada). *Donada la funció $F(s)$, la seva antitransformada és la funció $f(t)$ tal que es verifica la igualtat (2).*

Notació: $f(t) = L^{-1}(F) = \mathcal{L}^{-1}(F)$.

Càlcul de transformades.

- Transformada de $f(t) = 1$

$$L(f) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s}\, e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty}$$

$$= -\lim_{t\to\infty} e^{-st} + \frac{1}{s}$$

Com $s > 0$ i $t > 0$, resulta que l'exponent de la funció e^{-st} és negatiu. Per tant:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} = 0$$

D'on: $L(1) = \frac{1}{s}$.

ex. *Calcula la transformada de Laplace de la funció $f(t) = e^{at}$, sent a un paràmetre real qualsevol.*

Taula bàsica de transformades de Laplace.

A la pràctica no es calculen les transformades de les funcions bàsiques cada cop que es necessiten sinó que es recórrer a una taula amb aquestes transformades.

$f(t)$	$L(f)=F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

Propietats.

Però potser necessitarem calcular la transformada de funcions no tan bàsiques. Aleshores haurem de fer servir algunes propietats importants que té l'operador transformada de Laplace i l'operador transformada inversa.

- Linealitat

$$L\left(a\, f(t) + b\, g(t)\right) = a\, L(f) + b\, L(g)$$

Per exemple:

$$L(2sin(t) - e^{3t}) =$$

$$= 2L(sin(t)) - L(e^{3t})$$

$$= \tfrac{1}{s^2+1} - \tfrac{1}{s-3}$$

L'antitransformada també és lineal:

$$L^{-1}\left(a\, F(s) + b\, G(s)\right) = a\, L^{-1}(F) + b\, L^{-1}(G)\,.$$

ex. *Reducció a fraccions simples. Volem calcular l'antitransformada de*

$$F(s) = \frac{s}{s^2+s-2}$$

Com aquesta funció no surt a la taula cal transformar-la en funcions que hi apareixen.

Per això, la descomposem en suma de fraccions:

1. *Arrels del denominador:*

   Arrels de s^2+s-2*:* $s=-2$, $s=1$.

2. *Descomposició de suma de fraccions*

   $$\frac{s}{s^2+s-2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} \Rightarrow A = \frac{1}{3}\,,\; B = -\frac{1}{3}\,.$$

3. *Càlcul d'antitransf.*

   $$L^{-1}(F) = L^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}}{s+2} + \frac{-\frac{1}{3}}{s-1}\right)$$
   $$= \frac{1}{3}\left(e^{-2t} - e^{t}\right)$$

ex. *Calcula l'antitransformada de la funció*

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2-2s+4}\,.$$

- Transformada de la derivada

$$L(f') = sL(f) - f(0)$$

En efecte:

$$L(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt$$

Fent integració per parts amb $u = e^{-st}$ i $dv = f'(t)\, dt$, obtenim:

$$\begin{aligned} L(f') &= e^{-st} f(t)\Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty f(t)\; s\; e^{-st}\; dt \\ &= \lim_{t\to\infty} (e^{-st}\; f(t)) - f(0) + sL(f)\,. \end{aligned}$$

Com $\lim_{t\to\infty} e^{-st}\; f(t) = 0$, resulta que

$$L(f') = sL(f) - f(0)\,.$$

- Transformada de la derivada d'ordre n

$$L(f^n) = s^n\ L(f) - s^{n-1}\ f(0) - \cdots - s\ f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Per exemple, considerem l'equació diferencial:

$$y'' - 2y' + 3y = 0$$

amb c.i. $y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Si apliquem la transformada de Laplace a tota l'edo, obtenim:

$$L(y'') - 2L(y') + 3L(y) = L(0) = 0$$

$$s^2 L(y) - sy(0) - y'(0) - 2\,(sL(y) - y(0)) + 3L(y) = 0$$

Imposant les c.i.,

$$s^2 L(y) - 1 - 2sL(y) + 3L(y) = 0$$

$$\Rightarrow L(y) = \frac{1}{s^2 - 2s + 3}\,.$$

- Transformada de la integral

$$L\left(\int_0^t f(x)dx\right) = \frac{1}{s}L\left(f(t)\right) \text{ amb } s>0$$

o bé, pasant a antitransformades:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}L\left(f(t)\right)\right) = \int_0^t f(x)dx$$

Per exemple, calculem $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+4)}\right)$.

Mirant la taula de transformades, ens adonem que

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

Per tant,

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+4)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}L\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2x)\,dx = \frac{1}{4}(1-cos(2t))\,.$$

- Traslació en s

Coneixem $f(t)$ i la seva transformada $L(f)$. Aleshores:

$$L\left(e^{at}f(t)\right) = F(s-a)$$

o bé, passant a antitransformades:

$$L^{-1}\left(F(s-a)\right) = e^{at}f(t)$$

on $f(t) = L^{-1}\left(F(s)\right)$.

Per exemple, $L^{-1}\left(\frac{s-3}{(s-3)^2+4}\right)$ correspon a la antitransf. de la funció $\cos(2t)$:

$$L\left(\cos(2t)\right) = \frac{s}{s^2+4}$$

però traslladada en $a=3$. Per tant,

$$L^{-1}\left(\frac{s-3}{(s-3)^2+4}\right) = e^{3t}\cos(2t)\,.$$

- Translació en t

Per a poder aplicar aquesta propietat, necessitem definir la següent funció.

Funció de Heaviside

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

També s'anomena funció esglaó.

Per exemple, la funció

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \pi \\ \cos(2t) & t > \pi \end{cases}$$

es pot expressar en termes de la funció esglaó:

$$f(t) = \cos(2t)\, u(t-\pi)\,.$$

La funció

$$h_a(t) = \begin{cases} 1 & t \leq a \\ \\ 0 & t > a \end{cases}$$

s'anomena complementària de Heaviside i equival a

$$h_a(t) = u(a-t) = 1 - u(t-a)\,.$$

Per exemple,

$$f(t) = \begin{cases} e^{-3t} & t \leq 2 \\ \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

es pot expressar com

$$e^{-3t}\, h_2(t).$$

Considerem per exemple

$$g(t) = \begin{cases} t & t \leq 1 \\ \\ \sin(t) & t > 1 \end{cases}$$

Per expressar-la en termes de Heaviside, podem ajudar-nos de la seva gràfica. Aleshores,

$$g(t) = t(1 - u(t-1)) \; + \; \sin(t)u(t-1)\,.$$

Ara sí podem definir la translació en t.

$$L\left(f(t-a)\,u(t-a)\right) = e^{-as}F(s)$$

on $F(s) = L(f)$.

IMPORTANT: Per a poder aplicar aquesta fòrmula, cal que la funció $f(t)$ es trobi traslladada en el mateix valor que $u(t-a)$.

Per exemple,

$$L\left(e^{t-2}\,u(t-2)\right) = \frac{e^{-2s}}{s-1}$$

ja que $L(e^t) = \frac{1}{s-1} = F(s)$.

Transformada d'una funció definida a trams

$$f(t) = \begin{cases} e^t & t < 2 \\ t & t \geq 2 \end{cases}$$

Pas 1. Expressar $f(t)$ en termes de Heaviside:

$$f(t) = e^t(1 - u(t-2)) + tu(t-2)$$

$$f(t) = e^t - e^t u(t-2) + tu(t-2)\,.$$

Pas 2. Aplicar la fòrmula, tenint en compte que la funció que multiplica Heaviside ha d'estar traslladada en $a = 2$.

$$L(f) = L(e^t) - L(e^t u(t-2)) + L(tu(t-2))$$

$$= \frac{1}{s-1} - L(e^t u(t-2)) + L(tu(t-2))$$

Com $e^t = e^{t-2+2} = e^2\, e^{t-2}$, tenim que

$$L\left(e^t u(t-a)\right) = e^2\, L\left(e^{t-2}\, u(t-2)\right)$$

$$= e^2 \frac{e^{-2s}}{s-1}$$

Com $t = t-2+2$, tenim que

$$L\left(tu(t-a)\right) = L\left((t-2)\, u(t-2)\right) + 2L\left(u(t-2)\right)$$

$$= \frac{e^{-2s}}{s^2} + 2\frac{e^{-2s}}{s}$$

Per tant,

$$L(f) = \frac{1}{s-1} - e^2 \frac{e^{-2s}}{s-1} + \frac{e^{-2s}}{s^2} + 2\frac{e^{-2s}}{s}.$$

Resolució d'EDO's amb la transformada de Laplace.

Considerem el problema de resoldre l'EDO

$$y'(t) - y(t) = 2e^{(-t)}.$$

Apliquem la transformada de Laplace a banda i banda de l'EDO i obtenim,

$$L[y'(t)] - L[y(t)] = L[2e^{(-t)}].$$

Substituim $L[y'(t)]$ per $sL[y(t)] - y(0)$, i veiem que ara tenim una simple equació algebraica:

$$sL[y(t)] - y(0) - L[y(t)] = 2/(s+1)$$

que es pot escriure com

$$sL[y(t)] - L[y(t)] = 2/(s+1),$$

ja que la condició inicial ens diu que $y(0) = 0$.

Resolem aquesta equació algebraicament. Escrivint $L = L[y(t)]$ i treient factor comú L a la part esquerra de la igualtat obtenim:

$$L(s-1) = 2/(s+1)$$

per tant

$$L = 2/((s-1)(s+1)) \Rightarrow L[y(t)] = 2/((s-1)(s+1)).$$

La solució $y(t)$ es calcula trobant una transformació inversa de Laplace de la part dreta de la igualtat

$$y(t) = L^{(-1)}\left[\frac{2}{(s-1)(s+1)}\right]$$

L'expressió $\dfrac{2}{(s-1)(s+1)}$ es pot escriure com $\dfrac{1}{(s-1)} - \dfrac{1}{(s+1)}$ per tant

$$y(t) = L^{(-1)}\left[\frac{1}{(s-1)} - \frac{1}{(s+1)}\right]$$

això és,

$$y(t) = L^{(-1)}\left[\frac{1}{(s-1)}\right] - L^{(-1)}\left[\frac{1}{(s+1)}\right]$$

el que ens dóna:

$$y(t) = e^{(t)} - e^{(-t)}.$$

ex. *Resoleu les següents EDO's utilitzant la transformada de Laplace.*

- $y' + y = 0$ *amb* $y(0) = 3$.
- $y' + y = 2e^t$ *amb* $y(0) = 2$.
- $y' - 2y = 5\cos t$ *amb* $y(0) = -2$.
- $y' - 3y = \cos t - 3\sin t$ *amb* $y(0) = 2$.
- $y' + y = t^2 + 2t$ *amb* $y(0) = 1$.