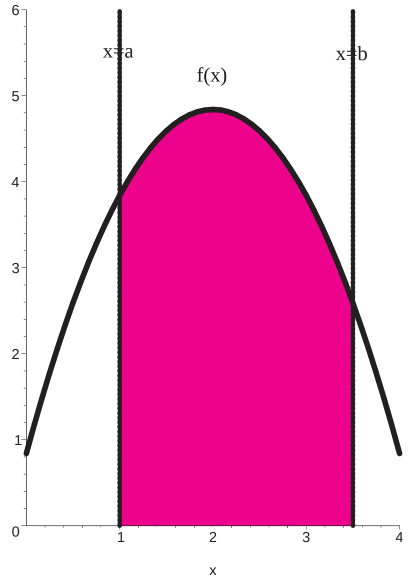
Integrals Dobles i Triples

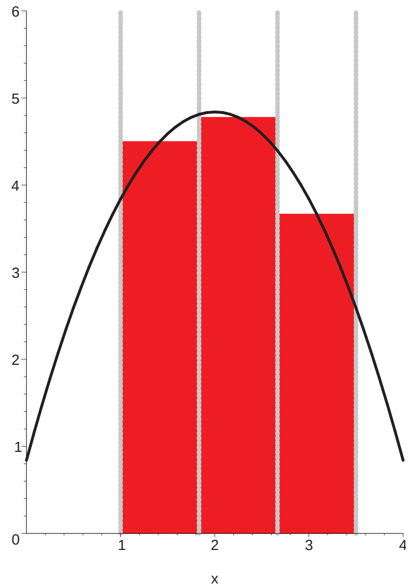
Yolanda Vidal, Francesc Pozo, Núria Parés

Integral simple.

Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció fitada i positiva.
Objectiu: determinar l'àrea limitada per la gràfica de f, l'eix d'abscisses i les rectes d'equacions $x = a$ i $x = b$.



Idea per aproximar l'àrea: Dividir l'interval $[a, b]$ en un cert nombre de parts. Aproximar l'àrea en cada una d'aquestes parts per l'àrea d'un rectangle.



Idea per aproximar l'àrea superiorment:
Considerem una partició $p \in \mathcal{P}([a,b])$ de l'interval

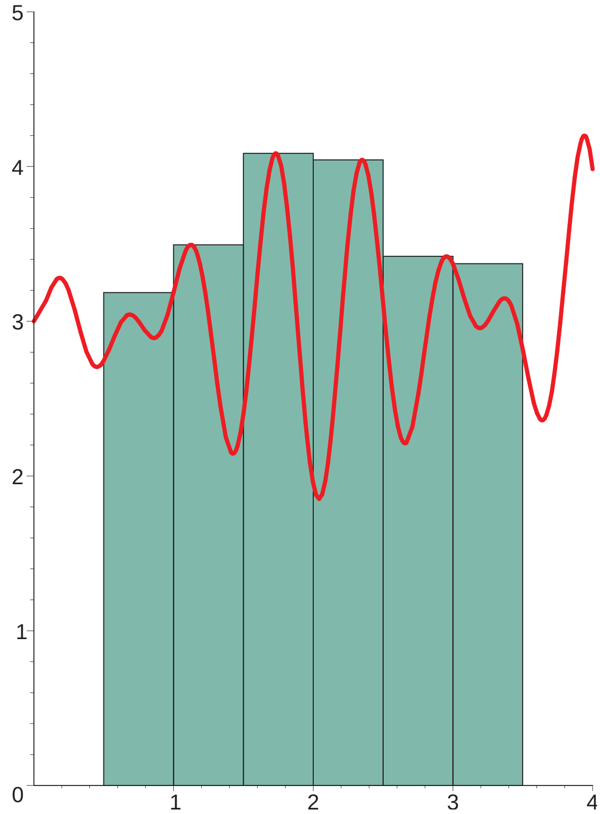
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

i dintre de cada subinterval $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ calculem $M_i = \max\{f(x), x \in I_i\}$.

Considerem l'àrea dels rectangles que determinen:

$$\bar{S}_p = M_0(x_1 - x_0) + M_1(x_2 - x_1) + \cdots + M_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

i tenim una cota superior de l'àrea que volem calcular.



I_i	M_i	A_i
$[.5 - 1.]$	3.1856	1.5928
$[1. - 1.5]$	3.4944	1.7472
$[1.5 - 2.]$	4.0851	2.0425
$[2. - 2.5]$	4.0431	2.0215
$[2.5 - 3.]$	3.4197	1.7098
$[3. - 3.5]$	3.3720	1.6860
		10.7999

En aquest cas tenim una aproximació $\bar{S}_p = 10.7999$ quan l'àrea exacta és $A = 9.0301$.

Idea per aproximar l'àrea inferiorment:
considerem la partició anterior, $p \in \mathcal{P}([a, b])$:

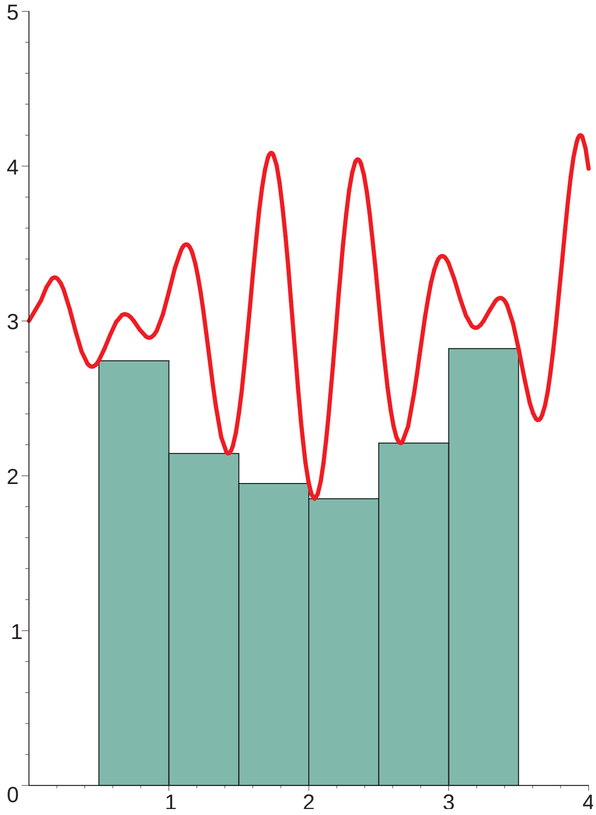
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

i dintre de cada subinterval $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ calculem
$m_i = \min\{f(x), x \in I_i\}$.

Llavors si considerem l'àrea dels rectangles que determinen:

$$\underline{S}_p = m_0(x_1 - x_0) + m_1(x_2 - x_1) + \cdots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

tenim una cota inferior de l'àrea que volem calcular.



I_i	m_i	A_i
$[.5 - 1.]$	2.7433	1.3717
$[1. - 1.5]$	2.1446	1.0723
$[1.5 - 2.]$	1.9504	0.9752
$[2. - 2.5]$	1.8519	0.9260
$[2.5 - 3.]$	2.2112	1.1056
$[3. - 3.5]$	2.8210	1.4105
		6.8612

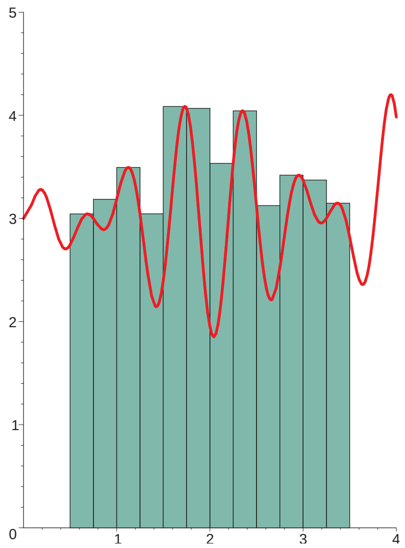
En aquest cas tenim una aproximació $\underline{S}_p = 6.8612$ quan l'àrea exacta és $A = 9.0301$.

Departament de Matemàtica Aplicada III
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

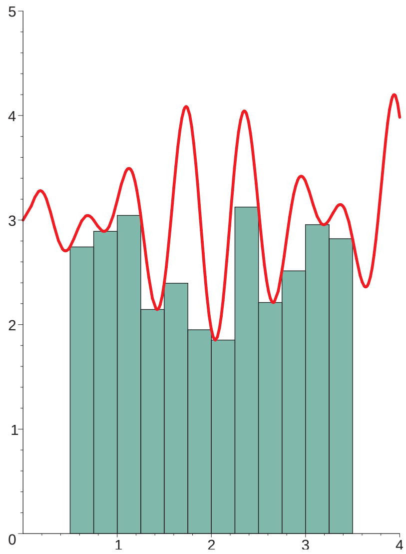
Observeu que si fem més fina una partició, aleshores la suma inferior $\underline{S}_p$ augmenta, i la suma superior $\bar{S}_p$ disminueix.

$$\boxed{A = 9.0301}$$

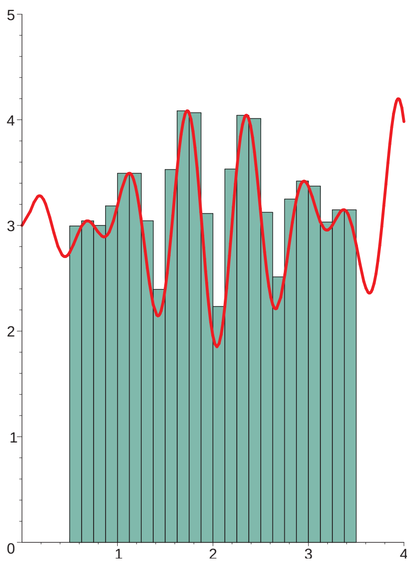
$\bar{S}_p = 10.39054$



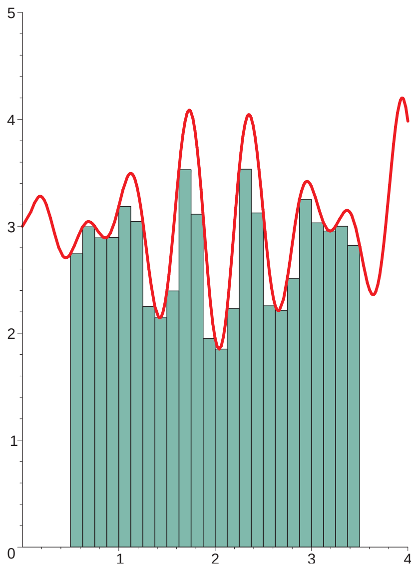
$\underline{S}_p = 7.66200$



$\bar{S}_p = 9.78457$



$\underline{S}_p = 8.23991$



ex. *Considerem la funció de la gràfica anterior entre .5 i 3.5. Les sumes inferiors i superiors convergeixen al valor de l'àrea.*

num int	$\underline{S}_p$	$\bar{S}_p$
6	6.86138	10.79976
18	8.01000	10.01883
30	8.41189	9.64244
42	8.57481	9.47954
54	8.67547	9.38094
66	8.73898	9.31832
78	8.78370	9.27524
90	8.81705	9.24239
600	8.99821	9.06217
1200	9.01418	9.04615
2400	9.02190	9.03793
4800	9.02620	9.03418
	$A = 9.0301$	

Definició 1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és un funció fitada en el seu domini, es diu que f és integrable en el sentit de Riemann si es compleix:*

$$\max_{p \in \mathcal{P}([a,b])} \{\underline{S}_p\} = \min_{p \in \mathcal{P}([a,b])} \{\bar{S}_p\}$$

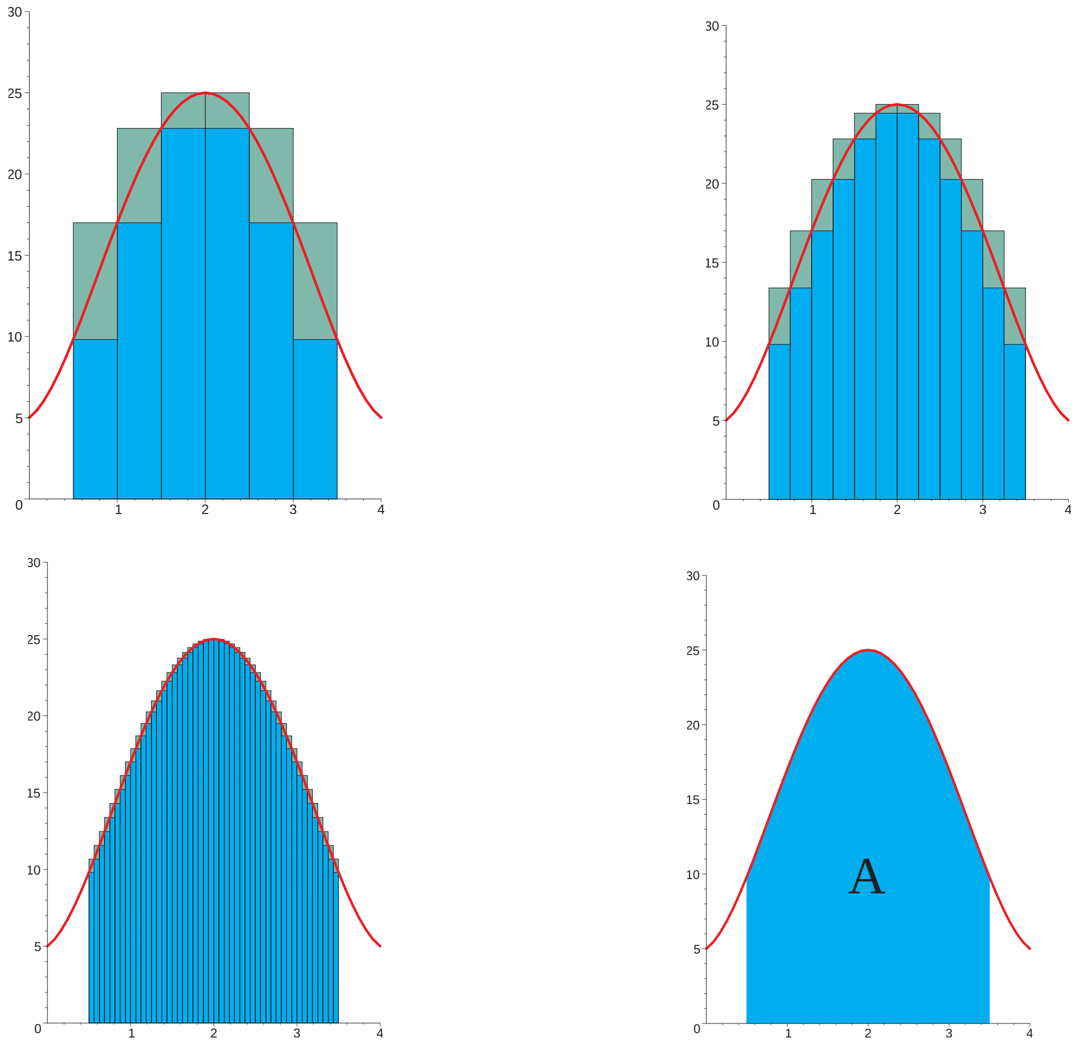
Aleshores s'anomena integral de f en $[a,b]$ i es denota per:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Observació 1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és una funció fitada i integrable en el sentit de Riemann, i a més, $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$ (és* positiva*), llavors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$$

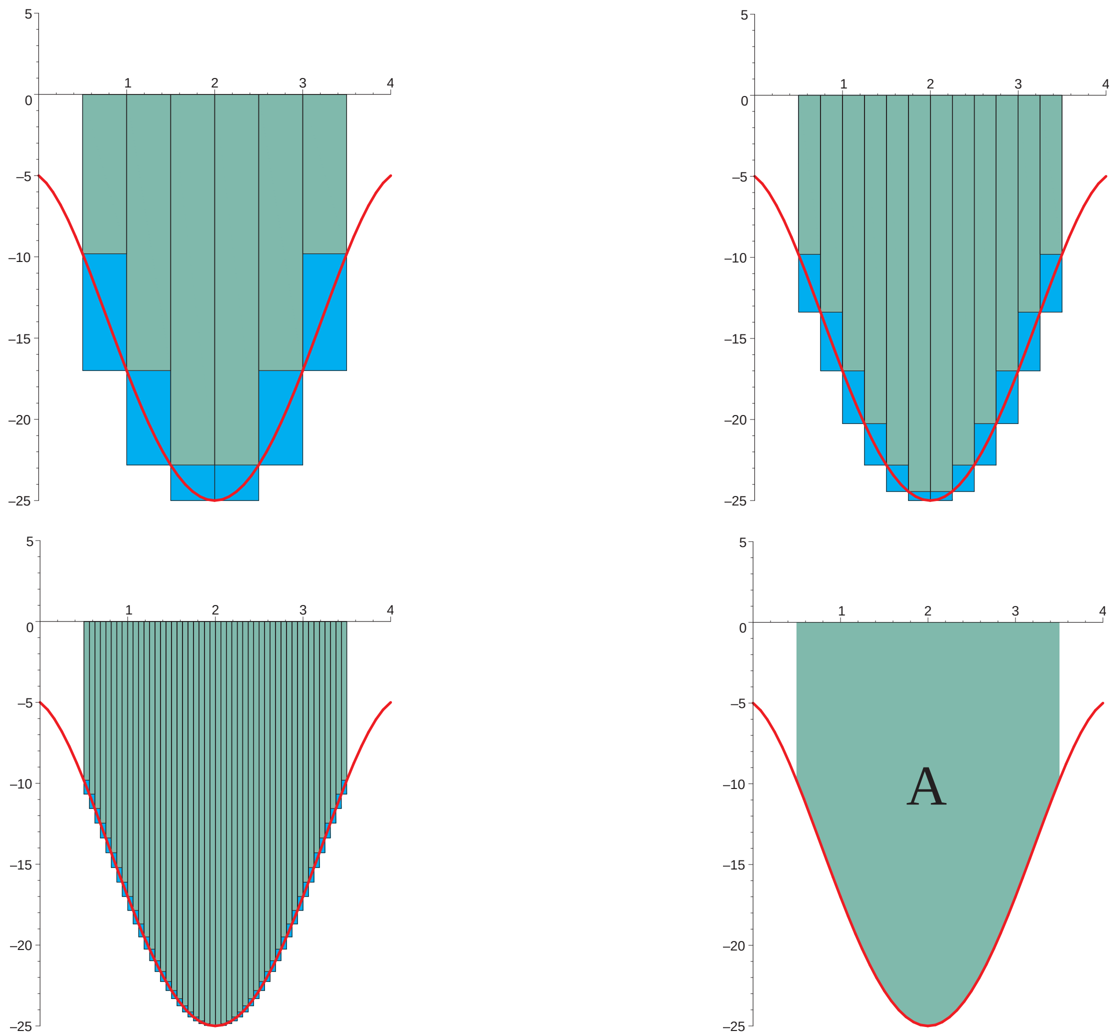
és l'àrea limitada per la gràfica de f, l'eix d'abscisses i les rectes d'equacions $x = a$ i $x = b$.



Observació 2. *Si* $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *és una funció fitada i integrable en el sentit de Riemann, i a més,* $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$ *(és* negativa*), llavors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$$

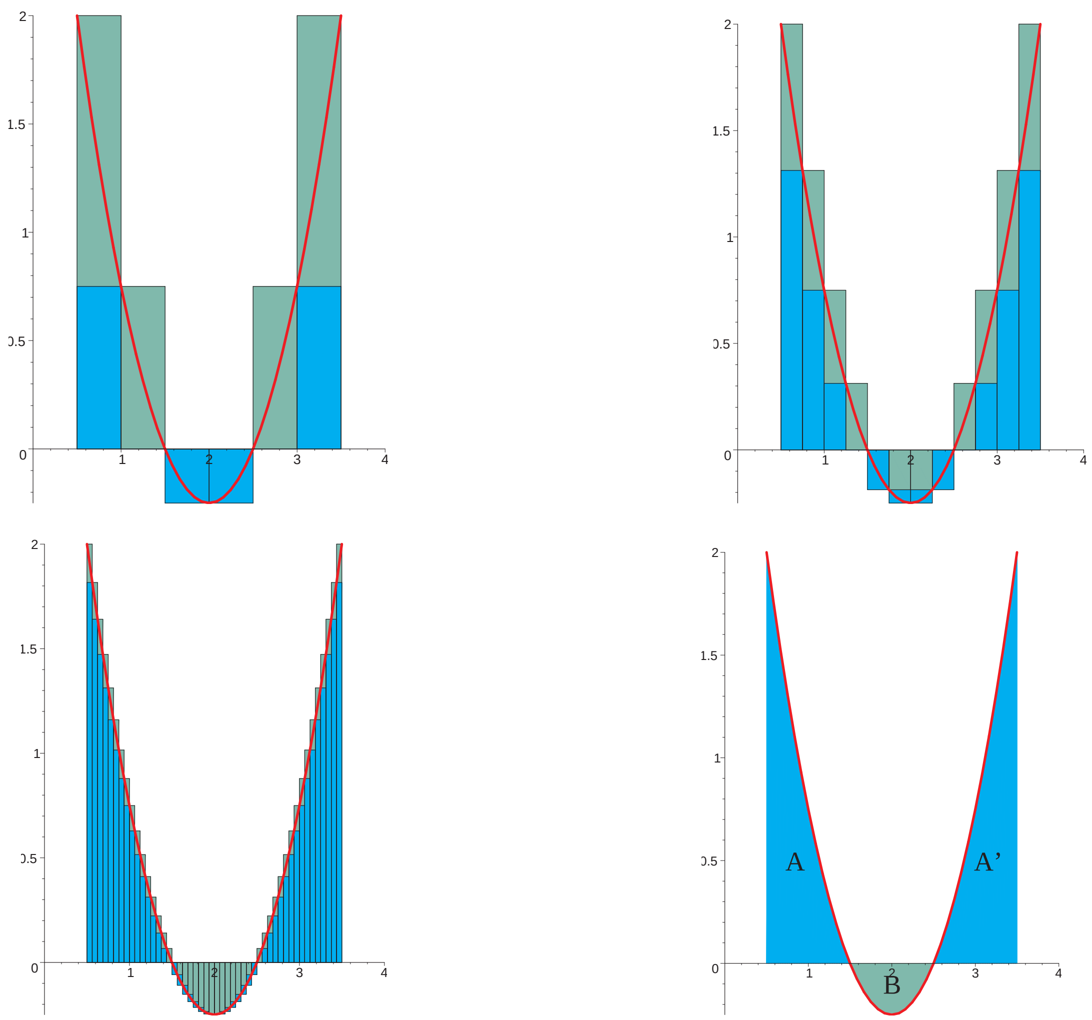
és menys l'àrea limitada per la gràfica de f*, l'eix d'abscisses i les rectes d'equacions* $x = a$ *i* $x = b$*.*



Observació 3. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és una funció fitada i integrable en el sentit de Riemann, llavors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A - B$$

ens dóna l'àrea limitada per la funció f en els trossos positius, menys l'àrea limitada per la funció f ens els trossos negatius.



Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és un funció integrable en el sentit de Riemann llavors sabem que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \max_{p\in\mathcal{P}([a,b])} \{\underline{S}_p\} = \min_{p\in\mathcal{P}([a,b])} \{\bar{S}_p\}.$$

El problema és que aquesta definició és difícil d'usar per calcular les integrals a la pràctica.

Proposició 1 (Regla de Barrow)**.** *Si f és una funció contínua en $[a, b]$ i $\phi(x)$ és una primitiva de f, és a dir:*

$$\phi'(x) = f(x),$$

llavors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \phi(b) - \phi(a).$$

S'acostuma a denotar per:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \phi(x)\Big|_a^b = \phi(b) - \phi(a).$$

La proposició anterior és molt important perquè ens relaciona el problema de càlcul d'*àrees* amb el càlcul de *derivades*.

ex. *Calculeu la integral* $\int_0^{2\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

Si considerem $f(x) = \cos(x)$, tenim que $\phi(x) = \sin(x)$ n'és una primitiva i per tant

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)\Big|_0^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0.$$

Propietats bàsiques

Donades f i g integrables en el sentit de Riemann en $[a,b]$:

- si k és una constant qualsevol

$$\int_a^b k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- si $c \in [a,b]$,

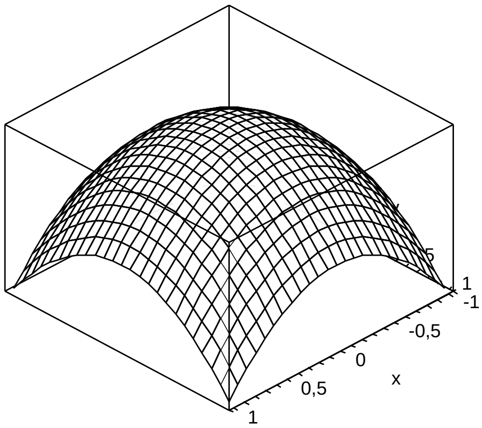
$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

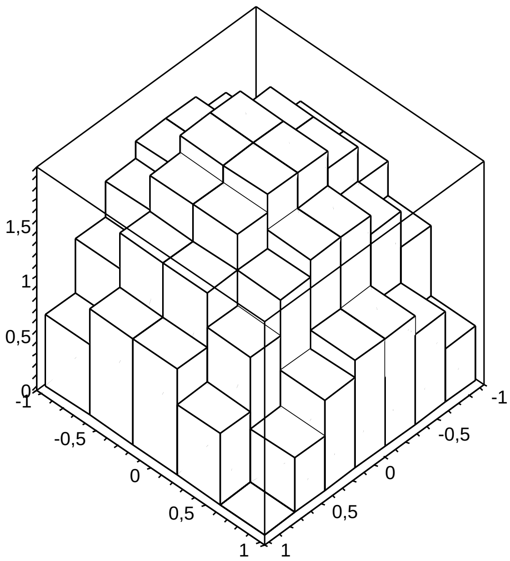
Integral doble.

Sigui $f : [a,b] \times [c,d]\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funció de dos variables fitada i positiva. **Objectiu:** determinar el volum sota la gràfica de f determinat pels plans

$$x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d.$$



Idea per aproximar el volum: Dividir els intervals $[a,b]$ i $[c,d]$ en un cert nombre de parts. Aproximar l'àrea en cada una d'aquestes parts per l'àrea d'un paralelepíped.



Idea per aproximar el volum superiorment:

Considerem una partició $p \in \mathcal{P}([a,b])$ dels intervals

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$$

i dintre de cada subinterval $I_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ calculem $M_{ij} = \max\{f(x), x \in I_{ij}\}$.

Considerem el volumen dels paralelepípeds que determinen:

$$\bar{S}_p = M_{00}(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) + M_{01}(x_1 - x_0)(y_2 - y_1) + \cdots +$$

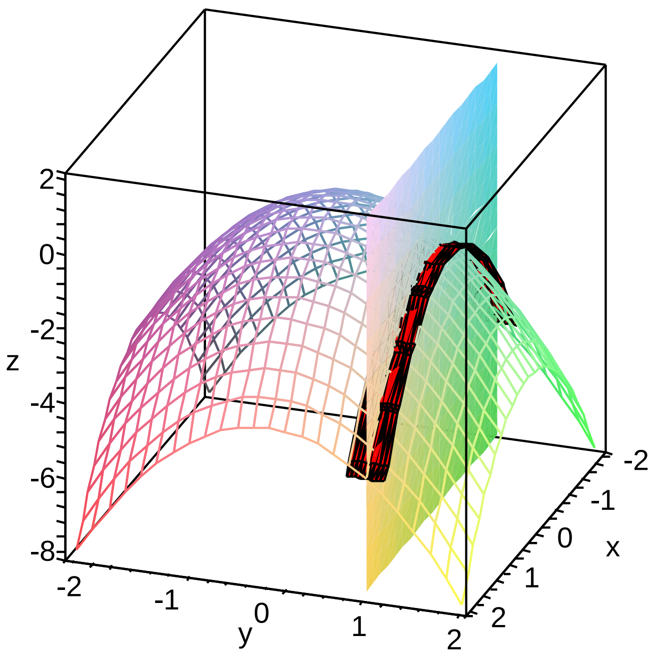
$$M_{nm}(x_n - x_{n-1})(y_m - y_{m-1})$$

i tenim una cota superior de l'àrea que volem calcular.

Càlcul de la integral doble.

Sigui $f : [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció de dos variables fitada i positiva. Volem calcular el volum sota la superfície determinada per aquesta funció.

Prenem $y_0 \in [c,d]$ i el fixem. Calculem l'àrea de la secció que s'obté al tallar pel pla $y = y_0$.



$$A(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)dx.$$

Així doncs, el volum total serà:

$$V = \int_c^d A(y)dy \quad \Rightarrow \quad V = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

La integral

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

es coneix com integral iterada, ja que s'obté integrant respecte x i després integrant el resultat obtingut respecte y.

Enlloc d'utilitzar plans de tall perpendiculars a l'eix Y es poden fer respecte l'eix X obtenint el mateix resultat:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

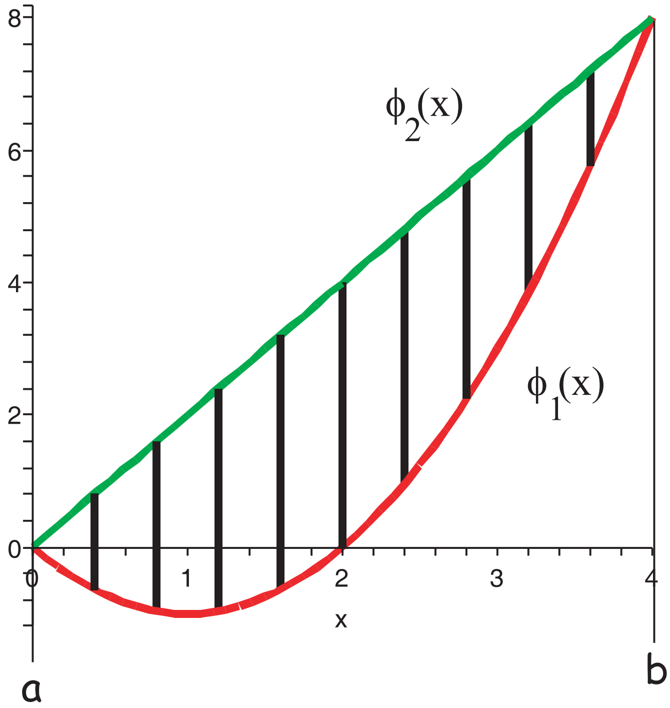
ex. *Sigui* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *definida en* $[-1,1] \times [0,1]$. *Anem a calcular el volum que determina.*

Hem de calcular la integral:

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 x^2 + y^2\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{-1}^1 dy =$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2\right) - \left(\frac{-1}{3} - y^2\right) dy =$$
$$= \int_0^1 \frac{2}{3} + 2y^2\,dy = \left[\frac{2}{3}y + \frac{2y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

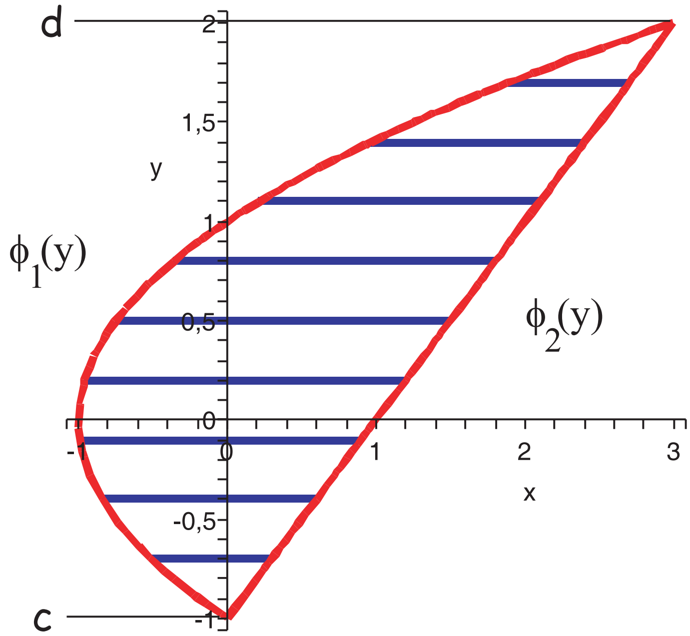
Càlcul integral doble sobre regions més generals.

Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funció de dos variables fitada i positiva. Volem calcular el volum sota la superfície determinada per aquesta funció en el domini D.



$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

$$\int_0^4 \int_{x(x-2)}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx.$$



$$\int_c^d \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

$$\int_{-1}^{2} \int_{y^2-1}^{y+1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Exercici Proposat 1. *Calculeu el volum delimitat per la funció $x^3y+\cos x$ en el domini triangular delimitat per les rectes $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ i $x=y$.*

Integral triple.

Motivació: Si la temperatura dins un forn no és uniforme, determinar la temperatura promig involucra "sumar" els valors de la funció temperatura en tots els punts de la regió delimitada per les parets del forn i després dividir pel volum total del forn. "Sumar" la funció temperatura, T(x,y,z), a dins del volum V vol dir calcular la integral:

$$\int\int\int_V T(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Les integral triples es calculen de manera anàloga a les integrals dobles però ara mitjançant tres integracions successives.

Sigui $f:[a,b]\times[c,d]\times[p,q]\subset\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ una funció de tres variables fitada. Aleshores,

$$\int_a^b\int_c^d\int_p^q f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx=\int_c^d\int_p^q\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy=$$

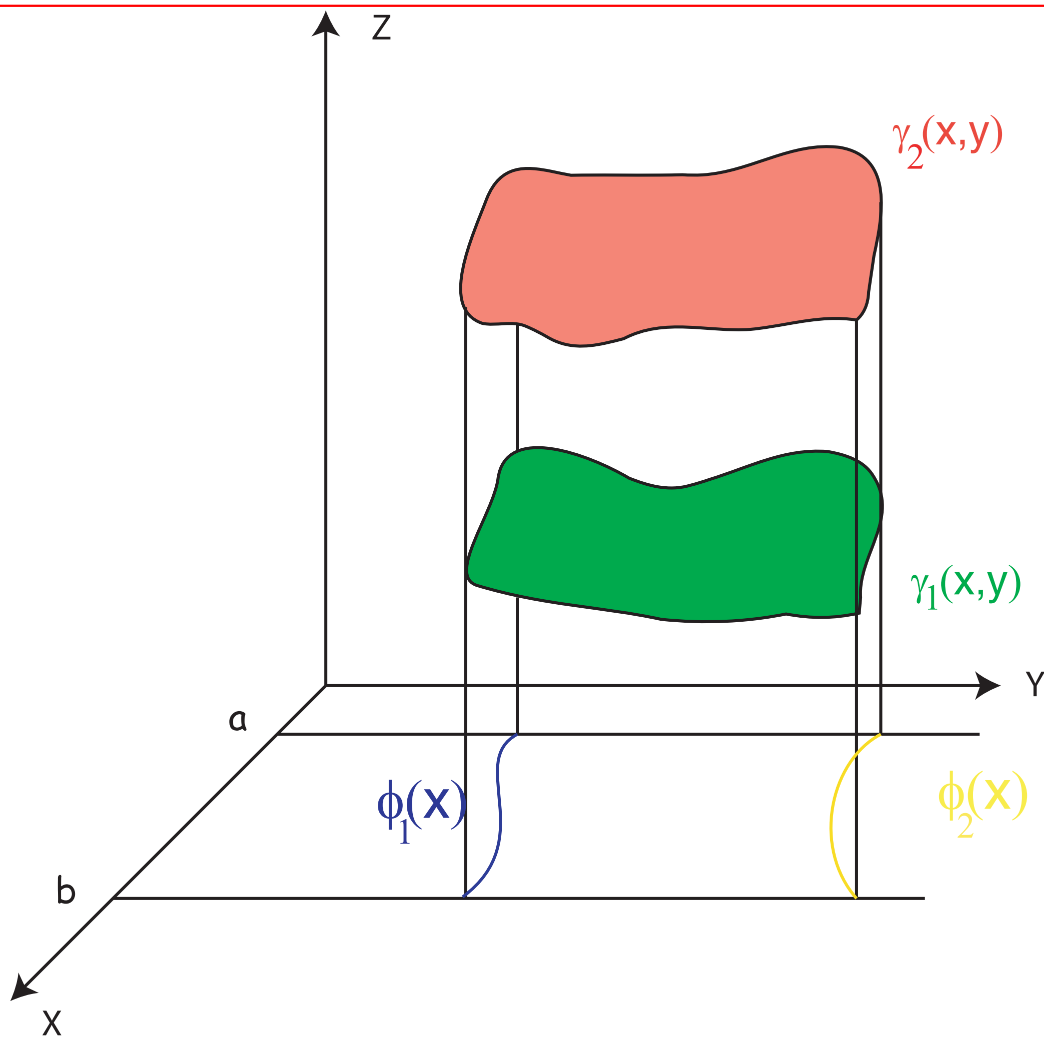
$$\int_p^q\int_a^b\int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz=\int_c^d\int_a^b\int_p^q f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy=\ldots$$

Exercici Proposat 2. *Sigui* $V = [0,1] \times [\frac{-1}{2}, 0] \times [0, \frac{1}{3}]$. *Calculeu*

$$\int\int\int_V (x + 2y + 3z)^2 \, dx \, dy \, dz.$$

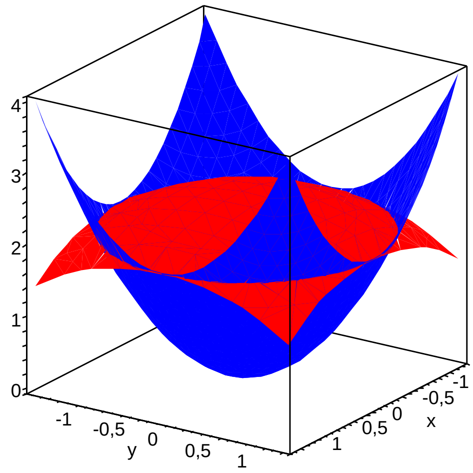
Solució: $\frac{1}{24} \frac{1}{15} \left[(2^5 - 2) \right]$.

Càlcul integral triple sobre regions més generals.



$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z) \, dz \, dy \, dx$$

ex. *Anem a calcular el volum de la regió limitada inferiorment pel parabolid $z = x^2 + y^2$ i superiorment per l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.*



El paraboloid i l'esfera s'intersecten quan,

$$z = 6 - z^2 \Rightarrow z = 2.$$

Així tenim,

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$
$$-\sqrt{2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}$$
$$x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}$$

Per tant, el volum el trobarem calculant la integral,

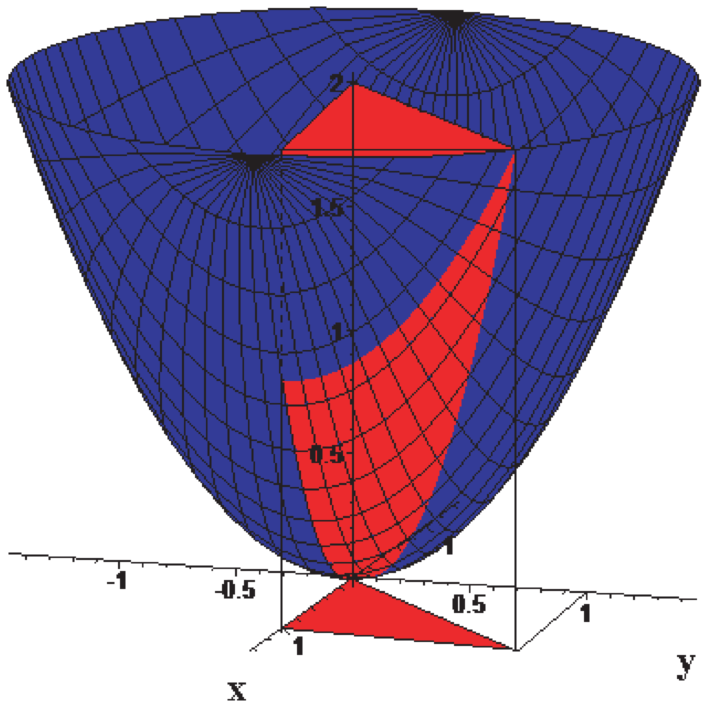
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} 1 dz\, dy\, dx$$

ex. *Anem a avaluar la integral*

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz\, dy\, dx$$

i determinar quina és la regió d'integració. La regió d'integració ve donada per:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & x & \leq & 1 \\ 0 & \leq & y & \leq & x \\ x^2+y^2 & \leq & z & \leq & 2 \end{array}$$



ex. *Anem a avaluar la integral:*

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x [z]_{z=x^2+y^2}^2 \; dy\,dx =$$
$$= \int_0^1 \int_0^x 2 - x^2 - y^2\,dy\,dx = \int_0^1 \left[2y - x^2y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x} dx =$$
$$= \int_0^1 2x - x^3 - \frac{x^3}{3}\,dx = \int_0^1 2x - \frac{4}{3}x^3\,dx =$$
$$= \left[x^2 - \frac{4}{3}\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}.$$