Extrems de funcions

Recordatori extrems lliures funcions una variable.

Sigui $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en l'interval (a, b) i $x_0 \in [a, b]$ un extrem de la funció $f(x)$.

En un entorn del punt x_0 podem considerar l'aproximació lineal (recta tangent) de la funció:

$$f(x) \simeq L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- Quan $f'(x_0) > 0$ veiem que:
  - Si $x > x_0$ (és a dir si $(x - x_0) > 0$) observant l'aprox. lineal deduïm que $f(x) > f(x_0)$
  - Si $x < x_0$ deduïm que $f(x) < f(x_0)$.

  És a dir quan $f'(x_0) > 0$ la funció és creixent en x_0.

- Quan $f'(x_0) < 0$ amb un raonament anàleg a l'anterir deduïm que la funció és decreixent en x_0.

És a dir, si $f'(x_0) \neq 0$ aleshores en x_0 no s'assoleix un màxim ni un mínim relatiu de la funció. Per tant, si en x_0 s'assoleix un extrem de la funció cal que $f'(x_0) = 0$. És a dir, la recta tangent és horitzontal.

En un entorn del punt x_0 podem considerar l'aproximació quadràtica de la funció ($f'(x_0)=0$):

$$f(x) \simeq Q(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2.$$

Prenent x proper a x_0 com que $(x-x_0)^2 > 0$ utilitzant l'aprox. quadràtica deduïm que

- Si $f''(x_0) > 0$ aleshores $f(x) > f(x_0)$ i per tant en x_0 s'assoleix un mínim relatiu.
- Si $f''(x_0) < 0$ aleshores $f(x) < f(x_0)$ i per tant en x_0 s'assoleix un màxim relatiu.

En el cas de tenir $f''(x_0) = 0$ caldria mirar el signe de la derivada tercera.

Extrems lliures funcions de dues variables.

Sigui $f : A \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en A i $\mathbf{x}_0 \in A$ un punt on s'assoleix un extrem de la funció $f(\mathbf{x})$.

En un entorn del punt $\mathbf{x}_0$ podem considerar l'aproximació lineal (pla tangent) de la funció:

$$f(\mathbf{x}) \simeq L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Si $\mathbf{x}_0$ és un extrem de la funció cal que el pla tangent sigui horitzontal. És a dir que la funció compleix $\nabla f(\mathbf{x}_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)) = (0, 0)$.

En un entorn del punt $\mathbf{x}_0$ podem considerar l'aproximació quadràtica de la funció que al complir $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ és:

$$f(\mathbf{x}) \simeq Q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T H(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0). \quad (1)$$

Arribats aquí fem dues definicions:

Definició 1. *Es diu que una matriu A de tamany $n \times n$ es* definida positiva *si compleix que*

$$\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Definició 2. *Es diu que una matriu A de tamany $n \times n$ es* definida negativa *si compleix que*

$$\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Així doncs, observant (1) i aplicant les definicions anteriors és fàcil deduir que:

- Si la matriu $H(\mathbf{x}_0)$ és definida positiva aleshores en $\mathbf{x}_0$ s'assoleix un mínim relatiu.
- Si la matriu $H(\mathbf{x}_0)$ és definida negativa aleshores en $\mathbf{x}_0$ s'assoleix un màxim relatiu.

Estudiar si una matriu es definida positiva i/o negativa no és trivial. En aquest curs ens centrarem amb funcions de dues variables i per tant amb matrius Hessianes de tamany 2×2. En aquest cas particular tenim la següent proposició.

Proposició 1. *Sigui una funció amb derivades parcials primeres i segones contínues en una regió que conté un punt* $\mathbf{x}_0$ *tal que* $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) = 0$ *i* $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) = 0$. *Aleshores,*

- *Si* $\det H(\mathbf{x}_0) > 0$ *i* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) > 0$ *aleshores* $\mathbf{x}_0$ *és un mínim relatiu.*
- *Si* $\det H(\mathbf{x}_0) > 0$ *i* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) < 0$ *aleshores* $\mathbf{x}_0$ *és un màxim relatiu.*
- *Si* $\det H(\mathbf{x}_0) < 0$ *aleshores* $\mathbf{x}_0$ *és un punt de sella.*

Observeu que l'anterior proposició no ens dóna informació si $\det H(\mathbf{x}_0) = 0$.

Definició 3. *Sigui* f *definida en una regió que conté el punt* $\mathbf{x}_0$. *Diem que* $\mathbf{x}_0$ *és un punt crític de* f *si es verifica que* $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\right) = (0,0)$ *o bé alguna de les derivades parcials anteriors no existeix.*

ex. *Anem a calcular tots els extrems relatius de la funció*

$$f(x,y) = xy(3-x-y).$$

1. Calculem les derivades parcials.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y - 2xy - y^2 = y(3-2x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x - x^2 - 2xy = x(3-x-2y)$$

2. Resolem el sistema per trobar els punts crítics.

$$\left.\begin{aligned} y(3-2x-y) &= 0 \\ x(3-x-2y) &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow (0,0),\ (3,0),\ (0,3),\ (1,1).$$

3. Calculem les derivades parcials segones (Hessià).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3-2x-y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3-2x-y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x$$

El Hessià serà,

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 3-2x-y \\ 3-2x-y & -2x \end{pmatrix}$$

i per tant $\det H(x,y) = 4xy - (3-2x-y)^2$.

cont ex.

4. Substituim els punts crítics al Hessià.

$$
\begin{aligned}
\det H(0,0) &= -9 < 0 && \Longrightarrow \textit{PUNT DE SELLA.} \\
\det H(3,0) &= -9 < 0 && \Longrightarrow \textit{PUNT DE SELLA.} \\
\det H(0,3) &= -9 < 0 && \Longrightarrow \textit{PUNT DE SELLA.} \\
\det H(1,1) &= 4 > 0 && \Longrightarrow \textit{EXTREM.}
\end{aligned}
$$

Al ser $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -2 < 0$

és un MÀXIM.

---

ex. *Anem a trobar tots els extrems relatius de la funció*

$$f(x,y) = x^2y^2.$$

1. Calculem les derivades parcials.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y$$

2. Resolem el sistema per trobar els punts crítics.

$$\left.\begin{aligned} 2xy^2 &= 0 \\ 2x^2y &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \textit{Punts dels eixos } X \textit{ i } Y.$$

cont ex.

3. Calculem les derivades parcials segones (Hessià).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4xy$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2$$

El Hessià serà,

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$

i per tant $\det H(x,y) = 4x^2y^2 - 16x^2y^2$.

4. Substituim els punts crítics al Hessià.

$$\det H(x,0) = 0 \implies \textit{No podem dir res.}$$
$$\det H(0,y) = 0 \implies \textit{No podem dir res.}$$

En aquests casos hem d'utilitzar altres eines.
Fixeu-vos que en aquest exemple,

$$f(x,y) = x^2y^2 = 0 \textit{ sobre els eixos}$$

i que

$$f(x,y) = x^2y^2 > 0 \textit{ altrament.}$$

Per tant, els punts situats als eixos són MÍNIMS.

Definició 4. *Els valors* (x_{min}, y_{min}) *i* (x_{max}, y_{max}) *tals que*

$$f(x_{min}, y_{min}) \leqslant f(x,y) \leqslant f(x_{max}, y_{max}) \quad \forall (x,y) \in V$$

es coneixen com mínim absolut i màxim absolut de f *en la regió* V.

Els extrems absoluts d'una funció poden produir-se de dos maneres:

- Alguns extrems relatius també pot ser que siguin extrems absoluts.
- Poden existir extrems absoluts en algun punt de la vora del domini.

ex. *Anem a trobar els extrems absoluts de la funció* $f(x,y) = \sin(xy)$ *en la regió tancada donada per* $[0,\pi] \times [0,1]$.

1. Calculem les derivades parcials.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy)$$

cont ex.

2. Resolem el sistema per trobar els punts crítics.

$$\left.\begin{aligned} y\cos(xy) &= 0 \\ x\cos(xy) &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \underbrace{(0,0)}_{\textit{està a la vora}} \quad , \; xy = \frac{\pi}{2}.$$

3. Calculem les derivades parcials segones (Hessià).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2 \sin(xy) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2 \sin(xy)$$

El Hessià serà,

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2 \sin(xy) & \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ \cos(xy) - xy\sin(xy) & -x^2 \sin(xy) \end{pmatrix}$$

i per tant $\det H(x,y) = -\cos^2(xy)$.

4. Substituim els punts crítics al Hessià.

$$\det H(x,y) = 0 \quad \textit{si } xy = \tfrac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \textit{No podem dir res.}$$

Arribats aquí sabem que els punts del tipus $xy = \frac{\pi}{2}$ *són punts crítics i falta estudiar la vora de la regió* $[0,\pi]\times[0,1]$. *La vora de la regió ve definida per les rectes* $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ *i* $y = 1$.

cont ex.

És fàcil veure que $f(x,y) = \sin(xy) = 0$ *en tots els punts de l'eix* X *i l'eix* Y *així com també en el punt* $(\pi, 1)$.

Per altra banda es compleix,

$$(x,y) \in [0,\pi] \times [0,1] \Rightarrow 0 \leqslant xy \leqslant \pi \Rightarrow 0 \leqslant f(x,y) \leqslant 1$$

Així doncs, els punts de l'eix X *i l'eix* Y *així com també el punt* $(\pi, 1)$ *són mínims absoluts ja que en ells la funció pren el valor 0 i els punts crítics trobats del tipus* $xy = \frac{\pi}{2}$ *són màxims absoluts ja que la funció en ells pren el valor 1.*

Exercici Proposat 1. *La suma del perímetre d'una secció i la longitud dels paquets enviats per correu no pot excedir de 216cm. Trobeu les dimensions del paquet rectangular de major volum admès per correu.*

Exercici Proposat 2. *Una empresa fabrica dos productes. Els ingressos que origina la venda de* x_1 *unitats del primer i de* x_2 *unitats del segon són:*

$$R(x_1, x_2) = -5x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_1x_2 + 42x_1 + 102x_2$$

Trobeu x_1 *i* x_2 *de manera que els ingressos siguin màxims.*

Extrems restringits.

Molts problemes d'optimització tenen restriccions. El típic problema del fabricant que vol maximitzar la seva producció sempre va acompanyat d'unes restriccions, per exemple, en el capital que pot destinar a comprar la matèria prima.

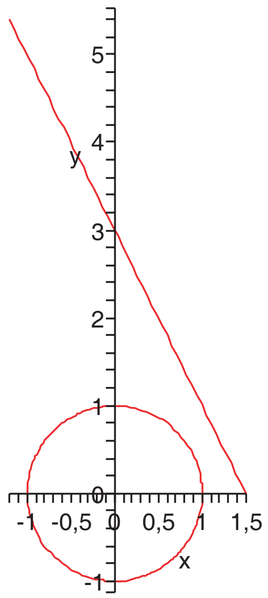
Els problemes d'optimització amb restriccions s'escriuen usualment de la següent manera:

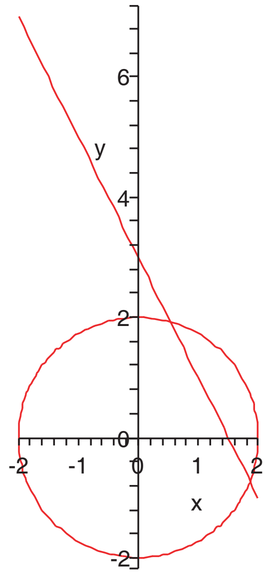
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \min / \max f(x,y) & \longleftarrow & \text{Funció objectiu} \\ g(x,y) = 0 & \longleftarrow & \text{Restricció} \end{array} \right.$$

Per a resoldre aquest tipus de problemes la tècnica més coneguda és el métode dels multiplicadors de Lagrange.

Multiplicadors de Lagrange.

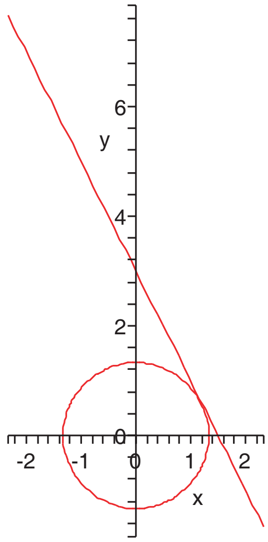
Comencem amb un exemple senzill per a entendre aquest mètode. Considerem el problema de trobar el punt de la recta $y = 3 - 2x$ que sigui més proper a l'origen. En la següent figura es mostra una gràfica de la recta i de la circumferència centrada a l'origen de radi 1.





La recta està completament a l'exterior de la circumferència. Això ens diu que cada punt de la recta està a distància més gran que 1 de l'origen. Al dibuixar la recta i la circumferència de radi 2 veiem que diversos punts de la recta estàn a menys de 2 unitats de l'origen.

Podem dilatar o comprimir la circumferència. Però és fàcil deduir que quan arribem a un tamany en el qual la recta és tangent a la circumferència el punt de tangència serà el punt de la recta més proper a l'origen ja que la resta de punts de la recta estan fora de la circumferència i per tant més allunyats del O.



Anem a traduir aquest argument geomètric al càlcul. Volem minimitzar la funció distància des del punt (x, y) a l'origen és a dir la funció

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que equival a minimitzar la funció

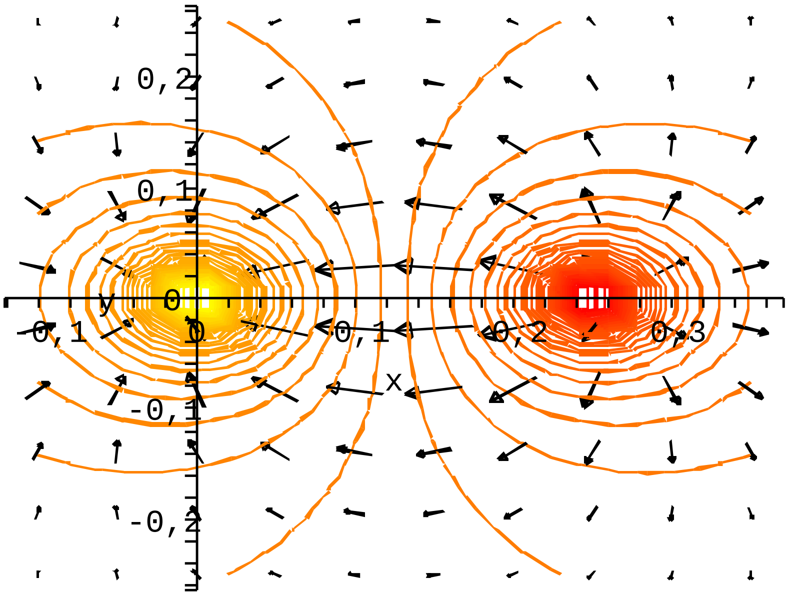
$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Així volem minimitzar $f(x, y)$ subjecte a la restricció que el punt estigui sobre la recta $y = 3 - 2x$ és a dir que la restricció la podem escriure com

$$g(x, y) = 2x + y - 3 = 0.$$

Ja hem vist que en el punt més proper la recta i la circumferència són tangents.

Recordem que el vector gradient és ortogonal a les corbes de nivell en tot punt.



Aleshores, per tal que les corbes siguin tangents cal que els gradients de f i g siguin paralels. És a dir,

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \quad \text{per a alguna constant } \lambda.$$

Resoldrem aquesta equació per a trobar el punt més proper a l'origen en l'exemple següent. Aquest és el mètode dels multiplicadors de Lagrange i es pot aplicar en una gran varietat de problemes d'optimització amb restriccions. Vegem ara alguns exemples d'aplicació.

ex. *Anem a trobar el punt de la recta $y = 3 - 2x$ que està més a prop de l'origen.*

Volem resoldre el problema

$$\begin{cases} \min / \max f(x,y) = x^2 + y^2 & \longleftarrow \quad \textit{Funció objectiu} \\ g(x,y) = 2x + y - 3 = 0 & \longleftarrow \quad \textit{Restricció} \end{cases}$$

Pel mètode dels multiplicadors de Lagrange sabem que s'ha de cumplir en el punt on es troba l'extrem (màxim i/o mínim) que

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \quad \textit{per a alguna constant } \lambda.$$

Substituint els valors dels gradients tenim

$$\underbrace{(2x, 2y)}_{\nabla f(x,y)} = \lambda \underbrace{(2,1)}_{\nabla g(x,y)}$$

del que es dedueix que

$$2x = 2\lambda \qquad 2y = \lambda.$$

Al resoldre la segona equació respecte λ es té $\lambda = 2y$ aleshores la primera equació dóna $x = \lambda = 2y$. Al substituir això en l'equació de la restricció es té

$$y = 3 - 2(2y) \Rightarrow 5y = 3.$$

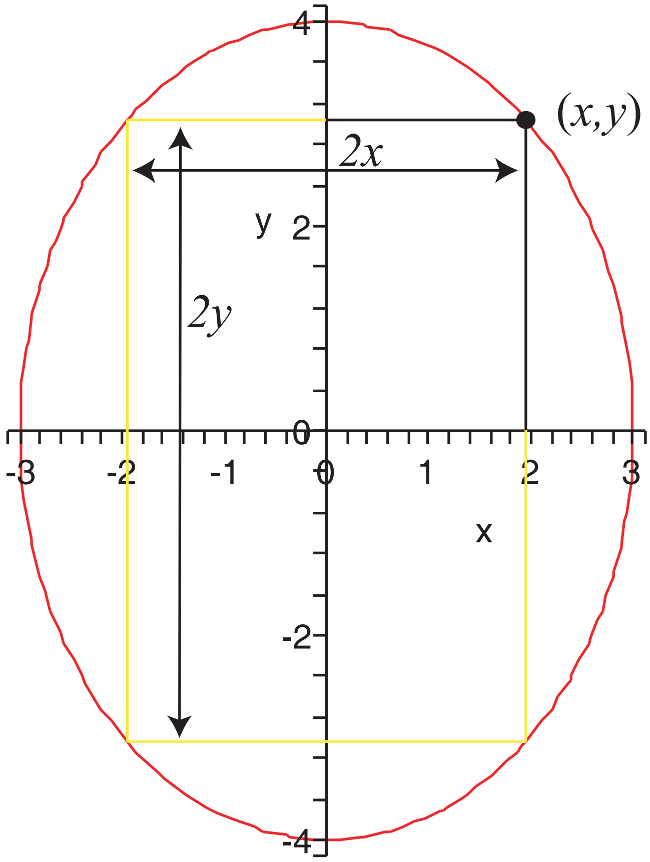
Així la solució és $y = \frac{3}{5}$ el que dóna $x = 2y = \frac{6}{5}$.

El punt més proper és doncs $(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$.

ex. *Volem trobar el rectangle d'àrea màxima que pot inscriure's en l'elipse* $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1.$

Si denominem (x,y) *al vèrtex (del rectangle) que està al primer quadrant la funció objectiu és*

$$f(x,y)=2x2y=4xy.$$



La restricció és que el vèrtex estigui sobre l'elipse,

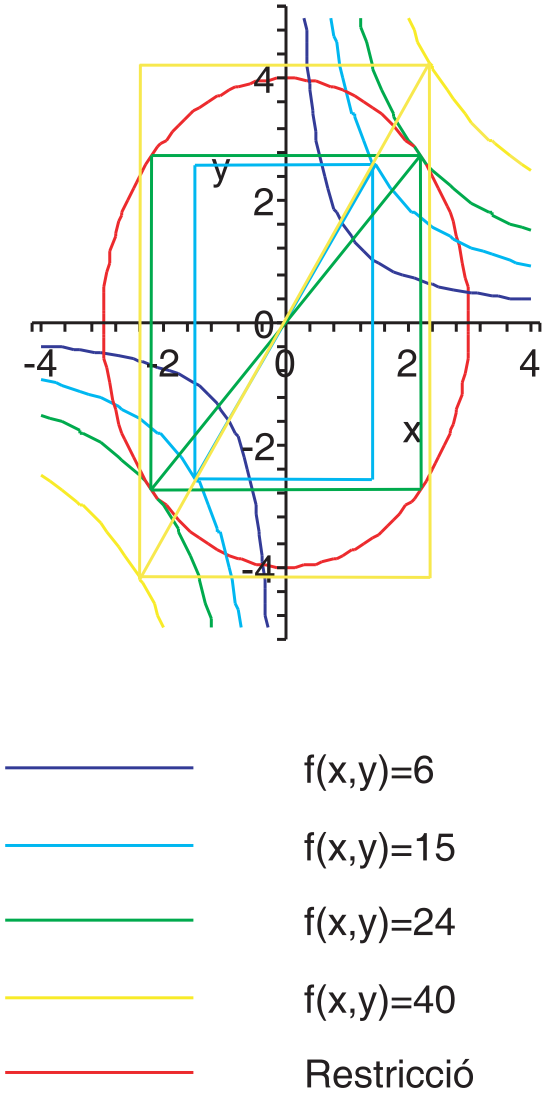
$$g(x,y)=\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}-1=0.$$

cont ex. *Així doncs, volem resoldre el problema*

$$\begin{cases} \min / \max f(x,y) = 4xy & \longleftarrow \quad \textit{Funció objectiu} \\ g(x,y) = \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{4^2} - 1 = 0 & \longleftarrow \quad \textit{Restricció} \end{cases}$$

Dibuixem la restricció i diferents corbes de nivell de la funció objectiu,

La restricció es satisfà en aquells punts en què les hipèrboles tallen la elipse.



Del dibuix es dedueix que el rectangle d'àrea màxima s'aconsegueix quan el vèrtex està en la hipèrbola que és tangent a la elipse (color verd). El vèrtex és precisament aquest punt de tangència.

Sabem que dos corbes són tangents en un punt si i només si els seus vectors gradient són paralels. Així, s'ha de complir que

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y).$$

cont ex. *Substituint els valors dels gradients tenim*

$$(4y, 4x) = \lambda(\frac{2x}{3^2}, \frac{2y}{4^2}).$$

Al resoldre la primera equació respecte λ *es té* $\lambda = \frac{18y}{x}$. *Substituint això en la segona equació es té,*

$$x^2 = \frac{9}{16}y^2. \tag{2}$$

Substituint això en l'equació de la restricció s'obté,

$$y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm\sqrt{8}.$$

Com que $y > 0$ *(*y *és la segona component del vèrtex en el primer quadrant) sabem que* $y = +\sqrt{8}$. *Substituint el valor aconseguit de* y *en l'equació* (2) *obtenim* $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Finalment podem calcular quin serà el valor de l'àrea màxima que podem aconseguir,

$$f(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{8}) = 4\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{8} = 24$$

i la posició del vèrtex del rectangle ha d'estar en $(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{8})$ *per tal d'aconseguir aquesta àrea màxima.*

Exercici Proposat 3. *Utilitzant el mètode dels multiplicadors de Lagrange resol el problema d'optimització següent:*

$$\begin{cases} \min / \max f(x,y) = \frac{x}{2} + y & \longleftarrow \quad \textit{Funció objectiu} \\ g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 & \longleftarrow \quad \textit{Restricció} \end{cases}$$

El mètode dels multiplicadors de Lagrange es pot aplicar en tot tipus de problemes d'optimització. En alguns problemes que tinguin restriccions *senzilles* es pot utilitzar un altre mètode que simplifica el problema i que consisteix en *eliminar una variable.*

Eliminació d'una variable.

En el cas en què el problema d'optimització tingui una restricció senzilla que permeti aïllar una de les variables podem eliminar aquesta variable i passar a un problema amb una variable menys i per tant més senzill. Vegem un exemple.

ex. *Volem resoldre el problema*

$$\begin{cases} \min / \max f(x,y) = x^2 + y^2 & \longleftarrow \quad \textit{Funció objectiu} \\ g(x,y) = x^2 y - 16 = 0 & \longleftarrow \quad \textit{Restricció} \end{cases}$$

Fixeu-vos que la restricció es pot escriure com,

$$x^2 y - 16 = 0 \Longrightarrow y = \frac{16}{x^2}.$$

Substituint aquesta igualtat a la funció objectiu obtenim un problema d'extrems lliures on simplement volem minimitzar la funció

$$f(x) = x^2 + \left(\frac{16}{x^2}\right)^2.$$