

Solució del segon treball de CSL - P2016

18 de gener de 2019

Consideracions inicials

Important: Com passa en molts problemes, el treball proposat accepta diverses solucions vàlides, cadascuna d'elles amb els seus pros i contres. Per exemple, es poden utilitzar programes diferents per pintar les gràfiques, i probablement cada estudiant haurà seguit passos lleugerament diferents per tal d'arribar al resultat demanat. Lògicament és impossible presentar-vos un document que tingui present totes les possibles maneres de resoldre el treball i, en conseqüència, si us toca avaluar una resposta diferent de les que aquí es contemplen, haureu d'analitzar-la de forma crítica, determinar si verifica les especificacions de l'enunciat, i puntuar-la en conseqüència.

4.2.1 Determinació del punt de treball del transistor

El punt de treball del transistor depèn de la tensió d'alimentació i del circuit de polarització. Per calcular-lo **desactivem la font de senyal** $v_g(t)$. En fer-ho, l'única excitació present al circuit és V_{cc} , que és contínua, i per tant **tots els capacitors es comportaran com a circuits oberts** des del punt de vista de l'alimentació. En aquestes condicions, el circuit que cal considerar és el de la **figura 1**:

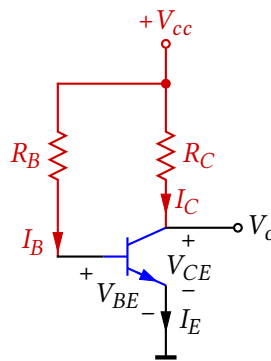


Figura 1: Circuit en DC, per calcular el punt de treball.

I el punt de treball es troba fent els càlculs següents:

- Quan el BJT treballa en zona activa, $V_{BE} \approx 0,66$ V.
- Sabent els valors de V_{cc} , R_B i V_{BE} , podem determinar I_B com:

$$I_B = \frac{V_{cc} - V_{BE}}{R_B} = \frac{12 - 0,66}{680 \cdot 10^3} = 16,676 \mu\text{A} \quad (1)$$

- Seguidament podem calcular I_C , ja que és proporcional a I_B :

$$I_C = \beta_F \cdot I_B = 300 \cdot 16,676 \cdot 10^{-6} = 5 \text{ mA} \quad (2)$$

- I la tensió de col·lector serà la d'alimentació menys la tensió que cau a R_C :

$$V_{CE}(= V_o) = V_{cc} - I_C \cdot R_C = 12 - 3,05 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^3 = 5,996 \text{ V} \quad (3)$$

Els resultats obtinguts (arrodonits a la centèsima) es resumeixen a la [taula 1](#).

Taula 1: Punt de treball del transistor

I_B [μA]	I_C [mA]	V_o [V]
16,676	5	5,996

4.2.2 Càlcul dels paràmetres del model en petit senyal del BJT

A la [figura 2](#) es mostra el model considerat pel BJT en petit senyal a l'interval de freqüències des de contínua fins a uns 100 kHz.

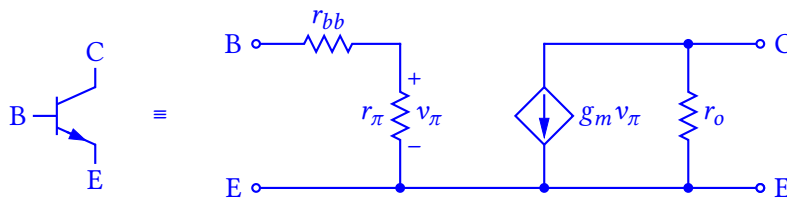


Figura 2: Model en petit senyal del transistor bipolar, a freqüències baixes (o a 100 kHz).

El valor dels elements d'aquest model depèn del punt de treball en què estigui polaritzat el transistor, segons les relacions matemàtiques que es detallen a continuació, essent I_C el corrent que entra pel col·lector quan el BJT està situat en el seu punt de treball:

$$g_m = \frac{I_C}{V_T} \approx 38,6 I_C = 38,6 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 0,193 \text{ S} \quad (4)$$

$$r_\pi = \frac{\beta_F}{g_m} = \frac{300}{0,12} = 1,553 \text{ k}\Omega \quad (5)$$

$$r_o = \frac{V_A}{I_C} = \frac{50}{3,06 \cdot 10^{-3}} = 9,994 \text{ k}\Omega \quad (6)$$

Els resultats obtinguts es resumeixen a la [taula 2](#).

Taula 2: Paràmetres del model en petit senyal del BJT

r_{bb} [Ω]	g_m [S]	r_π [Ω]	r_o [Ω]
280	0,193	1553	9994

4.2.3 Anàlisi en AC de l'amplificador a freqüències fins a 100 kHz

Per estudiar el comportament de l'amplificador respecte de l'excitació $v_g(t)$ (comportament «AC»), **desactivem la font d'alimentació** de l'amplificador ($V_{cc} = 0$) i **substituïm el BJT pel seu model en petit senyal**. Si, a més a més, considerem que **a partir de certa freqüència el capacitor C_i es comporta pràcticament com un curtcircuit**, el circuit resultant és el que es mostra a la [figura 3](#).

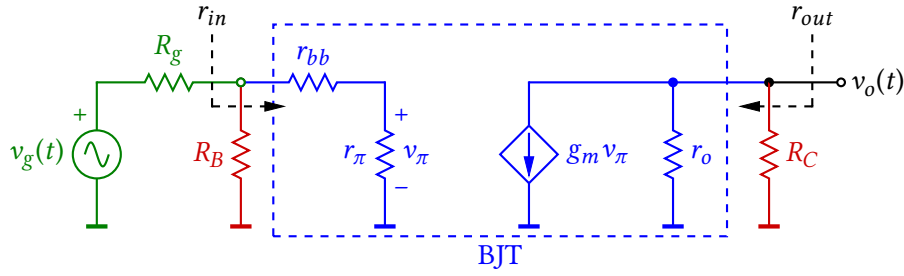


Figura 3: Model de l'amplificador per a baixes freqüències considerant C_i com a curtcircuit. $R_g = 50 \Omega$, $R_B = 680 \text{ k}\Omega$, $r_{bb} = 280 \Omega$, $r_\pi = 1553 \Omega$, $g_m = 0,193 \text{ S}$, $r_o = 9994 \Omega$ i $R_C = 1200 \Omega$.

1. Anàlisi del circuit per calcular l'amplificació i el guany

Com que el circuit de la **figura 3** és purament resistiu sabem que la tensió de sortida serà $v_o(t) = k \cdot v_g(t)$, on k és una constant que no depèn de la freqüència. Per trobar el valor d'aquesta constant k podem utilitzar diferents mètodes d'anàlisi. Nosaltres hem fet el següent:

- Primer calculem $v_o(t)$ en funció de v_π . Veiem que $v_o(t)$ és la tensió en borns de l'equivalent paral·lel r_o - R_C pel que passa un corrent $g_m v_\pi$. Aquest corrent entra pel terminal negatiu de v_o , raó per la qual s'ha de posar un signe menys en aplicar la llei d'Ohm:

$$v_o(t) = -\frac{r_o \cdot R_C}{r_o + R_C} \cdot g_m \cdot v_\pi = -206,89 \cdot v_\pi \quad (7)$$

- Calculem v_π en funció de la tensió que cau en borns de R_B (o r_{in}), v_x :

$$v_\pi = \frac{r_\pi}{r_{bb} + r_\pi} \cdot v_x = 0,84729 \cdot v_x \quad (8)$$

- Calculem la tensió en borns de R_B (o r_{in}), v_x . Per això, calculem primer la resistència r_{in} que és el paral·lel de R_B amb la combinació sèrie de r_{bb} i r_π :

$$r_{in} = \frac{R_B \cdot (r_{bb} + r_\pi)}{R_B + r_{bb} + r_\pi} = 1,8286 \text{ k}\Omega \quad (9)$$

La tensió v_x val:

$$v_x = \frac{r_{in}}{R_g + r_{in}} \cdot v_g(t) = 0,9734 \cdot v_g(t) \quad (10)$$

Combinant (7), (8) i (10) tenim:

$$v_o(t) = -\frac{r_o \cdot R_C}{r_o + R_C} \cdot g_m \cdot \frac{r_\pi}{r_{bb} + r_\pi} \cdot \frac{r_{in}}{R_g + r_{in}} \cdot v_g(t) = -170,6454 \cdot v_g(t) \quad (11)$$

L'**amplificació** resultant del circuit de la **figura 3** és constant per a totes les freqüències i val

$$|H(j\omega)| = \frac{|\bar{V}_o|}{|\bar{V}_g|} = 170,65 \quad (12)$$

A partir d'aquest resultat podem calcular el seu **guany** en tensió expressat en *decibel*:

$$20 \log |H(j\omega)| = 44,64 \text{ dB} \quad (13)$$

2. Càlcul de les impedàncies d'entrada (r_{in}) i sortida (r_{out})

Tal com s'ha explicat anteriorment r_{in} és el paral·lel de R_B amb la combinació sèrie de r_{bb} i r_{π} , i per tant val:

$$r_{in} = \frac{R_B \cdot (r_{bb} + r_{\pi})}{R_B + r_{bb} + r_{\pi}} = 1828,6 \Omega \quad (14)$$

Pel que fa a r_{out} s'ha d'anar amb una mica més de compte. Recordem que en calcular impedàncies equivalents en un circuit desactivem les fonts independents, però mai les fonts dependents. Tanmateix, en aquest circuit concret, veiem que si desactivem la font $v_g(t)$ (és a dir, la substituïm per un curtcircuit) la tensió v_{π} és zero, amb la qual cosa el corrent que dóna la font controlada de corrent és zero. És a dir, **per aquest cas concret** podem substituir la font dependent de corrent per un circuit obert. Llavors queda clar que la resistència de sortida r_{out} és el paral·lel de r_o i R_C :

$$r_{out} = \frac{r_o \cdot R_C}{r_o + R_C} = 1071,4 \Omega \quad (15)$$

Els resultats d'aquesta secció es resumeixen a la **taula 3**

Taula 3: Resultats de l'anàlisi en AC de l'amplificador a freqüències fins a 100 kHz

$ H(j\omega) $	$G(\omega)$ [dB]	r_{in} [Ω]	r_{out} [Ω]
170,65	44,64	1829	1071

4.2.4 Limitació a molt baixes freqüències

En l'anàlisi de l'apartat anterior hem suposat que el capacitor C_i es comporta pràcticament com un curtcircuit. Si baixem molt en freqüència, però, la impedància del capacitor C_i anirà creixent fins a ser comparable amb el valor de les resistències que l'envolten. En aquesta situació l'aproximació feta no serà vàlida i haurèm d'utilitzar el circuit complet de la **figura 4**.

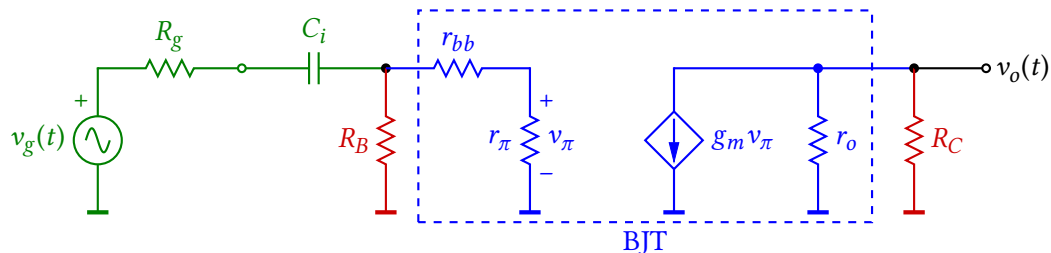


Figura 4: Model de l'amplificador per a baixes freqüències

1. Càlcul de la funció de xarxa

Per a calcular la funció de xarxa calculem primer $V_x(s)$ mitjançant el circuit transformat de Laplace:

$$\begin{aligned} V_x(s) &= \frac{r_{in}}{R_g + r_{in} + \frac{1}{C_i s}} V_g(s) = \frac{r_{in} C_i s}{(R_g + r_{in}) C_i s + 1} V_g(s) = \\ &= \frac{r_{in}}{R_g + r_{in}} \cdot \frac{s}{s + \frac{1}{(R_g + r_{in}) C_i}} V_g(s) \quad (16) \end{aligned}$$

Utilitzant els resultats de l'apartat anterior ($v_o(t) = -\frac{r_o \cdot R_c}{r_o + R_c} g_m v_\pi$ i $v_\pi = \frac{r_\pi}{r_{bb} + r_\pi} v_x$), tenim:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_g(s)} = -\frac{r_o \cdot R_c}{r_o + R_c} \cdot g_m \cdot \frac{r_\pi}{r_{bb} + r_\pi} \cdot \frac{r_{in}}{R_g + r_{in}} \cdot \frac{s}{s + \frac{1}{(R_g + r_{in})C_i}} = -170,65 \cdot \frac{s}{s + 95,06} \quad (17)$$

2. Tipus de filtre

La funció de xarxa obtinguda correspon a un **filtre passa altes** de primer ordre.

3. Paràmetres del filtre

D'acord amb la funció de xarxa obtinguda, la freqüència de tall del filtre és 95,06 rad/s o equivalentment $f_c = 15,13$ Hz. Atès que és un filtre passa altes de **primer ordre**, l'amplificació màxima es té per a $\omega \rightarrow \infty$ i val $|H(\infty)| = 170,65$ (o equivalentment 44,64 dB).

4. Comparació de guanys

Tal com era d'esperar, el guany del circuit obtingut en el pas anterior (on es prenien una freqüència de treball prou elevada com per poder considerar un curtcircuit el capacitor C_i), és el mateix que el guany màxim del filtre analitzat en aquest apartat.

4.2.5 Estudi de l'amplificador a freqüències superiors a 100 kHz

A altes freqüències apareixen efectes paràsits que s'haurien de tenir en compte. Per tal de veure com influeixen aquests efectes sobre la resposta freqüencial de l'amplificador estudiem ara el circuit de la **figura 5**.

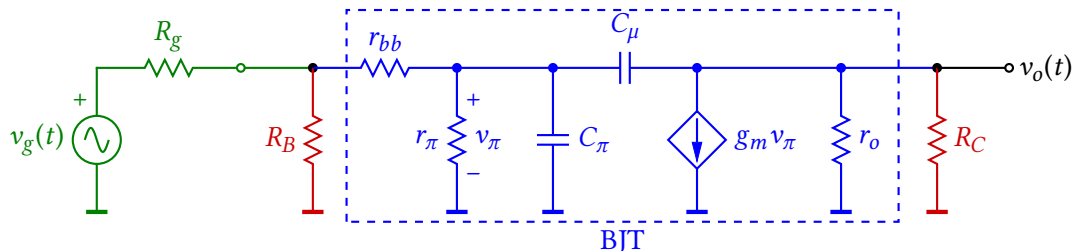


Figura 5: Model de l'amplificador per a altes freqüències

1. **Càlcul de la capacitat C_π** A partir de les especificacions, $C_\mu = 4,5$ pF i $f_T = 300$ MHz, i del valor previamente calculat de $g_m = 0,1931$ S, podem calcular el valor de la capacitat C_π de la **figura 5** de la següent forma:

$$C_\pi = \frac{g_m}{2\pi f_T} - C_\mu = 97,95 \text{ pF} \approx \boxed{98 \text{ pF}} \quad (18)$$

2. **Càlcul de la funció de xarxa del circuit de la figura 5**

Per analitzar el circuit primer substituïm, tal com indica l'enunciat, el subcircuit format per $v_g - R_g - R_B - r_{bb}$ pel seu model equivalent de Thévenin. Com que en calcular la tensió

en circuit obert d'aquest subcircuit, la resistència r_{bb} és supèrflua (no hi circula corrent), la tensió de Thévenin és:

$$v_{th}(t) = \frac{R_B}{R_g + R_B} v_g(t) \quad (19)$$

I la resistència de Thévenin és:

$$R_{th} = \frac{R_g \cdot R_B}{R_g + R_B} + r_{bb} \quad (20)$$

L'admitància del paral·lel r_o i R_C és.

$$G_{out} = \frac{1}{r_o} + \frac{1}{R_C} = g_o + G_C \quad (21)$$

La figura 6 mostra el circuit resultant, el qual analitzarem aplicant l'anàlisi nodal en el domini transformat de Laplace.

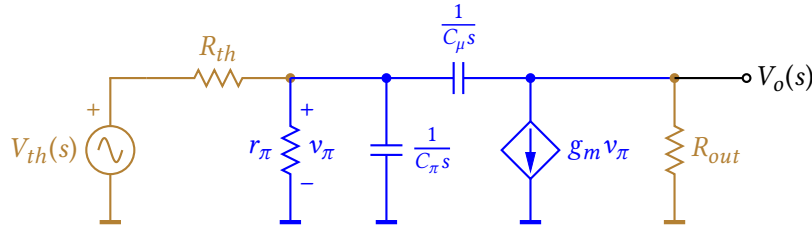


Figura 6: Model de l'amplificador per a altes freqüències

Les nostres incògnites són $V_\pi(s)$ i $V_o(s)$. Plantejarem dos equacions fent KCL als nodes on no hi ha font de tensió, que són precisament els nodes on mesurem $V_\pi(s)$ i $V_o(s)$

$$\text{KCL 1: } (V_\pi - V_{th})G_{th} + V_\pi g_\pi + V_\pi C_\pi s + (V_\pi - V_o)C_\mu s = 0$$

$$\text{KCL 2: } (V_o - V_\pi)C_\mu s + V_o G_{out} = -g_m V_\pi$$

Reordenant i plantejant les equacions en forma matricial, s'obté:

$$\begin{pmatrix} G_{th} + g_\pi + C_\pi s + C_\mu s & -C_\mu s \\ -C_\mu s + g_m & G_{out} + C_\mu s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_\pi \\ V_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{th} G_{th} \\ 0 \end{pmatrix}$$

i resolent per Cramer obtenim la tensió $V_o(s)$:

$$V_o(s) = \frac{\begin{vmatrix} G_{th} + g_\pi + C_\pi s + C_\mu s & V_{th} G_{th} \\ -C_\mu s + g_m & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{th} + g_\pi + C_\pi s + C_\mu s & -C_\mu s \\ -C_\mu s + g_m & G_{out} + C_\mu s \end{vmatrix}}$$

$$\text{Atès que } V_{th} = \frac{R_B}{R_g + R_B} V_g(s) = \frac{G_g}{G_g + G_B} V_g(s)$$

$$H(s) = \frac{G_g G_{th}}{(G_g + G_B) C_\pi} \cdot \frac{s - \frac{g_m}{C_\mu}}{s^2 + \left(\frac{G_{th} + g_\pi + g_m + G_{out}}{C_\pi} + \frac{G_{out}}{C_\mu} \right) s + \frac{(G_{th} + g_\pi) G_{out}}{C_\pi C_\mu}} \quad (22)$$

Donant valors i arrodonint les mantisses a la mil·lèsima tenim:

$$H(s) = 3,0935 \cdot 10^7 \frac{s - 4,2914 \cdot 10^{10}}{s^2 + 2,2260 \cdot 10^9 s + 7,7802 \cdot 10^{15}} \quad (23)$$

3. Representació gràfica el guany del circuit de la **figura 5** en funció de la freqüència en Hz.

Per representar gràficament el guany del el circuit de la **figura 5** en funció de la freqüència en Hz utilitzarem el següent codi.

```
%Per calcular el guany
K=3.0935e+07;
z=4.2914e+10;
b=2.2260e+09;
c=7.7802e+15;
f=logspace(2,8,600);
s=j*2*pi*f;
H=K*(s-z)/(s.^2+b*s+c);
G=20*log10(abs(H));
%Per dibuixar amb Octave:
semilogx(f,G)
xlabel('Freqüència(Hz)')
ylabel('Guany(dB)')
%Per exportar les dades a un altre programa:
aux=[f(:) G(:)];
save -ascii dades.dat aux
```

La gràfica obtinguda es mostra a la **figura 7**. Veiem que el valor de l'amplificació a baixes freqüències és de 44,64 dB, tal i com ens ha sortit en el pas **4.2.3** quan hem fet l'anàlisi sense tenir en compte les capacitats paràsites. Així mateix, a la corba es pot apreciar clarament que a partir d'un cert valor de freqüència, les capacitats paràsites fan que l'amplificació es faci cada vegada més petita.

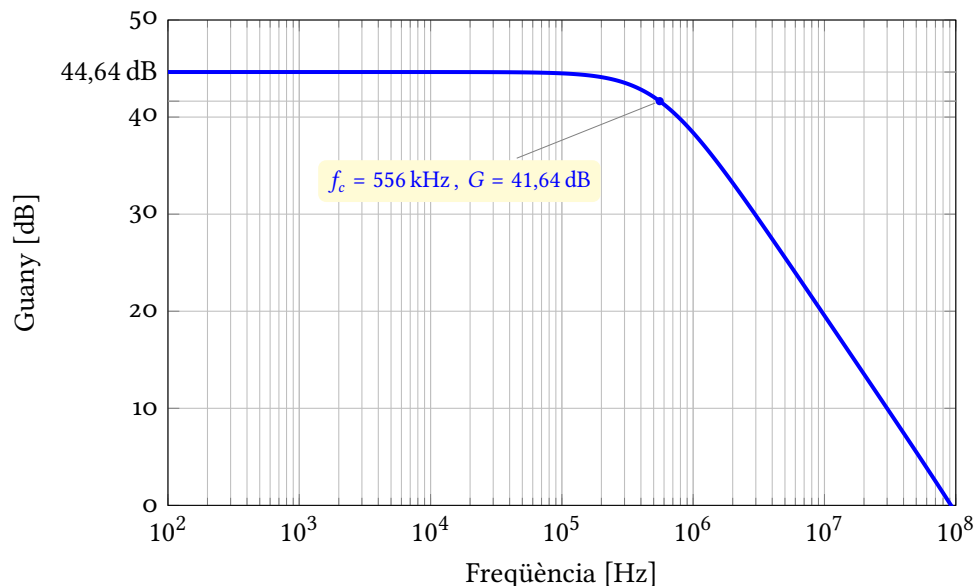


Figura 7: Corba de guany en funció de la freqüència obtinguda amb Octave

Tot i que no es demana a l'enunciat, també es pot mesurar la freqüència de tall del circuit observant el punt on el guany es redueix en 3 dB respecte el màxim. Aquesta freqüència resulta ser de 556 kHz aproximadament.

4.2.6 Estudi de la resposta freqüencial de l'amplificador a totes les freqüències

Per tal de determinar la resposta freqüencial en un ampli marge de freqüències, fem la simulació del circuit de la **figura 8**.

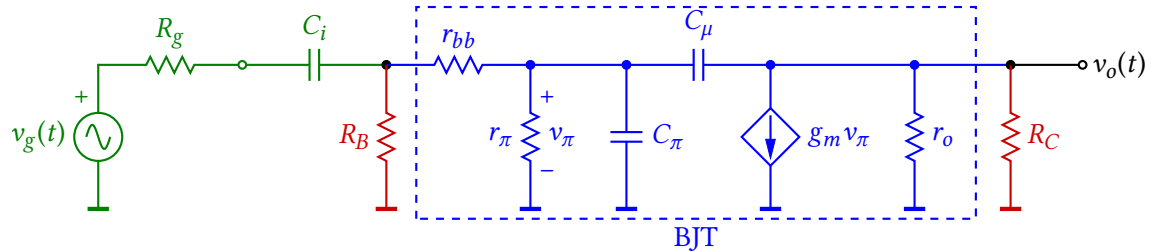


Figura 8: Model (lineal) de l'amplificador per a totes les freqüències

1. Corba de guany del circuit de la **figura 8** entre 1 Hz i 100 MHz

Mitjançant el següent codi simulem amb GnuCap el circuit de la **figura 8** i representem la corba de guany amb escala logarítmica a l'eix d'abscisses i escala lineal a l'eix d'ordenades.

```

Simulació del model linealitzat
* Excitació fasorial amb la seva resistència
* Té amplitud =1 per obtenir H(jw) directament
Vg 1 0 AC 1 phase=0
Rg 1 10 50
* Capacitat d'acoblament a l'entrada
Ci 10 2 5.6u
* Resistència de polarització de la base
RB 2 0 620k
* Resistència interna de la base
rbb 2 3 280
* Elements "pi"
rpi 3 0 1553.5
Cpi 3 0 98pF
* Capacitor "mu" (col.lector-base)
Cmu 3 4 4.5pF
* Sortida
gm 4 0 3 0 0.193114
ro 4 0 9994
RC 4 0 1200
* Pintarem el mòdul de la tensió de sortida, en dB
.PRINT AC VDB(4)
* Simulem i posem les dades a un fitxer
.AC DEC 100 1 100MEG > RF-lineal.dat
.END
    
```

2. Corba de guany simulant ara l'amplificador amb el macromodel del BC547B.

En aquest apartat no hi ha massa cosa més a fer que simular el fitxer «RF-model.cir» que se subministra, per tal que generi el fitxer corresponent amb les dades del guany en funció de la freqüència.

La diferència entre aquest fitxer i el que s'ha escrit a l'apartat anterior és que en aquest es fa ús d'un macromodel del BJT, que té en compte les no linealitats i altres fenòmens no ideals del dispositiu, de manera que els resultats de la simulació haurien de ser més fidedignes que els obtinguts amb el model en petit senyal presentat en aquest treball.

3. Comparació dels resultats obtinguts.

La gràfica de la [figura 9](#) mostra els resultats de la simulació del nostre amplificador, obtinguts tant a partir del model en petit senyal del BJT com utilitzant el macromodel.

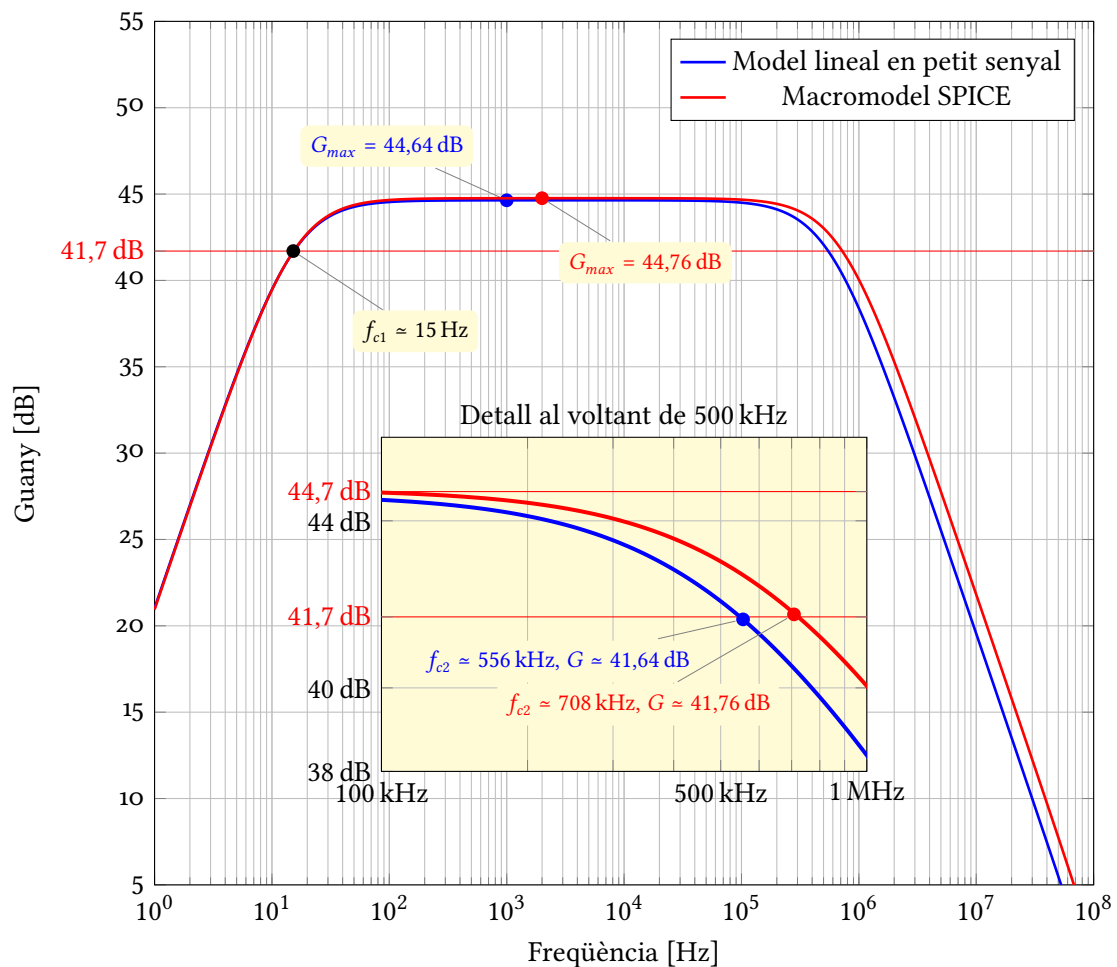


Figura 9: Corbes de guany en funció de la freqüència obtingudes per simulació amb GnuCap

Com es pot apreciar, els resultats són molt similars, tant pel que fa al guany màxim com a la freqüència de tall inferior. Atès que la mesura de valors directament sobre el gràfic no és massa precisa, a la [taula 4](#) s'han llistat els valors més rellevants de cadascuna de les corbes: Guany màxim i freqüències de tall inferior i superior.

Tot i que els valors de les dues corbes no són exactament els mateixos, tan sols s'observa una discrepància rellevant en el valor de la freqüència de tall superior, la qual pren un valor més baix en la simulació amb el macromodel que utilitzant el model en petit senyal obtingut manualment. En aquest cas, l'error relatiu entre les dues freqüències de tall obtingudes és

Taula 4: Resultats de les simulacions amb GnuCap

Paràmetre	Model lineal en petit senyal	Macromodel SPICE	Error relatiu
G_{max}	44,64 dB	44,76 dB	0,26 %
f_{c1}	15,14 Hz	15,49 Hz	2,26 %
f_{c2}	556 kHz	708 kHz	21,5 %

de l'21,5 %, i segurament té el seu origen en les diferències entre les capacitats del model calculades manualment i les contingudes en el macromodel SPICE.

Així mateix, com no podia ser altrament quan el model del circuit és lineal, la corba de resposta freqüencial del circuit amb el model en petit senyal del BJT **obtinguda per simulació** coincideix fil per randa amb la corba **calculada analíticament amb Octave** en el pas 4.2.5.3.