

Problemes de Física I
Grau en Enginyeria Física. UPC. Curs 2015-2016
Tema 2. Cinemàtica de la partícula

1. Demostreu que la derivada respecte el temps d'un vector **A** de mòdul constant és un vector perpendicular al donat. a) Amb quina equació vectorial descrivim aquesta condició ? b) Quina és l'equació que descriu que un vector **A**, que varia amb el temps, és de direcció constant.
 Solució: a) $\mathbf{A}(t) \cdot d\mathbf{A}(t)/dt = 0$; b) $\mathbf{A}(t) \times d\mathbf{A}(t)/dt = 0$.

2. Una partícula es mou segons l'equació del moviment donada, per cada cas, pels vectors de posició que s'expressen en unitats del Sistema Internacional (distàncies en m i temps en s). Determineu en cada cas els vectors velocitat i acceleració. Quines són les unitats dels diferents paràmetres que apareixen a les expressions dels vectors posició ?

a) $\mathbf{r}(t) = (3+4t+5t^2)\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}$ m

b) $\mathbf{r}(t) = (t^3-3t, 2t^2-6, t)$ m

c) $\mathbf{r}(t) = 3\cos(2t)\mathbf{i} + 3\sin(2t-1)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ m

d) $\mathbf{r}(t) = 3e^{-t}\mathbf{i} + 2e^{\sin(t)}\mathbf{j} + \sin(t^2)\mathbf{k}$ m

Solució: a) $\mathbf{v}(t) = (4+10t)\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ m/s, $\mathbf{a}(t) = 10\mathbf{i}$ m/s², unitats: 3m, 4m/s, 5m/s² i 6m/s.

b) $\mathbf{v}(t) = (3t^2-3, 4t, 1)$ m/s, $\mathbf{a}(t) = (6t, 4, 0)$ m/s², unitats: 1m/s³, 3m/s, 2m/s², 6m, 1m/s.

c) $\mathbf{v}(t) = -6\sin(2t)\mathbf{i} + 6\cos(2t-1)\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ m/s, $\mathbf{a}(t) = -12\cos(2t)\mathbf{i} - 12\sin(2t-1)\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$ m/s², unitats: 3m, 2rad/s, 3m, 2rad/s, 1rad, 1m/s³.

d) $\mathbf{v}(t) = -3e^{-t}\mathbf{i} + 2\cos(t)e^{\sin(t)}\mathbf{j} + 2t\cos(t^2)\mathbf{k}$ m/s, $\mathbf{a}(t) = 3e^{-t}\mathbf{i} + 2e^{\sin(t)}(\cos^2(t)-\sin(t))\mathbf{j} + (-4t^2\sin(t^2)+2\cos(t^2))\mathbf{k}$ m/s², 3m, 1s⁻¹, 2m, 1rad/s, 1m, 1rad/s².

3. L'equació del moviment d'una partícula, que es mou en el pla XY, és: $\mathbf{r}(t) = (t^2-1, t^3)$ m. Trobeu: a) els valors instantanis de la velocitat i l'acceleració per $t = 3$ s. b) els valors mitjans de la velocitat i l'acceleració des de $t = -1$ s fins $t = 3$ s.

Solució: a) (6,27) m/s, (2,18) m/s²; b) (2,7) m/s, (2,6) m/s².

4. Una partícula es mou en el pla XY amb una velocitat $\mathbf{v}(t) = (20t+5)\mathbf{i} + (t^2-20)\mathbf{j}$ m/s. Si inicialment es troba al punt (5,-15) m, determineu els vectors posició i acceleració en qualsevol instant de temps. Quant valen la posició, la velocitat i l'acceleració a l'instant $t = 2$ s ?

Solució: $\mathbf{r}(t) = (10t^2+5t+5)\mathbf{i} + (t^3/3-20t-15)\mathbf{j}$ m, $\mathbf{a}(t) = 20\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ m/s², $\mathbf{r}(2s) = (55, -52.3)$ m, $\mathbf{v}(2s) = (45, -16)$ m/s, $\mathbf{a}(2s) = (20, 4)$ m/s².

5. Una partícula es mou en el pla XY amb una velocitat $\mathbf{v}(t) = 8t^3\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}$ m/s. Si a l'instant inicial la partícula es trobava a l'origen de coordenades, determineu l'equació de la trajectòria i les components normal i tangencial de l'acceleració a l'instant $t=0.5$ s. Quant val el radi de curvatura en aquest instant ?

Solució: $x=2y^2/9$; $\mathbf{a}_t=12/5(1,3)$ m/s²; $\mathbf{a}_n=6/5(3,-1)$ m/s²; 2.64 m.

6. Un mòbil té en cada instant de temps t la posició indicada per les coordenades: $x = a\cos(\omega t)$, $y = a\sin(\omega t)$, $z = bt$. La trajectòria descrita és una hèlix cilíndrica de la que es demana el pas. Determineu també, per cada instant de temps t , els vectors velocitat i acceleració. Quant val el radi de curvatura ?

Solució: pas: $2\pi b/\omega$; $\mathbf{v} = (-a\omega\sin(\omega t), a\omega\cos(\omega t), b)$, $\mathbf{a} = (-a\omega^2\cos(\omega t), -a\omega^2\sin(\omega t), 0)$; $(a^2\omega^2+b^2)/a\omega^2$

7. Un focus de llum situat al terra es troba a una distància de 30.5 m de la paret d'una casa. Si entre el focus i la paret hi ha una persona de 1.83 m d'alçada que s'allunya del focus a una velocitat constant de 1.83 m/s, calculeu la velocitat a la que canvia la forma de l'ombra quan la persona està a 9.14 m del focus.

Solució: -1.22 m/s (el signe negatiu indica que la mida de l'ombra es redueix).

8. Una pilota, que es deixa caure des de dalt de la cornisa d'un edifici, triga 0.25 s en recórrer la longitud d'una finestra de 2 m . Quina distància hi ha entre la vora superior de la finestra i la cornisa?

Solució: 2.34 m

9. L'estrella més propera al Sol és Pròxima Centauri, que es troba a 4.22 anys llum ($1 \text{ any llum} = 9.4608 \times 10^{15} \text{ m}$) de la Terra. Un coet que surt de la Terra accelera a un ritme de $0.01g$ ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$) fins que assoleix una velocitat de creuer igual a una desena part de la de la llum ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$). Després, la nau es mou a aquesta velocitat, fins que finalment, quan s'apropa a l'estrella, es desaccelera a un ritme de $0.01g$ situant-se sobre l'estrella a velocitat nul·la. Calculeu la durada del viatge? No tingueu en compte el moviment relatiu entre l'estrella i el sistema solar.

Solució: 51.9 anys

10. El soroll del xoc d'una pedra que cau sense velocitat inicial dins un pou, se sent després de 3 s segons. Trobeu la fondària del pou sabent que la velocitat del so a l'aire a 25°C és 346 m/s i $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Negligiu la resistència de l'aire.

Solució: 40.7 m

11. Un cos submergit en un fluid té una desacceleració proporcional a la velocitat, de constant de proporcionalitat 3μ . Si la velocitat inicial és v_0 , trobeu el temps que triga a recórrer una distància L . Quina distància recorrerà en total abans d'aturar-se?

Solució: $t = -\ln(1 - 3\mu L/v_0)/3\mu$; $d = v_0/3\mu$

12. La Fossa de les Mariannes, a l'oceà Pacífic, és la més profunda fossa marina coneguda i el lloc més profund de l'escorça terrestre. Si en aquest lloc es llença una bola d'acer amb velocitat inicial nul·la, aquesta triga 64 minuts a arribar al fons. Si suposem que l'acceleració de la bola es pot modelitzar amb l'expressió: $a = 0.9g - cv$, on $c = 3.02 \text{ s}^{-1}$ i $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, quina és la fondària de la fossa?

Solució: $0.9g/c^2[e^{-ct} + ct - 1]$; 11.2 km

13. El maquinista d'un tren, que circula a velocitat v_1 , s'adona que s'està acostant a un altre tren que circula a una velocitat v_2 més petita, en la mateixa direcció i en el mateix sentit. Si el primer tren frena amb una acceleració a , demostreu que perquè no hi hagi col·lisió cal que la distància inicial entre ambdós trens sigui superior a $(v_1 - v_2)^2/2a$.

14. Es dispara un projectil sota un angle de 45° amb una velocitat inicial de 20 m/s . Calculeu la velocitat als 2 s . Si quan arriba al nivell del terra es troba amb el començament d'un penya-segat de 200 m , quant temps triga a arribar al fons i quant val la velocitat?

Solució: $14.14i - 5.46j \text{ m/s}$; 8 s ; $14.14i - 63.22j \text{ m/s}$

15. Un noi, que està a 4 m d'una paret vertical, llença una pilota contra ella. La pilota surt de la seva mà a 2 m per sobre del terra amb una velocitat inicial $10i + 10j \text{ m/s}$. Quan la pilota xoca amb la paret s'inverteix la component horitzontal de la seva velocitat, mentre que la component vertical es manté constant. Determineu on caurà la pilota.

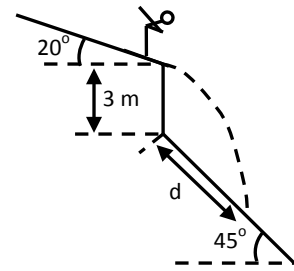
Solució: 18.2 m respecte la paret.

16. Demostreu que en un tir parabòlic, amb una velocitat inicial (v_{0x}, v_{0y}) , el radi de curvatura és mínim en el punt més alt de la trajectòria. Quant val el radi de curvatura?

Solució: v_{0x}^2/g .

17. Un esquiador llisca per una pista de 20° de pendent. Al final d'aquest, al qual arriba movent-se a una velocitat de 10m/s , hi ha un desnivell vertical de 3m , i tot seguit un altre pendent de neu de 45° . Determineu la posició "d" on cau l'esquiador, respecte el segon pendent, i la velocitat en aquest punt.

Solució: 21.2m ; $v=9.4\mathbf{i}-19.1\mathbf{j}$ m/s



18. Una pilota es llença a nivell de terra amb una velocitat de 10 m/s i amb un angle de 60° respecte l'horitzontal. Si el perfil del terra va baixant segons l'equació $y = -0.01x^2$, determineu la coordenada x del punt on impacta.

Solució: 9.3m .

19. Un arquer dispara una fletxa sobre un mico que està penjat de la branca d'un arbre a una alçada h del terra i que es deixa caure quan l'arquer tira la fletxa. Si la distància de l'arquer a l'arbre és d i l'angle amb el que apunta, respecte l'horitzontal, és α , demostreu que qualsevol que sigui la velocitat de sortida v_0 de la fletxa, aquesta sempre impactarà sobre el mico. El "sempre" anterior no és totalment cert, ja que hi ha un valor mínim de v_0 per sota del qual la fletxa no arribarà al seu objectiu. Determineu aquest valor.

Solució: $v_0 < (gd/\sin 2\alpha)^{1/2}$.

20. Es dissenya una centrifugadora per aplicar sobre unes mostres de laboratori acceleracions normals de $1000g$ ($g=9.8\text{ m/s}^2$). Si la distància de les mostres al centre és de 300mm , calculeu: a) la velocitat de rotació en rpm ? b) Si es vol que la centrifugadora assoleixi aquesta velocitat en 1 minut, quant valdrà l'acceleració angular (suposeu que el moviment és uniformement accelerat) ?

Solució: a) 1726 rpm ; b) 3.01 rad/s^2 .

21. Una partícula es mou sobre una circumferència de radi $r = 2\text{m}$ segons la llei $\theta = 3t^2 - 2t$ rad, on t s'expressa en s. Calculeu per després de 4s d'haver iniciat el moviment l'angle, l'arc, les velocitats angular i lineal, les acceleracions angular, tangencial i normal.

Solució: 40rad ; 80m ; 22rad/s ; 44m/s ; 6rad/s^2 ; 12m/s^2 ; 968m/s^2 .

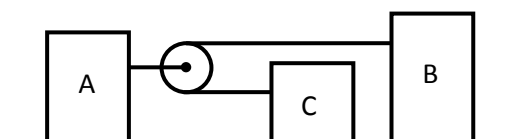
22. Una centrifugadora té un radi de 8m . Si parteix del repòs, i accelera segons la funció temporal $\alpha(t)=0.192-0.0016t$ rad/s², calculeu les acceleracions tangencial i normal d'un objecte als 2 minuts d'haver començat el moviment.

Solució: 0 ; 1062m/s^2 .

23. Un cotxe, que parteix del repòs, circula per un circuit consistent en una recta de 200m seguida d'un quart de circumferència de 50m de radi. Si en tot el trajecte l'acceleració és de 0.6m/s^2 (pel cas del quart de circumferència seria l'acceleració tangencial), determineu el valor de la velocitat i l'acceleració total al final del trajecte.

Solució: 18.28m/s ; 6.71 m/s^2 .

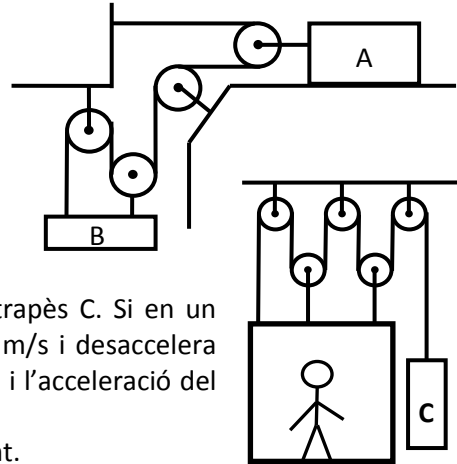
24. Els blocs A i B de la figura adjunta es poden moure horitzontalment per l'acció d'una politja i una corda inextensible. Si el bloc C està fixat al terra, determineu la velocitat del B, si el A es mou cap a l'esquerra a una velocitat de 1 m/s . Com canvia el resultat en el cas en que, a més, el bloc C es mou cap a la dreta amb una velocitat de 2 m/s .



Solució: 2 m/s cap a l'esquerra; 4 m/s cap a l'esquerra.

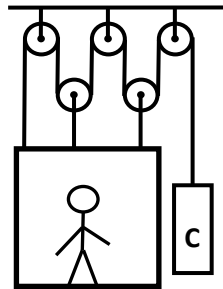
25. El bloc A de la figura es pot moure horitzontalment, mentre que el B ho pot fer verticalment per l'acció d'un sistema de quatre politges i una corda inextensible. Si el bloc A es mou cap a la dreta amb una velocitat de 6 m/s, determineu la velocitat del B.

Solució: 4m/s cap a dalt.



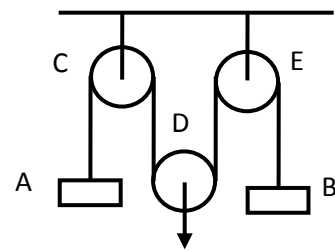
26. L'ascensor de la figura es mou per l'acció d'un sistema de 5 politges, una corda inextensible i un contrapès C. Si en un determinat instant l'ascensor puja a una velocitat de 6 m/s i desaccelera cap avall a un ritme de 0.5 m/s^2 , determineu la velocitat i l'acceleració del contrapès.

Solució: 30 m/s baixant; 2.5 m/s^2 desaccelerant cap amunt.



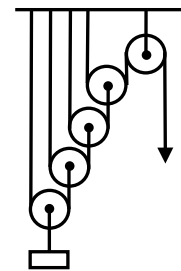
27. Dos blocs A i B estan connectats per una corda inextensible que passa per tres politges C, D i E, tal com es mostra a la figura. Les politges C i E estan fixes, però la D és mòbil i baixa verticalment amb una velocitat constant de 1.5 m/s. A l'instant inicial el bloc A està en repòs i es comença a moure des de la posició indicada en el dibuix baixant amb una acceleració constant de 0.5 m/s^2 . Determineu en aquest instant la velocitat i l'acceleració del bloc B.

Solució: 3m/s (cap amunt); 0.5 m/s^2 (cap amunt).



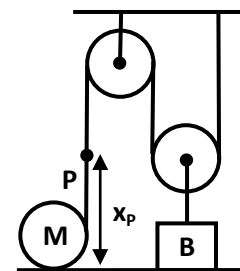
28. Determineu la velocitat amb la que puja el bloc que penja del sistema de cinc politges i quatre cordes de la figura quan s'estira de l'extrem de la darrera corda amb una velocitat de 16 m/s. Quant val l'acceleració del bloc si la velocitat amb la que s'estira augmenta a un ritme de 4 m/s^2 .

Solució: 1 m/s; 0.25 m/s^2 .



29. L'equació de la posició (respecte el terra) del punt P del cable, que es mou per l'acció del motor M de la figura, és $x_p(t) = (1 - 0.01t^3) \text{ m}$; de forma que, com el motor tira del cable cap avall, la distància del punt P al terra es va reduint. Determineu: a) la velocitat i l'acceleració del punt P per $t = 1\text{s}$. b) Si el cable passa per dues politges iguals, determineu la posició, la velocitat i l'acceleració del bloc B de 1kg de massa per $t = 1\text{s}$, si a l'instant inicial està en contacte amb el terra. c) Quant temps trigarà el bloc a pujar una distància de 1 m ?

Solució: 0.99m, -0.03 m/s , -0.06 m/s^2 ; b) 0.005 m, 0.015 m/s , 0.03 m/s^2 ; c) 5.85 s.



30. Una partícula es mou segons un mhs de 2s període. Si a l'instant inicial es troba a 3 cm de l'origen (en el sentit positiu) i es mou amb una velocitat de 5 cm/s atansant-se cap a l'origen, determineu: a) les equacions de la posició en les formes: $A\sin(\omega t + \psi)$ i $A\cos(\omega t + \Theta)$, b) els valors màxims de la velocitat i l'acceleració i c) la posició, velocitat i acceleració per $t = 1.0\text{s}$.

Solució: a) $3.4\sin(\pi t + 2.06) \text{ cm} = 3.4\cos(\pi t + 0.49) \text{ cm}$; b) 10.68 cm/s i 33.55 cm/s^2 ; c) -3 cm , 5.02 cm/s , 29.61 cm/s^2 ;

31. L'equació de l'elongació d'una partícula unida a una molla és $6\sin(2\pi t/5) \text{ cm}$. Si en un determinat instant l'elongació és de 3.6 cm, quant valdrà 1s més tard?

Solució: 5.68 cm o -3.45 cm .