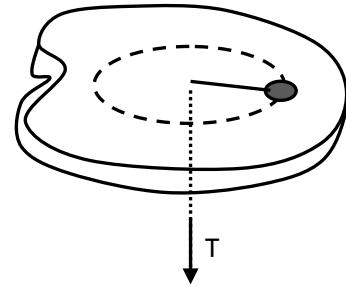


**Problemes de Física I**  
**Grau en Enginyeria Física. UPC. Curs 2015-2016**  
**Tema 4: Gravitació**

1. Un cos de 2 kg que inicialment es troba en el punt  $r_0 = 5i$  m, es mou amb una velocitat  $v_0 = 3j$  m/s. Si se li aplica una força constant  $F = 4i$  N, determineu en qualsevol instant de temps: a) la quantitat de moviment; b) el moment angular; c) el moment de la força. Comproveu que la derivada temporal del moment angular és el moment de la força.  
Solució: a)  $(4t, 6, 0)$  kg m/s; b)  $(0, 0, 30 - 6t^2)$  kg m<sup>2</sup>/s; c)  $(0, 0, -12t)$  N m.

2. Un disc de 1 kg està lligat a l'extrem d'una corda que a la vegada passa pel forat d'una taula. Si l'objecte gira sobre la taula a una velocitat angular de 2 rad/s segons una trajectòria circular de 1 m de radi, determineu: a) La velocitat lineal, el moment angular, l'energia cinètica, la tensió de la corda i el moment total degut a les forces que actuen sobre el disc. Si augmentem la tensió de la corda fins que el radi de la trajectòria sigui de 50 cm, determineu b) el moment total de les forces. c) Quina quantitat s'ha conservat? d) Determineu les mateixes quantitats del primer apartat. e) Determineu el treball realitzat a l'estirar de la corda i per, tant, reduir a la meitat el radi de la trajectòria.



Solució: a) 2 m/s; 2 kg m<sup>2</sup>/s; 2 J; 4 N; 0; b) 0; c) El moment angular; d) 4 m/s; 2 kg m<sup>2</sup>/s; 8 J; 32 N; 0; e) 6 J.

3. L'estació espacial internacional està a una òrbita quasi bé circular de 340 km sobre la superfície terrestre. Determineu: la velocitat i el període orbital. Considereu que la massa i el radi mitjà de la Terra valen respectivament  $5.9736 \times 10^{24}$  kg i 6371 km, que la constant de la gravitació universal és  $6.67428 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>, i que l'òrbita és circular.  
Solució: 7.71 km/s; 5470 s.

4. Un satèl·lit de 200 kg de massa es mou segons una òrbita circular a una alçada de 200 km respecte la superfície terrestre. Determineu: a) la seva velocitat, b) el període de l'òrbita i c) la mínima energia necessària per posar-lo en òrbita. Tingueu en compte la rotació de la Terra. Des de quin lloc de la superfície i en quina direcció caldrà llançar el satèl·lit per minimitzar al màxim el valor d'aquesta energia? La massa i el radi de la Terra són:  $5.9736 \times 10^{24}$  kg i 6371 km.  $G = 6.67428 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.

Solució: a) 7.79 km/s; b) 1.47 hores; c)  $6.426 \times 10^9$  J; Qualsevol punt de l'equador i en direcció est.

5. La sonda espacial Messenger es va apropar a Venus segons una trajectòria parabòlica. Si la distància mínima a la superfície del planeta fou de 338 km, i la massa i el radi de Venus són respectivament de  $4.8685 \times 10^{24}$  kg i 6052 km, determineu: a) la velocitat de la sonda quan passà per aquest punt. b) En quant s'hauria hagut de reduir la velocitat perquè la sonda passés d'una òrbita parabòlica a una de circular de radi igual a la distància de màxim apropament? La constant de la gravitació universal és  $6.67428 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.

Solució: a) 10.08 km/s; b) 2.95 km/s.

6. En el seu estudi de Júpiter la sonda espacial Galileu es situà durant un cert temps en una òrbita el·líptica al voltant de Io (un dels satèl·lits de Júpiter). Si el periastre (punt de mínima distància) d'aquesta òrbita estava situat a 2820 km del centre del satèl·lit i en aquest punt la velocitat era de 2 km/s, determineu l'excentricitat de la trajectòria, l'apoastre, la velocitat a

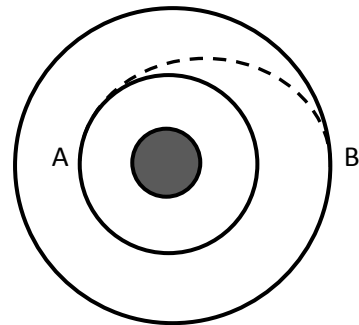
l'apoastre i el període de la trajectòria. La massa de Io és de  $8.9319 \times 10^{22}$  kg. La constant de la gravitació universal és  $6.67428 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.

Solució: 0.892; 49486 km; 114 m/s; 4 dies.

7. Un satèl·lit descriu una trajectòria el·líptica al voltant de la Terra amb un perigeu i un apogeu que es troben respectivament a 8000 i 24000 km del centre de la Terra. Si la velocitat del satèl·lit quan es troba al perigeu és de 8.64 km/s, determineu les components normal i tangencial de la velocitat del satèl·lit quan està a 16000 km del centre de la Terra. Considereu que la massa i el radi mitjà de la Terra valen respectivament  $5.9736 \times 10^{24}$  kg i 6371 km, i que la constant de la gravitació universal és  $6.67428 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.

Solució: tangencial: 4.32 km/s; normal: 2.52 km/s.

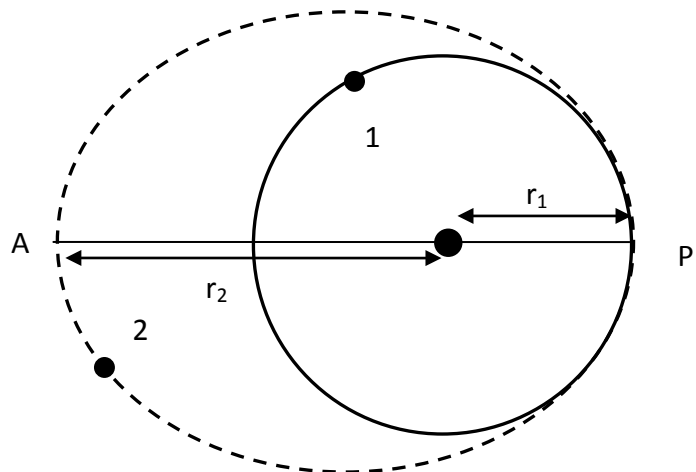
8. Com es mostra a la figura, la manera òptima de transferir un vehicle espacial des d'una trajectòria circular a una altra de coplanària de radi més gran és activar els motors quan el vehicle passi pel punt A de forma que a l'augmentar la velocitat segueixi una trajectòria el·líptica, anomenada el·lipse de canvi de Hohmann. Tot seguit, quan el vehicle arribi a l'apogeu B de la trajectòria es torna a augmentar la velocitat de forma que segueixi la trajectòria circular final.



Si les distàncies inicial i final respecte la superfície terrestre són de 320 i 800 km, determineu a) els increments de velocitat en A i B. Si la massa del satèl·lit és de 1000 kg, determineu b) la quantitat d'energia total necessària per passar d'una òrbita a l'altra. Considereu que la massa i el radi mitjà de la Terra valen respectivament  $5.9736 \times 10^{24}$  kg i 6371 km, i que la constant de la gravitació universal és  $6.67428 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.

Solució: a) 132 m/s; 130 m/s; b)  $1.994 \times 10^9$  J.

9. Dos planetes d'igual massa orbiten al voltant d'una estrella de massa molt més gran. El planeta 1 es mou segons una òrbita circular de radi  $r_1 = 10^{11}$  m i un període de 2 anys. El planeta 2 es mou segons una òrbita el·líptica amb un periastre (punt més proper a l'estrella) de  $r_1 = 10^{11}$  m i un apoastre (punt més allunyat de l'estrella) de  $r_2 = 1.8 \times 10^{11}$  m. Determineu: a) la massa de l'estrella, b) el període de l'òrbita del segon planeta, c) la velocitat dels dos planetes al periastre (P) i d) la velocitat del segon planeta a l'apoastre (A). Constant de la gravitació universal  $G = 6.67428 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.



Solució: a)  $1.487 \times 10^{29}$  kg; b) 3.31 anys; c) 9.962 km/s i 11.296 km/s; d) 6.276 km/s.

10. Un satèl·lit geostacionari és un giny que dona una volta a la Terra en el mateix temps que aquesta triga a donar una volta sobre ella mateixa. En conseqüència, la posició relativa del satèl·lit respecte a la superfície terrestre és la mateixa. S'utilitzen satèl·lits geostacionaris especialment per a comunicacions (com l'Hispasat) i obtenció de dades meteorològiques (com el Meteosat). Si la massa del satèl·lit és de 1000 kg i es mou segons una òrbita circular geostacionària, determineu: a) la distància respecte la superfície de la Terra a la que es troba i la velocitat. Si en un determinat instant es posen en marxa els motors del satèl·lit i aquest es

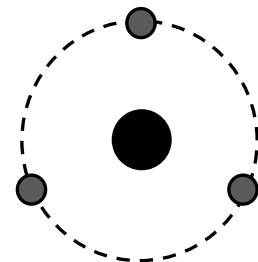
desaccelera fins que la seva velocitat final sigui del 90% de la que tenia quan seguia l'òrbita geostacionària, determineu: b) el treball realitzat pels motors i l'excentricitat de l'òrbita el·líptica resultant. c) la distància, respecte la superfície de la Terra, a la que es troba el satèl·lit quan està al perigeu i la velocitat en aquesta posició. Si quan està al perigeu es posen en marxa els motors de forma que el satèl·lit s'accelera fins que la seva velocitat es suficient com perquè adopti una òrbita parabòlica, determineu: d) l'increment de velocitat i el treball realitzat pels motors. Considereu que la massa i el radi mitjà de la Terra valen respectivament  $5.9736 \times 10^{24}$  kg i 6371 km, i que la constant de la gravitació universal és  $6.67428 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.  
Solució: a) 35873 km, 3.072 km/s; b)  $-8.9694 \times 10^8$  J, 0.19; c) 22379 km, 4.062 km/s; d) 1.204 km/s,  $5.616 \times 10^9$  J.

**11.** En un determinat instant un satèl·lit que es mou segons una òrbita circular de radi  $r$ , respecte el centre de la Terra, es parteix en dos trossos de masses  $m$  i  $4m$ , degut a una explosió interna. La velocitat del tros petit és nul·la i, per tant, posteriorment es dirigirà cap al centre de la Terra. Determineu a) la velocitat del tros gran i b) la distància del centre de la Terra a la posició de l'apogeu de la trajectòria el·líptica que segueix el tros gran.  
Solució: a)  $5/4[GM_T/r]^{1/2}$ ; b)  $25r/7$ .

**12.** Tres cossos de 2, 1 i 2 kg estan situats respectivament en els punts A(1,0,0), B(1,1,0) i C(0,0,1) m. Calculeu a) el camp gravitatori en el punt D(1,1,1) degut a les tres masses, b) la força sobre un cos de 2 kg situat en aquest punt, c) el potencial gravitatori en el punt D, d) l'energia potencial del cos de 2 kg en el punt D, e) el treball fet pel camp degut a les tres masses per portar la massa de 2kg de l'infinit al punt E(0,0,0), f) el treball realitzat pel camp degut a les tres masses al moure la massa de 2kg del punt D al E.  $G = 6.67428 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.  
Solució: a)  $(-4.72 \text{ i} - 9.44 \text{ j} - 11.39 \text{ k}) \times 10^{-11}$  N/kg; b)  $(-9.44 \text{ i} - 18.88 \text{ j} - 22.78 \text{ k}) \times 10^{-11}$  N; c)  $-25.5 \times 10^{-11}$  J/kg; d)  $-51.0 \times 10^{-11}$  J; e)  $62.8 \times 10^{-11}$  J; f)  $11.7 \times 10^{-11}$  J.

**13.** Una nau cilíndrica de 100 m de longitud i 1000 kg està a prop d'un forat negre d'una massa 100 vegades més gran que la del Sol. Si la nau està orientada radialment, de forma que la part davantera està a 10 km del centre del forat negre i la part del darrere a 10.1 km, determineu: a) la força sobre la nau i b) la diferència entre els camps gravitacionals davant i darrere de la nau. Observeu que aquesta diferència és tan gran que genera unes tensions molts més grans que la que l'estructura de la nau pot suportar, i que fan que aquesta es desintegri. Massa del Sol  $1.9891 \times 10^{30}$  kg.  $G = 6.67428 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.  
Solució: a)  $1.31 \times 10^{17}$  N; b)  $2.6 \times 10^{12}$  m/s<sup>2</sup>.

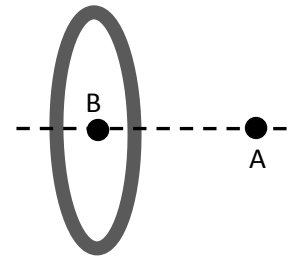
**14.** Un sistema quaternari d'estrelles està format per tres estrelles de massa  $m$ , que es mouen segons una òrbita circular de radi  $r$  al voltant d'una estrella central de massa  $M$ . Si les estrelles que orbiten giren en el mateix sentit i en tot moment formen un triangle equilàter, demostreu que el seu període de revolució és:  $T = 2\pi[r^3/G(M_T + m/\sqrt{3})]^{1/2}$ .



**15.** Determineu el potencial i el mòdul del camp gravitatori degut a un anell de massa  $M$  i radi  $R$  en un punt de l'eix perpendicular a l'anell que està a una distància  $x$  del centre. Si es deixa anar una partícula de massa  $m$  des d'un punt de l'eix que està a una distància  $x$  del seu centre, determineu la velocitat quan passi pel centre.  
Solució:  $-GM/[x^2+R^2]^{1/2}$ ;  $-GMx/[x^2+R^2]^{3/2}$ ;  $v = [2GM\{1/R-1/[x^2+R^2]^{1/2}\}]^{1/2}$ .

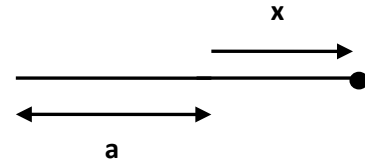
**16.** Un anell de matèria és una estructura coneguda en astronomia planetària i estel·lar. Considereu un anell de matèria uniforme de massa  $2.36 \cdot 10^{20}$  kg i radi  $10^8$  m i un cos de 1000 kg de massa, que està en repòs en un punt A, sobre l'eix de l'anell i a  $2 \cdot 10^8$  m del seu centre. Quan el cos es deixa anar, l'atracció de l'anell fa que el cos es mogui al llarg de l'eix cap al

centre de l'anell (punt B). Determineu: a) L'energia potencial gravitatòria quan el cos està al punt A. b) L'energia potencial gravitatòria quan el cos està al punt B. c) La velocitat del cos quan passa pel punt B. Dades:  $G=6.67428 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$   
 Solució: a)  $-7.044 \times 10^4 \text{ J}$ ; b)  $-1.575 \times 10^5 \text{ J}$ ; c)  $13.2 \text{ m/s}$ .



**17.** Determineu el potencial i el camp gravitatori deguts a una vareta rectilínia de massa M i longitud a en qualsevol punt fora de la vareta que es troba a l'eix definit per ella, expressant els resultats respecte la distància x a un dels extrems.

Solució:  $-GM \ln[(x+a)/x]/a$ ;  $-GM/[x(x+a)]$



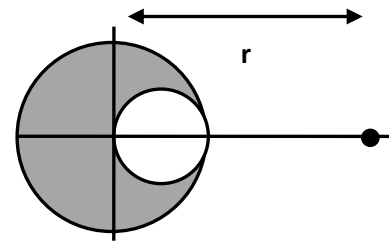
**18.** Determineu el potencial i el camp gravitatoris creats per una esfera buida de massa M i radi R en qualsevol punt de l'espai.  
 Solució: si  $r > R$ :  $g = -GM/r^2$  i  $V = -GM/r$ ; si  $r < R$ :  $g = 0$  i  $V = -GM/R$ .

**19.** Determineu el potencial i el camp gravitatoris creats per una esfera massissa de massa M i radi R en qualsevol punt de l'espai.

Solució: si  $r > R$ :  $g = -GM/r^2$  i  $V = -GM/r$ ; si  $r < R$ :  $g = -GMr/R^3$  i  $V = -GM(3R^2 - r^2)/2R^3$ .

**20.** A una esfera massissa de radi R i massa M se li ha practicat un forat de radi  $R/2$ , de forma que la superfície de la cavitat és tangent a la superfície de l'esfera (veure figura). Determineu el camp i el potencial en un punt exterior que estigui a una distància r del centre de l'esfera i que passi per l'eix que uneix els centres de l'esfera i el forat.

Solució:  $-GM\{1-1/[8(1-R/2r)^2]\}/r^2$ ;  $-GM\{1-1/[8(1-R/2r)]\}/r$ .



**21.** Suposant la Terra esfèrica, de radi R, i homogènia, calculeu la fondària, respecte la superfície de la Terra, a la que s'ha d'introduir un cos per tal que l'atracció gravitatòria sigui la mateixa que experimenta quan està a una alçada h sobre la seva superfície.

Solució:  $R-R^3/(R+h)^2$ .

**22.** a) En quin punt de la recta que uneix els centres de la Terra i la Lluna s'anul·la el camp gravitatori ? b) Determineu la mínima velocitat amb la que hauríem d'enviar un coet des de la superfície de la Terra perquè arribi a la Lluna ? Per resoldre l'apartat tingueu en compte que si la velocitat del coet que enviem des de la Terra és lleugerament superior a zero, quan passa pel punt on s'anul·la el camp, la nau no es desaccelerà i arribarà a la Lluna. Per tant, al fer el balanç d'energies imposeu que la velocitat en aquest punt sigui nul·la. c) Amb quina velocitat arribaria a la Lluna ? Les masses de la Terra i la Lluna són respectivament  $5.9736 \times 10^{24} \text{ kg}$  i  $7.349 \times 10^{22} \text{ kg}$ , la distància entre ambdues  $384400 \text{ km}$  i els seus radis  $6371 \text{ km}$  i  $1738 \text{ km}$ .  $G = 6.67428 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ .

Solució: a)  $346021 \text{ km}$  del centre de la Terra; b)  $11.07 \text{ km/s}$ ; c)  $2.27 \text{ km/s}$ .

**23.** Un objecte es mou dins un túnel, que travessa diametralment la Terra, per l'acció de la força gravitatòria. Determineu l'acceleració quan es trobi a una distància r del centre de la Terra. Es mourà segons moviment harmònic simple ? Si l'objecte es deixa anar des d'una de les boques del túnel amb velocitat nul·la, determineu la velocitat quan passi pel centre de la Terra. La massa i el radi de la Terra són:  $5.9736 \times 10^{24} \text{ kg}$  i  $6371 \text{ km}$ .  $G = 6.67428 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ .

Solució:  $-GMr/R^3$ , on M i R són la massa i el radi de la Terra; si;  $[GM/R]^{1/2} = 7.91 \text{ km/s}$ .

**24.** La velocitat d'escapament és la velocitat mínima que un objecte necessita per poder escapar de l'atracció del camp gravitatori generat per un altre objecte, com per exemple un planeta o una estrella (un objecte que es llença amb aquesta velocitat des de la superfície d'un planeta arribarà a l'infinit amb velocitat nul·la). Determineu a) la velocitat d'escapament de la Terra. La massa i el radi de la Terra són respectivament  $5.9736 \times 10^{24}$  kg i 6371 km. D'altra banda, un forat negre és una regió de l'espai-temps on res, inclús la llum, pot escapar (la velocitat d'escapament és la de la llum). Determineu b) el radi que hauria de tenir el Sol perquè es converteixi en un forat negre. Massa del Sol  $1.9891 \times 10^{30}$  kg.  $G = 6.67428 \times 10^{-11}$  N  $m^2/kg^2$  i  $c = 3 \times 10^8$  m/s.

Solució: a) 11.19 km/s; b) 2.95 km.