

Problemes de Física I
Grau en Enginyeria Física. UPC. Curs 2015-2016
Tema 5: Cinemàtica del sòlid rígid

1. Digueu si les següents parelles de punts pertanyen al mateix sòlid rígid:

- a) $A(2,3,-4)$ m, $V_A=(1,-1,2)$ m/s; $B(0,-1,1)$ m, $V_B=(-2,-2,0)$ m/s.
- b) $A(1,-2,0)$ m, $V_A=(-3,2,1)$ m/s; $B(1,-1,2)$ m, $V_B=(3,1,-2)$ m/s.
- c) $A(2,7,-2)$ m, $V_A=(0,0,1)$ m/s; $B(2,2,1)$ m, $V_B=(3,2,-1)$ m/s.
- d) $A(3,0,-2)$ m, $V_A=(4,3,1)$ m/s; $B(-2,1,2)$ m, $V_B=(-2,-7,-4)$ m/s.

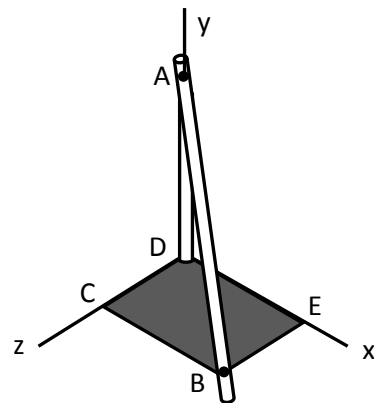
Solució: a) Sí, b) No, c) No, d) Sí

2. Un sòlid rígid gira amb una velocitat angular ω al voltant d'un eix fix que passa pel punt A. Trobeu la velocitat d'un punt P per cadascun dels casos següents:

- a) $\omega = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ rad/s, $A(0,0,0)$ m, $P(2,-3,1)$ m.
- b) Rotació de 3 rad/s en la direcció del vector $(-2,4,3)$ i aplicada en $A(2,-1,1)$ m. $P(2,1,3)$ m.
- c) Rotació de 2 rad/s, eix de rotació que passa pel punt $A(2,4,2)$ apuntant cap a $B(3,1,-2)$. P és l'origen $(0,0,0)$

Solució: a) $(-5,-8,-14)$ m/s; b) $(1.10,2.22,-2.22)$ m/s; c) $(-3.92,3.92,-3.92)$ m/s.

3. L'objecte que es mostra a la figura està format per tres cossos soldats: dos segments AB i AD i una placa rectangular BCDE. El segment DA és de 225 mm i les longituds dels costats CB i BE de la placa són respectivament de 500 mm i 300 mm. L'objecte gira al voltant de l'eix que passa pel segment AB amb una velocitat angular constant de 10 rad/s en el sentit de les agulles del rellotge, si s'observa des del punt A. Determineu la velocitat dels punts C i E. Distàncies $DA = 225$ mm

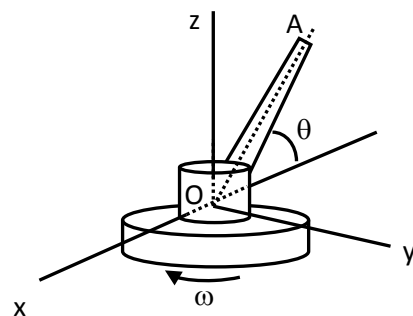


Solució: $-2.4\mathbf{j} - 1.8\mathbf{k}$ m/s; $1.08\mathbf{i} + 2.4\mathbf{j}$ m/s.

4. Un cos rígid està sotmès a tres rotacions que venen donades pels vectors $\omega_1 = (2,3,4)$ s⁻¹, $\omega_2 = (1,5,-2)$ s⁻¹, $\omega_3 = (-1,2,3)$ s⁻¹, els eixos de les quals passen respectivament pels punts $A_1(0,0,1)$ m, $A_2(1,0,0)$ m, $A_3(2,3,0)$ m, i a dos translacions $V_1 = (80,0,0)$ m/s i $V_2 = (40,30,0)$ m/s. Trobeu: a) La velocitat lineal del sòlid en el punt $O(0,0,0)$ i b) la velocitat lineal mínima.

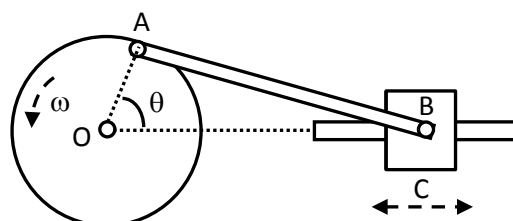
Solució: a) $(126,28,12)$ m/s; b) $(9.18,45.89,22.95)$ m/s

5. El canó de la figura, de 5m de longitud, gira sobre la seva base a 1.5 rad/s, mentre que l'angle d'inclinació θ augmenta a un ritme de 2 rad/s. Si a l'instant, que es mostra a la figura, el canó està orientat segons el pla xz, i l'angle d'inclinació $\theta = 30^\circ$, calculeu la velocitat de la punta del canó A en aquest instant.



Solució: a) $(5, 6.495, 8.660)$ m/s.

6. La roda de radi R del mecanisme de la figura gira en sentit antihorari amb una velocitat angular constant ω . Si la roda i la peça C estan unides per una vareta de longitud l, determineu l'expressió genèrica, per qualsevol angle θ , de les velocitats



angular de la vareta i de la peça C. Quant val la velocitat de la peça quan l'angle $\theta = 0^\circ$ i 180° ?
 Solució: $\Omega = -\omega R \cos\theta / [l^2 - R^2 \sin^2\theta]^{1/2}$; $v_c = -\omega R \sin\theta [1 + R \cos\theta / (l^2 - R^2 \sin^2\theta)^{1/2}]$; 0; 0.

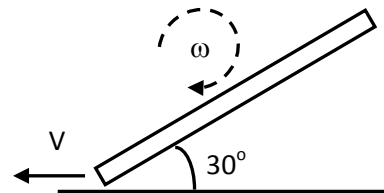
7. Un cotxe que circula en línia recta a 72 km/h (suposeu que segons el sentit positiu de l'eix x), sobre una superfície horitzontal glaçada, comença a lliscar de manera que gira a 0.5 rad/s en un eix vertical (suposeu que és l'eix z) i en sentit horari mirat des de dalt. Trobeu la seva velocitat mínima, i reduïu el seu moviment a l'equivalent més senzill possible.

Solució: $\mathbf{V}_{\min} = (0,0,0)$; rotació pura $(0,0,-0.5) \text{ s}^{-1}$ aplicada en un eix instantani de rotació vertical situat a 40 m del cotxe (a la dreta segons el sentit de la marxa).

8. En un determinat instant el moviment d'un sòlid queda definit per les rotacions simultànies següents: $\boldsymbol{\omega}_1 = (-3,0,2) \text{ s}^{-1}$, $\boldsymbol{\omega}_2 = (1,0,1) \text{ s}^{-1}$ i $\boldsymbol{\omega}_3 = (2,1,0) \text{ s}^{-1}$, els eixos de les quals passen, respectivament, pels punts $(0,0,0)$, $(0,-9,6) \text{ m}$ i $(-1,5,0) \text{ m}$. a) Reduïu el moviment a l'origen de coordenades i descriu els moviments elementals corresponents. b) Determineu la velocitat mínima, l'eix instantani de rotació i lliscament i reduïu el moviment a l'equivalent més senzill possible.

Solució: a) translació: $(-9,6,-2) \text{ m/s}$, rotació: $(0,1,3) \text{ s}^{-1}$; b) translació: $(0,0,0)$, rotació pura $(0,1,3) \text{ s}^{-1}$; $z-3y=9$, $x=-2$

9. Una barra rectilínia de 40 cm de longitud es recolza únicament per un dels seus extrems sobre una superfície horitzontal per la que pot lliscar, de manera que comença a caure. A l'instant en que la barra forma un angle de 30° amb l'horitzontal, gira amb una velocitat angular de 2 rad/s, mentre que la velocitat de l'extrem en contacte amb el terra és de 10 cm/s (veure figura).



a) Calculeu la velocitat de l'altre extrem de la barra. b) Reduïu el moviment a l'equivalent més senzill possible, indicant el tipus de moviment.

Solució: a) $(0,30,-69.28) \text{ cm/s}$; b) Rotació pura de 2 rad/s aplicada a l'eix instantani, que és perpendicular al pla del paper i està situat a 5 cm segons la vertical del punt de contacte.

10. El moviment de la Terra es pot considerar com la composició d'una rotació al voltant del Sol (de 365.26 dies de durada) més una rotació sobre el seu eix (de 24 h de durada). Suposant que l'eix de rotació de la Terra és perpendicular al pla de la seva òrbita. a) Reduïu el seu moviment a una translació més una rotació respecte l'eix que passa pel centre de la Terra. b) A quina distància del centre de la Terra es troba l'eix instantani de rotació? (Distància Terra-Sol: $1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$)

Sol: (a) translació: 29.785 km/s, rotació: $7.272 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$; (b) $4.096 \cdot 10^5 \text{ km}$ en direcció cap el Sol.

11. Al referir el moviment d'un sòlid rígid a uns determinats eixos de coordenades observem que els punts que, en un determinat instant, ocupen les posicions $A(0,0,0)$, $B(1,1,0) \text{ m}$ i $C(1,1,1) \text{ m}$, tenen, respectivament, les següents velocitats $(2,1,-3) \text{ m/s}$, $(0,3,-1) \text{ m/s}$ i $(-1,2,-1) \text{ m/s}$. a) Determineu en aquest instant el moviment en funció de la velocitat del primer punt i d'una rotació al voltant d'un eix que passi per ell. b) Trobeu la velocitat mínima i l'eix instantani de rotació i lliscament.

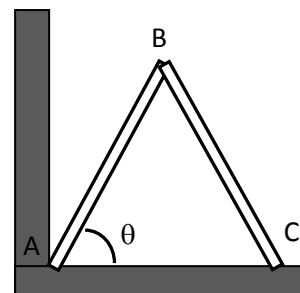
Solució: a) translació: $(2,1,-3) \text{ m/s}$, rotació: $(1,-1,2) \text{ s}^{-1}$; b) $5/6(-1,1,-2) \text{ m/s}$; $x+y=4/3$, $z-2x=1/6$

12. Un sòlid rígid es mou sota l'acció d'una rotació l'eix de la qual és paral·lela a l'eix Y més una translació desconeguda. S'observa que la velocitat del punt $A(0,0,1) \text{ m}$ té una component Z nul·la, mentre que la velocitat del punt $B(1,1,0) \text{ m}$ és $(0,-3,-2) \text{ m/s}$. a) Reduïu el moviment a una rotació aplicada en A més una translació. b) Calculeu la velocitat de l'origen. c) Reduïu el moviment a l'equivalent més senzill possible, indicant de quin tipus de moviment es tracta.

Solució: a) rotació $(0,2,0) \text{ s}^{-1}$ més translació $(2,-3,0) \text{ m/s}$; b) $(0,-3,0) \text{ m/s}$; c) rotació $(0,2,0) \text{ s}^{-1}$ aplicada a un eix paral·lel a l'eix y que passa per l'origen O més translació $(0,-3,0) \text{ m/s}$.

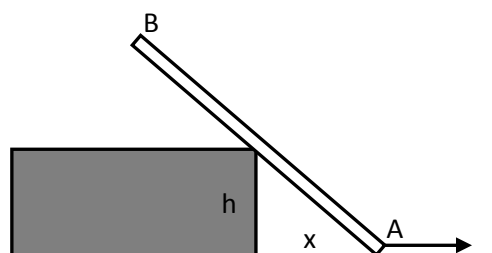
13. Com s'indica a la figura, dues barres de 1 m de longitud estan unides en B per una frontissa, mentre que els extrems A i C toquen el terra. Si el punt A està fixat i el sistema es deixa en llibertat, determineu les velocitats dels extrems B i C quan $\theta=20^\circ$ i la velocitat angular de la barra AB val $\omega=0.2 \text{ rad/s}$.

Solució: Si les coordenades x i y són respectivament les direccions horitzontal i vertical, $\mathbf{v}_B = (0.0684, -0.1879, 0) \text{ m/s}$; $\mathbf{v}_C = (0.1368, 0, 0) \text{ m/s}$.



14. Una barra de 3 m llisca, tot recolzant-se en un esglaó d'una alçada $h = 1 \text{ m}$. Si l'extrem A que toca el terra està a una distància $x = \sqrt{3} \text{ m}$ de la base del esglaó, i la velocitat a aquest instant és de 1 m/s , determineu la velocitat angular de la barra i la velocitat de l'altre extrem B.

Solució: Si les coordenades x , y i z són respectivament les direccions horitzontal, vertical i perpendicular al paper (i sortint) $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 0.25) \text{ rad/s}$ i $\mathbf{v}_B = (5/8, -3\sqrt{3}/8, 0) \text{ m/s}$.



15. Una barra de 2m de longitud gira respecte un dels seus extrems, que prenem com origen de coordenades, en el pla xy amb una velocitat i una acceleració angulars, de sentit contrari a les agulles del rellotge, de 5 rad/s i 30 rad/s^2 respectivament. Determineu la velocitat i l'acceleració de l'altre extrem quan l'angle que forma la vareta respecte l'eix x és de 30° .

Solució: $-5\mathbf{i} + 8.7\mathbf{j} \text{ m/s}$; $-73.3\mathbf{i} + 27\mathbf{j} \text{ m/s}^2$.

16. Una escala de 5 m de longitud llisca pel terra recolzant-se en una paret vertical. En un moment donat la velocitat de l'extrem que s'arrossega pel terra, i que es troba a 4m de la paret, és de 2 m/s i la seva acceleració de -1 m/s^2 . Trobeu, en aquest instant: a) La velocitat i acceleració de l'altre extrem. b) La velocitat i acceleració del punt mig de l'escala

Solució: a) $-8/3\mathbf{j} \text{ m/s}$; $-64/27\mathbf{j} \text{ m/s}^2$; b) $\mathbf{i} - 4/3\mathbf{j} \text{ m/s}$; $-1/2\mathbf{i} - 32/27\mathbf{j} \text{ m/s}^2$

17. Les rodes d'un cotxe tenen un radi de 25 cm i la seva adherència amb el terra és perfecta (no llisquen). Considereu el moviment d'una de les rodes a l'instant en que el cotxe assoleix la velocitat de 2 m/s accelerant a raó de 1 m/s^2 cap a la dreta. a) Trobeu la velocitat i l'acceleració del punt més alt i més baix de la roda en aquest instant. b) Reduïu el moviment de la roda al moviment equivalent més senzill, indicant el tipus de moviment.

Solució: a) $(0, 4, 0) \text{ m/s}$; $(0, 2, -16) \text{ m/s}^2$; $(0, 0, 0)$; $(0, 0, 16) \text{ m/s}^2$; b) rotació pura $(-8, 0, 0) \text{ rad/s}$ en l'eix instantani de rotació (paral·lel a X i que passa pel punt de contacte amb el terra).