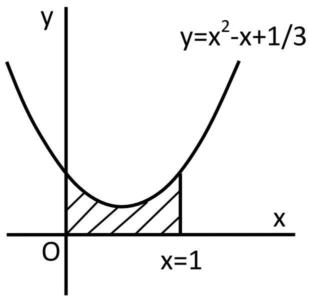
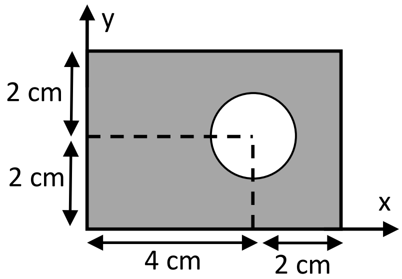
Problemes de Física I
Grau en Enginyeria Física. UPC. Curs 2015-2016
Tema 8. Dinàmica del sòlid rígid

1. Trobeu el centre de masses de la superfície limitada pels eixos de coordenades, la recta x=1 cm i la paràbola $y=x^2-x+1/3$ cm.
Solució: (0.5, 0.1) cm.



2. Trobeu el centre de masses d'una esfera homogènia de radi 4 cm que té un forat esfèric de 1 cm de radi, el centre del qual es troba a 2 cm del centre de l'esfera. Preneu com eix x la direcció que uneix ambdós centres.
Solució: (-0.032,0,0) cm.

3. Trobeu el centre de masses de la superfície de la figura, formada per un rectangle de costats 6 i 4 cm que té un forat circular de radi R =1 cm, amb el seu centre situat en el punt (4,2) cm respecte l'origen de coordenades.
Solució: (2.85,2) cm.

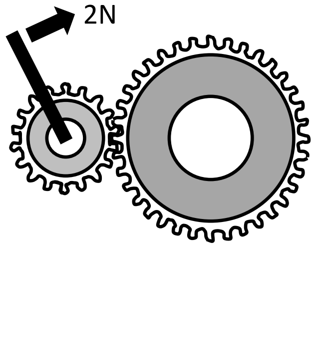


4. Un bastó de 2 m de longitud està inicialment orientat verticalment i en repòs. Si l'extrem inferior es recolza sobre una superfície de gel (per tant, sense fregament), determineu la distància que s'ha mogut aquest extrem respecte la situació inicial.
Solució: 0.5 m.

5. Trobeu el moment d'inèrcia d'una vareta prima homogènia de longitud L i massa M respecte un eix perpendicular a la vareta, que passa a través de: a) un dels extrems i b) el centre de masses. Comproveu el teorema de Steiner. Quant val el radi de gir pels dos casos ?
Solució: a) $ML^2/3$; b) $ML^2/12$; $L/\sqrt{3}$; $L/\sqrt{12}$.

6. Calculeu el moment d'inèrcia d'un disc homogeni de radi R respecte: a) un eix perpendicular al disc que passa pel seu centre de masses; b) un eix que coincideix amb un diàmetre. Comproveu el teorema dels eixos perpendiculars, que afirma que la suma dels moments d'inèrcia d'una figura plana, respecte dos eixos perpendiculars entre si que estan en el pla de la figura I_{xx} i I_{yy}, és igual al moment d'inèrcia de la figura respecte un eix perpendicular al seu pla I_{zz} i que passa pel punt d'intersecció dels tres eixos ($I_{xx}+I_{yy}=I_{zz}$).
Solució: a) $MR^2/2$; b) $MR^2/4$.

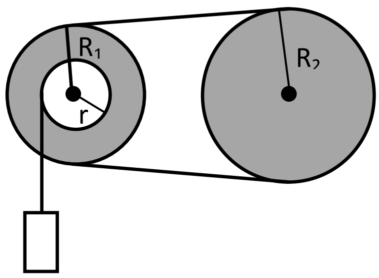
7. Calculeu el moment d'inèrcia i el radi de gir d'una una esfera buida i una massissa de radi R i massa M, respecte un eix que passa pel seu centre. Apliqueu el teorema que afirma que la suma dels moments d'inèrcia respecte tres eixos perpendiculars (I_{xx},I_{yy},I_{zz}) que intersequen en un punt (en aquest cas el centre) és igual al doble del moment d'inèrcia I_0 respecte aquest punt ($I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}=2I_0$). A més, tingueu en compte la simetria esfèrica dels dos objectes.
Solució: $2/3MR^2$; $2/5MR^2$; $\sqrt{(2/3)}R$; $\sqrt{(2/5)}R$.



8. A la figura es mostren dos engranatges que poden girar al voltant de l'eix que passa pel seu centre. Els radis i els moments d'inèrcia del gran i el petit són respectivament de 1 m i 16 kg·m^2 i

0.5 m i 1 kg·m^2. Si el mecanisme es posa en moviment aplicant sobre el petit una força de 2 N amb una palanca de 1 m de longitud, determineu les acceleracions angulars dels engranatges.
Solució: 0.4 i 0.2 rad/s^2.

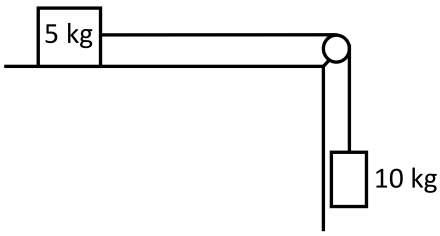
9. A la figura es mostra un sistema format per dues politges. La primera té un moment d'inèrcia respecte el seu eix I_1, un radi interior r i un exterior R_1. La segona té un moment d'inèrcia I_2, respecte el seu eix, i un radi R_2. Del radi petit de la primera politja hi penja un cos de massa M. Si les dues politges estan unides mitjançant una corretja de transmissió de massa negligible, determineu l'acceleració del cos.
Solució: $Mg/[M+(I_1+I_2R_1^2/R_2^2)/r^2]$.



10. Dels extrems d'una corda pengen dos cossos de 10 kg i 15 kg. La corda passa por una politja de 5 kg i 0.6 m de radi. Determineu l'acceleració de les masses, la angular de la politja i les tensions a la corda. Quant val la força que sustenta la politja ? Moment d'inèrcia d'una politja de massa M i radi R respecte un eix perpendicular que passa pel seu centre: $1/2MR^2$.
Solució: 1.78 m/s^2; 2.97 rad/s^2; 115.8 N; 120.3 N; 285.1 N.

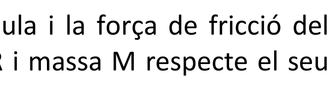
11. Un io-io de 0.1 kg està format per dos discs sòlids de 10 cm de radi, units per una barra sense massa de 1 cm de radi, i una corda de 1.5 m que s'enrotlla al seu voltant. Determineu la tensió de la corda i l'acceleració. Si parteix del repòs quan la corda està totalment enrotllada, quant temps triga a arribar al punt més baix ? Quant val la velocitat en aquest instant ? Moment d'inèrcia respecte un eix perpendicular que passa pel seu centre: $1/2MR^2$, on R és el radi dels discs i M la massa del io-io.
Solució: 0.19 m/s^2; 0.96 N; 4s; 0.76 m/s.

12. Calculeu l'acceleració, la velocitat i l'espai recorregut pel cos de 10 kg del sistema de la figura 3 s després d'iniciar-se el moviment. Dades: diàmetre de la politja = 40 cm, moment d'inèrcia de la politja respecte un eix perpendicular que passa pel seu centre = 0.4 kg m^2, coeficient de fregament cinètic (entre el terra i la massa de 5 kg) = 0.6. Suposeu que la massa del cable és negligible.
Solució: 2.74 m/s^2; 8.22 m/s; 12.33 m.

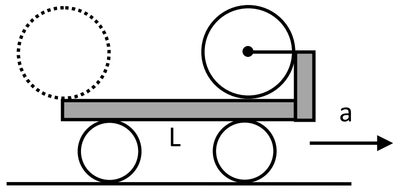


13. Una anella de 30 cm de radi baixa rodant sense lliscar per un pla inclinat de 45^o. Calculeu: a) l'acceleració del centre de masses, b) el valor del coeficient de fregament estàtic necessari perquè rodi sense lliscar. Si cobrim la superfície del pla inclinat amb oli, de manera que l'anella baixa lliscant i el coeficient de fregament dinàmic és 0.2, calculeu les acceleracions del centre de masses i angular. Moment d'inèrcia d'una anella de massa M i radi R respecte a l'eix perpendicular que passa pel seu centre: MR^2.
Solució: 3.46 m/s^2; 0.5; 5.54 m/s^2; 4.62 rad/s.

14. Sobre dos cilindres homogenis iguals de radi R i massa M, que estan sobre al terra es posa una taula de massa m que els cobreix totalment. Si quan s'aplica una força horitzontal F sobre la taula, el sistema es mou sense lliscar, determineu l'acceleració de la taula i la força de fricció del terra sobre cada cilindre. Moment d'inèrcia d'un cilindre de radi R i massa M respecte el seu eix $1/2MR^2$.
Solució: $a=4F/(4m+3M)$, $f_s=MF/(8m+6M)$.

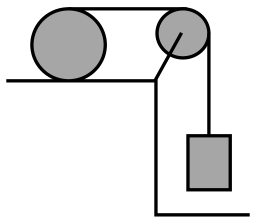


15. Un cilindre homogeni de radi R i massa M roda sense lliscar per sobre de la superfície d'una vagoneta de longitud L que, a la vegada, es mou amb una acceleració constant a. Si, com es mostra a la figura, al principi de tot el cilindre estava en contacte amb la paret dreta de la vagoneta, determineu el temps necessari perquè caigui. Moment d'inèrcia d'un cilindre de massa M i radi R respecte el seu eix $1/2MR^2$.



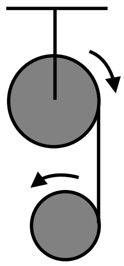
Solució: $t = [3(L-R)/a]^{1/2}$.

16. Un cos de 1 kg penja de l'extrem d'una corda de massa negligible que passa per una politja també de massa negligible. L'altre extrem de la corda s'enrotlla en un cilindre de 8 kg de massa i 10 cm de radi, que roda sense lliscar per sobre un pla horitzontal. Calculeu: a) l'acceleració del cos, la tensió de la corda i l'acceleració angular del cilindre. Moment d'inèrcia d'un cilindre de massa M i radi R respecte el seu eix $1/2MR^2$.



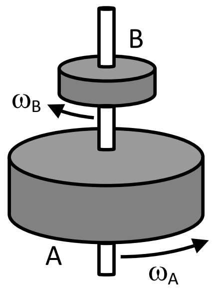
Solució: 2.45 m/s^2; b) 7.35 N; c) 12.25 rad/s^2.

17. D'una politja de radi R_1 i massa m_1, que està fixada al sostre, penja una altra de radi R_2 i massa m_2 amb una corda de massa negligible. Si en tot moment la corda no llisca sobre la primera politja, i la segona politja es desenrotlla de la corda també sense lliscar, determineu les acceleracions del centre de masses i angular de la segona politja i la tensió de la corda. Moment d'inèrcia d'una politja de radi R i massa m respecte el seu eix $1/2mR^2$.

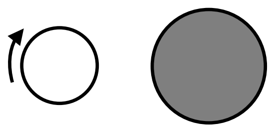


Solució: $a_2 =(m_1+m_2)g/(3/2m_1+m_2)$; $\alpha_2 =m_1g/R_2(3/2m_1+m_2)$; $T=m_1m_2g/(3m_1+2m_2)$.

18. El disc gran de la figura gira amb una velocitat angular de 4 rad/s amb sentit antihorari. L'altre disc, que té un moment d'inèrcia tres vegades menor, gira amb una velocitat angular de sentit contrari de 8 rad/s. Determineu la velocitat angular del conjunt quan s'acoblin.
Solució: 1 rad/s.

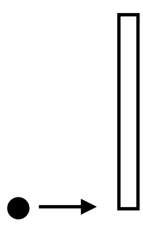


19. El disc petit de la figura, de radi R_1 i massa m_1, gira amb una velocitat angular ω_0 en sentit horari. En el mateix pla hi ha un altre disc de radi R_2 i massa m_2, que inicialment està en repòs, que s'apropa al primer disc fins que contacten, i que com a resultat de les forces de contacte ambdós discs giren. Determineu: a) la velocitat angular final dels dos discs, b) les variacions de moment angular i c) d'energia. Moment d'inèrcia d'un disc de massa M i radi R respecte el seu eix $1/2MR^2$



Solució: a) $\omega_1 =m_1\omega_0/(m_1+m_2)$; $\omega_2 =m_1\omega_0R_1/[R_2(m_1+m_2)]$; b) $\Delta L=m_1m_2R_1(R_2-R_1)\omega_0/[2(m_1+m_2)]$; c) $\Delta E=-R_1^2\omega_0^2m_1m_2/[4(m_1+m_2)]$.

20. Una barra de 1 kg i un 2 m descansa sobre una superfície sense fregament. Si en un dels seus extrems impacta una bola de plastilina de 50 g, que es mou a una velocitat de 20 m/s, de forma que després del xoc queda pegada a la barra, determineu després del xoc : a) la velocitat del centre de masses, b) la velocitat angular del sistema respecte el centre de masses i c) la velocitat de l'extrem de la barra on ha impactat la bola. Moment d'inèrcia d'una barra de longitud L i massa M respecte l'eix perpendicular que passa pel seu centre: $1/12ML^2$.



Solució: a) 0.952 m/s; b) 2.5 rad/s; c) 3.33 m/s.

21. Un jugador de billar colpeja horitzontalment una bola de radi R a una distància d per sobre el seu centre. Determineu a) el valor de d perquè de bon principi la bola avanci rodant sense lliscar. Si el jugador colpeja la bola horitzontalment, a una distància de 2R/3 per sota del seu centre, la bola inicialment roda en sentit contrari al del cas anterior, però avança en el mateix sentit lliscant amb una velocitat inicial v_0. Si el coeficient de fregament cinètic és μ_c, determineu: b) la velocitat angular inicial i c) la velocitat de la bola quan comença a rodar sense lliscar. Moment d'inèrcia d'una esfera de radi R i massa M respecte un eix que passa pel seu centre: $2/5MR^2$. Suposeu que a l'instant inicial la força que la força i el moment amb el que es colpeja la bola és molt més gran que les altres forces.
Solució: a) 2/5R; b) $5v_0/3R$; $5v_0/21$.

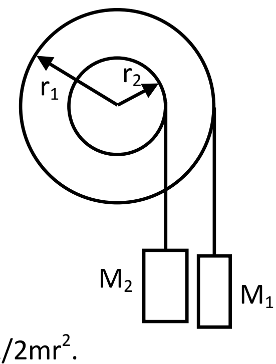
22. Una roda està formada per una anella prima de 3 kg i quatre radis, cadascun de 1.2 kg de massa. Determineu l'energia cinètica de la roda quan roda sense lliscar a una velocitat de 6 m/s. Moment d'inèrcia d'una anella de massa M i radi R respecte l'eix perpendicular que passa pel seu centre: MR^2. Moment d'inèrcia d'un radi de longitud L i massa m respecte l'eix perpendicular que passa per un extrem: $1/3mL^2$.
Solució: 223.2 J.

23. Dos nens de 25 kg estan asseguts als extrems d'una barra de 2.6 m de longitud i 20 kg de massa. Si inicialment la barra gira a 5 rpm respecte un eix que passa pel centre, determineu: a) la velocitat angular quan els nens s'han mogut 60 cm cap el centre de la barra i b) la variació de l'energia cinètica del sistema. Moment d'inèrcia d'una barra de longitud L i massa M respecte l'eix perpendicular que passa pel seu centre: $1/12ML^2$.
Solució: 1.4 rad/s; 21.97 J.

24. Un nen i el seu pare de masses m_1 i m_2 estan situats als extrems oposats d'una palanca de longitud L i massa M, que pivota respecte el seu centre. Determineu l'acceleració angular de la palanca quan l'angle que fa la palanca respecte l'horitzontal és θ. Moment d'inèrcia d'una palanca de longitud L i massa M respecte l'eix perpendicular que passa pel seu centre: $1/12ML^2$. Determineu on s'hauria de situar el pare, respecte el centre de la palanca, perquè l'acceleració angular sigui nul·la.
Solució: $\alpha = 2(m_2-m_1)g\cos\theta/[(M/3+m_1+m_2)L]$; $x= m_1L/2m_2$.

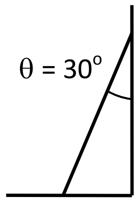
25. El Sol, que té una massa i un radi de 1.99×10^{30} kg i $6.96\text{x}10^8$ m, dóna una volta sobre si mateix cada 25 dies. Si un púlsar és una estrella de neutrons de radi molt petit que emet radiació periòdica degut al seu gran moviment de rotació, determineu la velocitat de rotació del Sol si col·lapsa en un púlsar de 10 km de radi. Per resoldre el problema considereu que totes les forces que intervenen són internes i que abans del col·lapse, com el Sol no és una esfera uniforme de gas, el seu moment d'inèrcia és $0.059MR^2$; mentre que un cop ha col·lapsat si que és pot utilitzar l'expressió corresponent a una esfera massissa respecte el centre, que és $2/5\ MR^2$. Al disminuir el radi del Sol, l'energia potencial gravitatòria també disminueix. En quant augmenta l'energia cinètica de rotació ?
Solució: 331 rev/s; $1.72\text{x}10^{44}$ J.

26. Dos discs de masses m_1 = 3 kg i m_2=1 kg i radis r_1=0.2 m i r_2 =0.1 m s'acoblen formant una sola politja per on passen dues cordes de les que pengen uns cossos de masses M_1 = 2 kg i M_2 = 4 kg que fan girar el sistema. Determineu: a) l'acceleració angular dels discs, b) les acceleracions de les masses M_1 i M_2, c) les tensions a les cordes, d) l'energia cinètica del sistema als 3s, si a l'instant inicial la velocitat era nul·la. Moment d'inèrcia d'un disc de radi r i massa m respecte un eix perpendicular que passa pel seu centre: $1/2mr^2$.

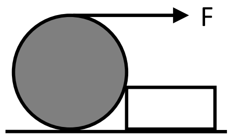


Solució: a) 42.38 rad/s^2 b) a_1= 8.48 m/s^2; a_2= 4.24 m/s^2 c) T_1=2.64 N; T_2=22.24 N d) Ec=1495 J.

27. A la figura adjunta es mostra una escala de 10 kg i 10 m de longitud, que es recolza a la paret, formant un angle de 30^o respecte la vertical. Suposant que la força de fregament deguda a la paret és negligible i que el coeficient de fregament estàtic amb el terra és de 0.4, calculeu fins a quina alçada, respecte la vertical, pot pujar una persona de 90 kg sense que l'escala es mogui.
Solució: a) 6.18 m.

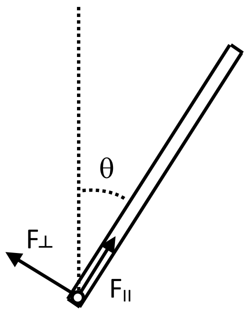


28. Com s'indica a la figura, a la part superior d'un cilindre de massa M i radi R s'aplica una força horitzontal F. Determineu el valor mínim d'aquesta força perquè el cilindre pugi per un esglaó d'alçada h. Moment d'inèrcia d'un cilindre de radi R i massa M respecte un eix perpendicular que passa pel seu centre: $1/2MR^2$.
Solució: $F=Mg[h/(2R-h)]^{1/2}$.

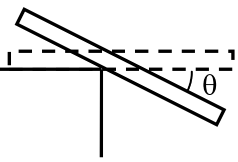


29. Es disposa d'un nombre N de maons idèntics de longitud L, que volem posar un a sobre de l'altre, de forma que sobresurtin el màxim possible sense que caiguin. Quina és la distància que sobresurt el darrer maó respecte el primer ?
Solució: L/2+L/4+L/6+...L/[2(N-1)].

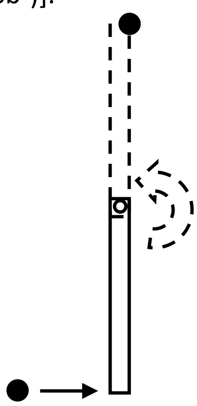
30. Una barra de longitud L i massa M pot girar al voltant d'un eix perpendicular que passa pel seu extrem inferior. Si la barra es deixa caure quan forma un angle θ_0 respecte la vertical, demostreu que les components de la força paral·lela i perpendicular a la barra que fa el suport sobre aquesta, quan forma un angle θ respecte la vertical, són: $F_{II} = Mg(5\cos\theta - 3\cos\theta_0)/2$ i $F_\perp = 1/4Mg\sin\theta$. Moment d'inèrcia d'una barra de longitud L i massa M respecte l'eix perpendicular que passa per un extrem: $1/3ML^2$.



31. Es deixa caure una barra de longitud L i massa M, que inicialment sobresurt una distància L/2+b respecte una taula. Calculeu la velocitat i l'acceleració angular de la barra en funció de l'angle θ que va formant respecte l'horitzontal. Si μ és el coeficient de fregament estàtic entre la barra i la taula, determineu l'angle màxim abans no comenci a lliscar. Moment d'inèrcia d'una barra de longitud L i massa M respecte l'eix perpendicular que passa per un extrem: $1/3ML^2$.
Solució: $\omega=[24gb\cos\theta/(L^2+12b^2)]^{1/2}$; $\alpha=12gb\cos\theta/(L^2+12b^2)$; $\theta=\arctan[\mu L^2/(L^2+36b^2)]$.



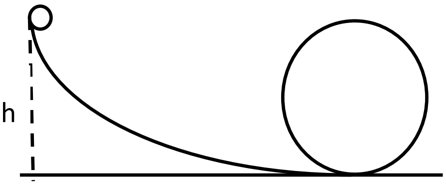
32. Una barra de longitud L i massa M penja verticalment d'un eix que passa pel seu extrem superior. La barra inicialment en repòs rep l'impacte en el seu extrem inferior d'una bola de plastilina de massa m, que es mou a una velocitat v. Si la plastilina queda pegada a la barra, determineu el valor mínim de v perquè la barra doni una volta sencera respecte l'eix. Moment d'inèrcia d'una barra de longitud L i massa M respecte l'eix perpendicular que passa per un extrem: $1/3ML^2$.
Solució: $[2(M+2m)(M+3m)gL/3m^2]^{1/2}$



33. Una bola de massa m i radi r està en el punt més alt d'una semiesfera llisa de radi R, que a la vegada descansa sobre una taula. Quan desplacem lleugerament la partícula de la seva posició inicial comença a rodar sense lliscar sobre la superfície de la semiesfera. La posició de la partícula queda determinada en cada instant pel angle θ que forma el radi vector que va del centre de la semiesfera al centre de la bola amb la vertical. Si prenem la taula com

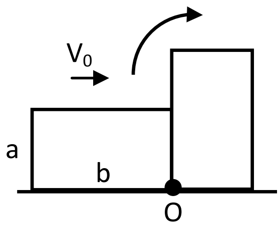
origen d'energies potencials, trobeu l'angle pel que la bola deixa d'estar en contacte amb la semiesfera. Considereu que en tot moment la bola roda sense lliscar. Moment d'inèrcia d'una esfera de radi r i massa m respecte un eix que passa pel seu centre de masses: $2/5mr^2$
Solució: 54°.

34. Una esfera de radi r i massa M roda sense lliscar per una guia amb un bucle circular de radi R. Si inicialment l'esfera es troba a una alçada h respecte el punt més baix de la trajectòria, determineu el mínim valor de h perquè la bola no abandoni la via quan arriba al punt més alt. Si no hi ha fregament l'esfera lliscaria sense rodar. Quant valdria h ? Moment d'inèrcia d'una esfera de radi r i massa M respecte un eix que passa pel seu centre: $2/5Mr^2$.
Solució: 2.7(R-r); 2.5(R-r).



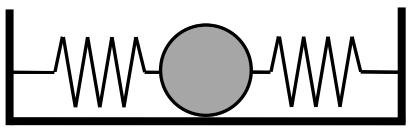
35. Dos cilindres de 2 kg i 5 cm de radi roden sense lliscar per un pla inclinat de 30° i 4 m de longitud. Els coeficients de fregament estàtic i dinàmic amb la superfície del pla valen respectivament 0.4 i 0.2. Si un dels cilindres és massís i l'altre és buit (amb la massa distribuïda a la perifèria), inicialment estan en repòs, i es deixen caure des de la mateixa alçada, determineu: a) la velocitat de cada cilindre quan arribin al final del pla inclinat, b) el temps que triga cada cilindre a arribar al final del pla inclinat. Si augmentem el pendent del pla fins que els cilindres comencin a lliscar, c) determineu per cada cilindre l'angle a partir del que hi ha lliscament. Si l'angle del pla inclinat és 60° i els cilindres roden i llisquen alhora, d) determineu, per cada un dels cilindres, l'acceleració del centre de masses i l'acceleració angular. Moment d'inèrcia d'un cilindre massís respecte un eix que passa pel seu centre de masses: $I = 1/2MR^2$ i d'un buit: $I = MR^2$.
Solució: 5.11 i 4.43 m/s; b) 1.57 i 1.81 s; c) 50.2° i 38.7°; d) 7.51 m/s^2; 39.2 i 19.6 rad/s^2.

36. Un paral·lelepípede de massa M i costats a, b i c (b>a) es mou a una velocitat v_0 per una superfície llisa fins que ensopega amb un obstacle, situat al punt, O que el fa girar. Determineu la velocitat angular de rotació després del xoc. Quant val l'energia perduda en el xoc ? A partir de quin valor de v_0 gira 90° ? Moment d'inèrcia d'un paral·lelepípede de massa M i costats a, b i c respecte un eix que passa pel centre de masses i és perpendicular al pla format per a i b: $I = 1/12M(a^2+b^2)$.



Solució: $\omega=3v_0a/[2(a^2+b^2)]$; $\Delta E = -Mv_0^2(a^2+4b^2)/[8(a^2+b^2)]$; $v_0=[4(a^2+b^2)g\{(a^2+b^2)^{1/2}-a\}/(3a^2)]^{1/2}$.

37. Determineu la freqüència de les petites oscil·lacions del sistema format per dues molles de constant elàstica k i un cilindre de massa M i radi R, que roda sense lliscar. Moment d'inèrcia d'un cilindre de radi R i massa M respecte un eix perpendicular que passa pel seu centre: $1/2MR^2$.
Solució: $f = (1/2\pi)[(4k/(3M)]^{1/2}$.



38. A la figura es representa la part de darrere d'un vehicle espacial que gira al voltant del seu eix a una velocitat de 30 rev/min. Perquè no giri es posa en marxa un sistema amb dos toveres, disposades tangencialment a una distància de 3 m del centre. Si cadascuna expulsa els gasos a un ritme de 10 g/s i a una velocitat de 800 m/s, durant quan temps hauran de funcionar. El moment d'inèrcia del vehicle respecte l'eix considerat és de 4000 kgm^2.
Solució: 52.4 s.