Màquines Elèctriques

Conversió Electromecànica

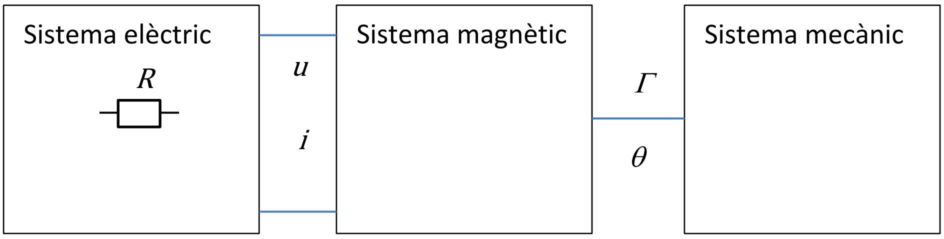
Curs 2016-2017

Joan Rull

Samuel Galceran

DEE-UPC

1. Introducció. Energia i coenergia: Variables d'estat del sistema magnètic



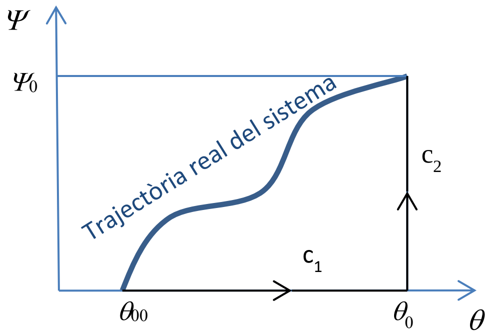
Hipòtesi:

Sistema magnètic sense pèrdues (no dissipatiu = no histèresi i no Foucault)

Pèrdues Joule associades a resistències dels debanats amb paràmetres concentrats, passen al sistema elèctric.

L'energia emmagatzemada en camp magnètic W_{mg} amb la hipòtesi de camp no dissipatiu passa a ser variable d'estat, atès que no depèn del temps ni del camí pel que evoluciona el sistema, sinó només dels estats inicial i final de l'evolució. Es pot expressar com a funció del flux concatenat (Ψ) i de la posició del sistema $(\theta)\ o\ (x)$.

$$W_{\mathrm{mg}}(\Psi_0,\theta_0)=\int_{(0,\theta_{00})}^{(\Psi_0,\theta_0)} dW_{\mathrm{mg}}(\Psi_0,\theta_0)$$



La integració no depèn del camí (funció d'estat) i, per tant, qualsevol camí ha de donar el mateix resultat: s'escullen els camins c_1 i c_2.

L'energia del camp magnètic (integració) per a c_1 és nul·la, atès que no hi ha camp.

En el camí c_2 no es desenvolupa treball mecànic, atès que no hi ha desplaçament.

$$W_{\mathrm{mg}}(\Psi_0,\theta_0)=\int_{c_1} dW_{\mathrm{mg}}(\Psi,\theta)+\int_{c_2} dW_{\mathrm{mg}}(\Psi,\theta)=0+\int_{c_2} dW_{\mathrm{mg}}(\Psi,\theta)$$

$$W_{\mathrm{mg}}(\Psi_0,\theta_0)=\int_{c_2} dW_{\mathrm{mg}}(\Psi,\theta)=\int_0^{\Psi_0} dW_{\mathrm{mg}}(\Psi,\theta_0)$$

Per tal de determinar el diferencial d'energia emmagatzemada es planteja el balanç d'energia del sistema: El que aporta el sistema elèctric s'acumula en el sistema magnètic i es transforma a mecànic (metodologia similar a la dels treballs virtuals o lagrangiana).

$$dW_{\mathrm{el}}=dW_{\mathrm{mg}}+dW_{\mathrm{mc}}$$

En cas de moviment lineal es té $dW_{\mathrm{mc}} = F \cdot dx$ (força i desplaçament), mentre que en cas de moviment rotatiu es té $dW_{\mathrm{mc}} = \Gamma \cdot d\theta$ (parell i desplaçament angular).

$$u \cdot i \cdot dt = dW_{\mathrm{mg}} + \Gamma \cdot d\theta$$

La tensió u és exclusivament la tensió induïda atès que les resistències dels debanats s'han incorporat al sistema elèctric com a paràmetres concentrats i, per tant,

$$u = \frac{d\Psi}{dt}$$

D'altra banda

$$dW_{\mathrm{mg}}(\Psi, \theta) = \frac{\partial W_{\mathrm{mg}}(\Psi, \theta)}{\partial \Psi} d\Psi + \frac{\partial W_{\mathrm{mg}}(\Psi, \theta)}{\partial \theta} d\theta$$

El que permet identificar termes de la següent manera:

$$dW_{\mathrm{mg}} = u \cdot i \cdot dt - \Gamma \cdot d\theta = \frac{d\Psi}{dt} dt \cdot i - \Gamma \cdot d\theta = i \cdot d\Psi - \Gamma \cdot d\theta$$

$$i(\Psi, \theta) = \frac{\partial W_{\mathrm{mg}}(\Psi, \theta)}{\partial \Psi} \qquad \Gamma(\Psi, \theta) = -\frac{\partial W_{\mathrm{mg}}(\Psi, \theta)}{\partial \theta}$$

Si retrobem la integral que permet determinar l'energia en el camp magnètic integrant a través del camí c_2 (que en ser a θ constant té el treball mecànic nul) queda:

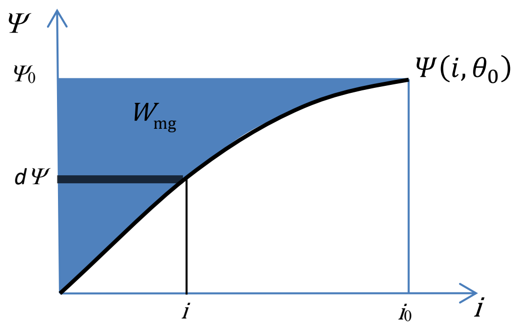
$$W_{\mathrm{mg}}(\Psi_0, \theta_0) = \int_{c_2} dW_{\mathrm{mg}}(\Psi, \theta_0) = \int_{c_2} (i \cdot d\Psi - \Gamma \cdot d\theta) = \int_0^{\Psi_0} i \cdot d\Psi(i, \theta_0)$$

La relació entre el flux concatenat i el corrent depèn de la posició i del corrent (o densitat de camp, és a dir, del nivell de saturació).

$$\Psi(i, \theta) = L(i, \theta) \cdot i$$

On $L(i, \theta)$ és el coeficient d'inducció o inductància, que descriu la característica de magnetització del sistema.

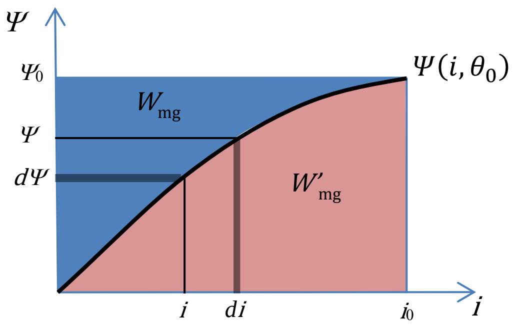
L'energia emmagatzemada en el camp magnètic no és més que l'àrea superior esquerra de la característica de magnetització tal com s'indica a la següent figura.



La magnitud energia emmagatzemada, funció del flux concatenat, no és massa còmoda per a treballar, atès que normalment no es mesuren (calculen) flux magnètics, sinó corrents elèctrics. És més convenient definir una nova variable d'estat, anomenada coenergia W'_{mg} que sigui funció del corrent en lloc del flux.

$$W'_{\mathrm{mg}}(i,\theta) = i \cdot \Psi - W_{\mathrm{mg}}(\Psi,\theta)$$

Es pot interpretar com l'àrea per sota i a la dreta de la característica de magnetització del sistema. Amb la interpretació de les àrees queda clar que si la energia és funció d'estat la coenergia també ho ha de ser.



Com

$$d(i \cdot \Psi) = i \cdot d\Psi + \Psi \cdot di$$

el diferencial de coenergia es pot escriure

$$dW'_{\mathrm{mg}}(i,\theta) = d(i \cdot \Psi) - dW_{\mathrm{mg}}(\Psi,\theta) = i \cdot d\Psi + \Psi \cdot di - \ i \cdot d\Psi + \Gamma \cdot d\theta = \Psi \cdot di + \Gamma \cdot d\theta$$

D'altra banda sabem que

$$dW'_{\mathrm{mg}}(i,\theta) = \frac{\partial W'_{\mathrm{mg}}(i,\theta)}{\partial i} di + \frac{\partial W'_{\mathrm{mg}}(i,\theta)}{\partial \theta} d\theta$$

El que permet identificar els següents termes

$$\Psi(i,\theta) = \frac{\partial W'_{\mathrm{mg}}(i,\theta)}{\partial i} \quad \Gamma(i,\theta) = \frac{\partial W'_{\mathrm{mg}}(i,\theta)}{\partial \theta}$$

Per tal que un sistema desenvolupi parell cal que l'energia (o la coenergia) depengui de la posició.

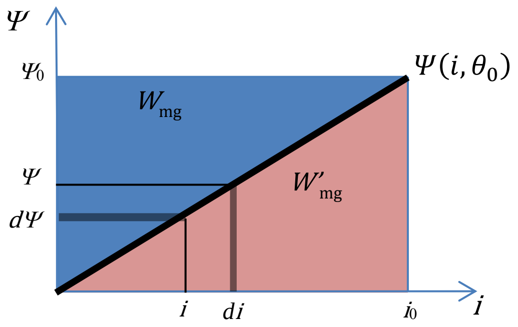
La coenergia es pot determinar integrant a través dels camins c_1 i c_2. De forma anàloga al que passava amb l'energia, el camí c_1 dona un valor nul per manca de camp (corrent), mentre que el camí c_2 té el treball mecànic nul al ser de posició constant.

$$W'_{\mathrm{mg}}(i_0,\theta_0) = \int_{c_1} dW'_{\mathrm{mg}}(i,\theta) + \int_{c_2} dW'_{\mathrm{mg}}(i,\theta) = 0 + \int_{c_2} (\Psi \cdot di + \Gamma \cdot d\theta) =$$
$$= \int_0^{i_0} \Psi(i,\theta_0) \cdot di$$

2. Energia i coenergia en un sistema magnètic lineal

En un sistema lineal (des del punt de vista magnètic), les inductàncies no depenen del corrent (densitat de camp) en no considerar-se la saturació, $L(i,\theta) = L(\theta)$ i les dues variables d'estat, energia i coenergia, coincideixen.

$$W'_{\mathrm{mg}}(i,\theta) = W_{\mathrm{mg}}(\Psi,\theta)$$



Al ser el sistema magnètic lineal

$$W'_{\mathrm{mg}}(i_0,\theta_0) = \int_0^{i_0} \Psi(i,\theta_0)\cdot di = \int_0^{i_0} L(\theta)\cdot i\cdot di = \frac{1}{2}L(\theta)\cdot i_0^2$$

$$\Psi = \frac{\partial W'_{\mathrm{mg}}(i,\theta)}{\partial i} = L(\theta)\cdot i\,; \quad \Gamma = \frac{\partial W'_{\mathrm{mg}}(i,\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2}i^2\frac{d}{d\theta}L(\theta)$$

El mateix resultat s'ha d'obtenir emprant l'energia:

$$W_{\mathrm{mg}}(\Psi_0,\theta_0) = \int_0^{\Psi_0} i(\Psi,\theta)\cdot d\Psi = \int_0^{\Psi_0} \frac{\Psi(i,\theta)}{L(\theta)}\cdot d\Psi = \frac{1}{2\cdot L(\theta)}\Psi_0^2 = \frac{1}{2}L(\theta)\cdot i_0^2$$

$$i = \frac{\partial W_{\mathrm{mg}}(\Psi,\theta)}{\partial \Psi} = \frac{\Psi(i,\theta)}{L(\theta)}\;; \quad \Gamma = -\frac{\partial W_{\mathrm{mg}}(\Psi,\theta)}{\partial \theta} = \frac{\Psi^2}{2\cdot L^2(\theta)}\frac{d}{d\theta}L(\theta) = \frac{1}{2}i^2\frac{d}{d\theta}L(\theta)$$

Per a que el sistema desenvolupi parell cal que l'energia (o la coenergia) depengui de la posició, que en un sistema lineal equival a que la inductància depengui de la posició.

3. Generalització de les expressions de tensions i parells a un sistema d'*N* excitacions elèctriques i una mecànica

En un sistema d'*N* excitacions (debanats) podem definir el vector corrent, el vector tensió i el vector flux concatenat que agrupen a tots els corrents i tensions dels *N* debanats:

$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \dots \\ i_N \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_N \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \dots \\ \Psi_N \end{bmatrix}$$

De forma anàloga als apartats anteriors, l'energia emmagatzemada en els camps magnètics és variable d'estat, en el sentit que no depèn de les trajectòries del sistema ni del temps, sinó exclusivament de l'estat final.

$$W_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}_0, \theta_0) = \int_{(0,\theta_{00})}^{(\boldsymbol{\Psi_0},\theta_0)} dW_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi_0}, \theta_0)$$

El balanç energètic en un instant diferencial de temps imposa

$$dW_{\mathrm{el}} = dW_{\mathrm{mg}} + dW_{\mathrm{mc}}$$

En cas de moviment lineal es té $dW_{\mathrm{mc}} = F \cdot dx$ (força i desplaçament), mentre que en cas de moviment rotatiu es té $dW_{\mathrm{mc}} = \Gamma \cdot d\theta$ (parell i desplaçament angular). L'energia elèctrica absorbida és la suma del producte respectiu de les tensions i corrents de cada debanat:

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \cdot i_k \cdot dt = dW_{\mathrm{mg}} + \Gamma \cdot d\theta$$

Com les tensions induïdes en els debanats són la variació del flux concatenat en el temps

$$\boldsymbol{u} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Psi}$$

el balanç es pot reescriure com

$$dW_{\mathrm{mg}} = \sum_{k=1}^{N} i_k \cdot \frac{d}{dt}\Psi_k \cdot dt - \Gamma \cdot d\theta = \sum_{k=1}^{N} i_k \cdot d\Psi_k - \Gamma \cdot d\theta$$

D'altra banda, l'expressió del diferencial de l'energia és

$$dW_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}, \theta) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial W_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}, \theta)}{\partial \Psi_k} d\Psi_k + \frac{\partial W_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}, \theta)}{\partial \theta} d\theta$$

Cosa que permet identificar els següents termes

$$i_k(\boldsymbol{\Psi}, \theta) = \frac{\partial W_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}, \theta)}{\partial \Psi_k} \quad \Gamma(\Psi, \theta) = -\frac{\partial W_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}, \theta)}{\partial \theta}$$

Per tal de determinar l'energia en el camp magnètic cal integrar el diferencial des de l'estat inicial (repòs o corrents nuls en qualsevol posició) fins a l'estat final (corrents finals i posició final).

$$W_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}_0, \theta_0) = \int_{(\boldsymbol{0},\theta_{00})}^{(\boldsymbol{\Psi}_0,\theta_0)} dW_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}, \theta_0)$$

Com és una variable d'estat el resultat és independent del camí d'integració. S'escull com a camí la suma de trajectòries

$$
\begin{gathered}
c_0 : (0, 0, 0, \ldots . , 0, \theta_{00}) \rightarrow (0, 0, 0, \ldots . , 0, \theta_0) \\
c_1 : (0, 0, 0, \ldots . , 0, \theta_0) \rightarrow (\Psi_1, 0, 0, \ldots . , 0, \theta_0) \\
c_2 : (\Psi_1, 0, 0, \ldots . , 0, \theta_0) \rightarrow (\Psi_1, \Psi_2, 0, \ldots . , 0, \theta_0) \\
c_3 : (\Psi_1, \Psi_2, 0, \ldots . , 0, \theta_0) \rightarrow (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots . , 0, \theta_0) \\
\ldots . . \\
c_N : (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots . , 0, \theta_0) \rightarrow (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots . , \Psi_N, \theta_0)
\end{gathered}
$$

$$
W_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}_0, \theta_0) = \sum_{k=0}^{N} \int_{\mathrm{c}_k} dW_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}, \theta) = \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathrm{c}_k} dW_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}, \theta)
$$

Atès que en el camí c_0 no hi ha flux i, per tant, la integral és nul·la, el primer terme de la suma desapareix. En la resta de termes de la suma la posició és fixa i, per tant, quan es substitueix el valor

$$
dW_{\mathrm{mg}} = \sum_{k=1}^{N} i_k \cdot d\Psi_k - \Gamma \cdot d\theta
$$

el terme mecànic (parell i posició) desapareix en no haver-hi canvi de posició:

$$
W_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}_0, \theta_0) = \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathrm{c}_k} dW_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}, \theta) = \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathrm{c}_k} \sum_{k=1}^{N} i_k \cdot d\Psi_k
$$

Les relacions entre els fluxos concatenats i els corrents depenen de la posició i dels corrents (o densitats de camp, és a dir, del nivell de saturació):

$$
\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{i}, \theta) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{i}, \theta) \cdot \boldsymbol{i}
$$

On la matriu d'inductàncies $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{i}, \theta)$, que descriu la característica de magnetització del sistema és per naturalesa simètrica $\left(L_{ij}(\boldsymbol{i}, \theta) = L_{ji}(\boldsymbol{i}, \theta)\right)$ i definida positiva.

$$
\boldsymbol{L}(\boldsymbol{i}, \theta) = \begin{bmatrix}
L_{11}(\boldsymbol{i}, \theta) & L_{12}(\boldsymbol{i}, \theta) & L_{13}(\boldsymbol{i}, \theta) & \ldots & L_{1N}(\boldsymbol{i}, \theta) \\
L_{21}(\boldsymbol{i}, \theta) & L_{22}(\boldsymbol{i}, \theta) & L_{23}(\boldsymbol{i}, \theta) & \ldots & L_{2N}(\boldsymbol{i}, \theta) \\
L_{31}(\boldsymbol{i}, \theta) & L_{32}(\boldsymbol{i}, \theta) & L_{33}(\boldsymbol{i}, \theta) & \ldots & L_{3N}(\boldsymbol{i}, \theta) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
L_{N1}(\boldsymbol{i}, \theta) & L_{N2}(\boldsymbol{i}, \theta) & L_{N3}(\boldsymbol{i}, \theta) & \ldots & L_{NN}(\boldsymbol{i}, \theta)
\end{bmatrix}
$$

Resolent les integrals i les sumes per als camins seleccionats, i sabent que

$$
\boldsymbol{i} = \boldsymbol{L}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{i}, \theta) \cdot \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{i}, \theta)
$$

l'expressió de l'energia és

$$
W_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}_0, \theta_0) = \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathrm{c}_k} dW_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}, \theta) = \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathrm{c}_k} \sum_{k=1}^{N} i_k \cdot d\Psi_k = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Psi}_0^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{L}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{i}, \theta) \cdot \boldsymbol{\Psi}_0
$$

La funció coenergia es defineix com

$$W'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i},\theta) = \sum_{k=1}^{N} i_k \cdot \Psi_k - W_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi},\theta)$$

$$dW'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i},\theta) = \sum_{k=1}^{N}(i_k \cdot d\Psi_k + \Psi_k \cdot di_k) - \sum_{k=1}^{N} i_k \cdot d\Psi_k + \Gamma \cdot d\theta = \sum_{k=1}^{N} \Psi_k \cdot di_k + \Gamma \cdot d\theta$$

$$dW'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i},\theta) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial W'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i},\theta)}{\partial i_k} di_k + \frac{\partial W'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i},\theta)}{\partial \theta} d\theta$$

Identificant els termes

$$\Psi_k(\boldsymbol{i},\theta) = \frac{\partial W'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i},\theta)}{\partial i_k} \quad \Gamma(\boldsymbol{i},\theta) = \frac{\partial W'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i},\theta)}{\partial \theta}$$

Per tal de determinar el valor de la coenergia es procedeix a la integració

$$W'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i}_0,\theta_0) = \int_{(\mathbf{0},\theta_{00})}^{(\boldsymbol{i}_\mathbf{0},\theta_0)} dW'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i},\theta_0)$$

Com és una variable d'estat el resultat és independent del camí d'integració. S'escull com a camí la suma de trajectòries

$$\begin{gathered}
c_0\colon (0,0,0,\dots.,0,\theta_{00}) \rightarrow (0,0,0,\dots.,0,\theta_0) \\
c_1\colon (0,0,0,\dots.,0,\theta_0) \rightarrow (i_1,0,0,\dots.,0,\theta_0) \\
c_2\colon (i_1,0,0,\dots.,0,\theta_0) \rightarrow (i_1,i_2,0,\dots.,0,\theta_0) \\
c_3\colon (i_1,i_2,0,\dots.,0,\theta_0) \rightarrow (i_1,i_2,i_3,\dots.,0,\theta_0) \\
\dots.. \\
c_N\colon (i_1,i_2,i_3,\dots.,0,\theta_0) \rightarrow (i_1,i_2,i_3,\dots.,i_N,\theta_0)
\end{gathered}$$

$$W'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i}_0,\theta_0) = \sum_{k=0}^{N} \int_{\mathrm{c}_k} dW'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i},\theta) = \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathrm{c}_k} dW'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i},\theta)$$

Atès que en el camí c_0 no hi ha corrent i, per tant, la integral es nul·la, el primer terme de la suma desapareix. En la resta de termes de la suma la posició és fixa i, per tant, quan es substitueix el valor

$$\sum_{k=1}^{N} \Psi_k \cdot di_k + \Gamma \cdot d\theta$$

el terme mecànic (parell i posició) desapareix

$$W'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i}_0,\theta_0) = \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathrm{c}_k} dW'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i},\theta) = \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathrm{c}_k} \sum_{k=1}^{N} \Psi_k \cdot di_k = \frac{1}{2} \boldsymbol{i}_\mathbf{0}^{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{L}(\boldsymbol{i},\theta) \cdot \boldsymbol{i}_\mathbf{0}$$

Si el sistema magnètic és lineal $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{i},\theta) = \boldsymbol{L}(\theta)$ queda

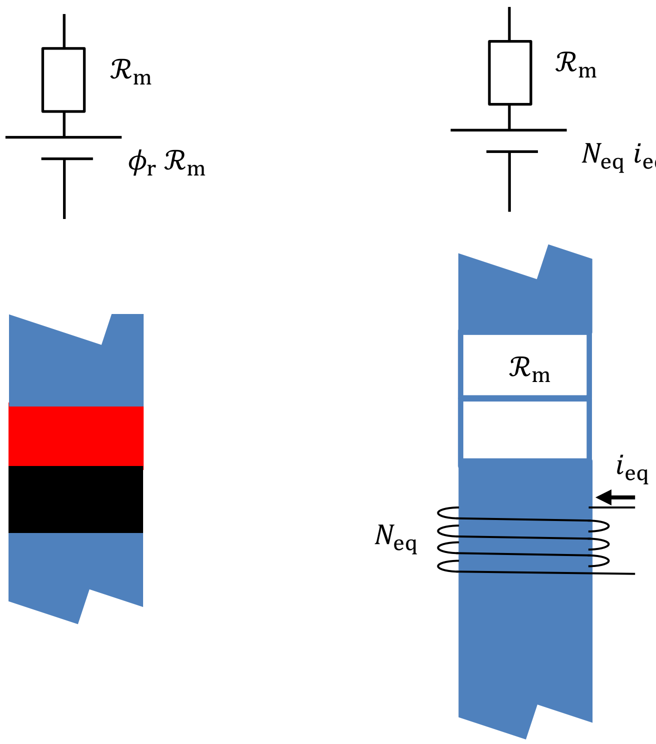
$$W'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i}_0,\theta_0) = W_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}_0,\theta_0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{i}_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{L}(\theta)\cdot \boldsymbol{i}_{\mathbf{0}}$$

$$\Gamma = \frac{\partial W'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i},\theta)}{\partial\theta} = -\frac{\partial W_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi},\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{2}\boldsymbol{i}^{\boldsymbol{t}}\cdot\frac{d}{d\theta}\boldsymbol{L}(\theta)\cdot\boldsymbol{i}$$

4. Extensió de les expressions generals de forces i parells en presencia d'imants permanents

Es pot utilitzar la mateixa metodologia dels debanats acoblats (inductàncies acoblades) en els casos en que intervenen imants permanents. L'única consideració que cal fer és trobar els debanats equivalents als imants, així com els termes d'acoblament entre els propis imants (cas d'haver-n'hi més d'un) i els debanats. No es considera la fase d'imantació dels imants, ni les possibles des-magnetitzacions irreversibles per la no linealitat de la corba de romanència. A efectes pràctics, consideris que els imants són tipus Neodimi, magnetitzats en fases prèvies i de característica absolutament lineal, pel que les possibles variacions de la recta de càrrega no tenen efectes irreversibles.

En la modelització dels circuits magnètics s'ha establert que un imant, dins d'un circuit magnètic, es pot modelar per una font de tensió magnètica de valor $\phi_{\mathrm{r}}\,\mathcal{R}_{\mathrm{m}}$ en sèrie amb una reluctància $\mathcal{R}_{\mathrm{m}}$. Per tal de mantenir la mateixa estructura de la definició i demostracions realitzades sobre la coenergia, i aprofitar els resultats obtinguts per als debanats acoblats, és convenient expressar la tensió magnètica (força magnetomotriu) com la d'un debanat equivalent, de N_{eq} voltes recorregut per un corrent equivalent i_{eq}.



On per a cada imant present en el circuit ($\mu_{\mathrm{rm}} \cong 1$)

$$\mathcal{R}_{\mathrm{m}} = \frac{l_{\mathrm{m}}}{\mu_0\, \mu_{\mathrm{rm}}\, A_{\mathrm{m}}}$$

$$\phi_{\mathrm{r}} = B_{\mathrm{r}} \cdot A_{\mathrm{m}}$$

$$i_{\mathrm{eq}} = \frac{\phi_{\mathrm{r}}\, \mathcal{R}_{\mathrm{m}}}{N_{\mathrm{eq}}} = \frac{B_{\mathrm{r}}\, l_{\mathrm{m}}}{N_{\mathrm{eq}}\, \mu_0\, \mu_{\mathrm{rm}}}$$

Una vegada tots els imants N_{m} han estat modelitzats com a debanats, el conjunt del sistema resta format pels equivalents més els N_{d} debanats reals. Aplicant les metodologies de modelització habituals (debanats acoblats), es determina la matriu d'inductàncies (acoblaments). Es convenient separar els debanats reals dels equivalents, pel que es mantindran separats els fluxos concatenats per uns i per altres:

$$\begin{bmatrix} \psi_{\mathrm{d}}\ (N_{\mathrm{d}} \times 1) \\ \psi_{\mathrm{m}}\ (N_{\mathrm{m}} \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\mathrm{dd}}\ (N_{\mathrm{d}} \times N_{\mathrm{d}}) & L_{\mathrm{dm}}\ (N_{\mathrm{d}} \times N_{\mathrm{m}}) \\ L_{\mathrm{md}}\ (N_{\mathrm{m}} \times N_{\mathrm{d}}) & L_{\mathrm{mm}}\ (N_{\mathrm{m}} \times N_{\mathrm{m}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\mathrm{d}}\ (N_{\mathrm{d}} \times 1) \\ i_{\mathrm{eq}}\ (N_{\mathrm{m}} \times 1) \end{bmatrix}$$

On per definició (construcció)

$$L_{\mathrm{dm}} = L_{\mathrm{md}}^{\mathrm{t}}$$

La coenergia passa a valer

$$W'_{\mathrm{mg}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_{\mathrm{d}}^{\mathrm{t}} & i_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{\mathrm{dd}} & L_{\mathrm{dm}} \\ L_{\mathrm{md}} & L_{\mathrm{mm}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\mathrm{d}} \\ i_{\mathrm{eq}} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(i_{\mathrm{d}}^{\mathrm{t}}\, L_{\mathrm{dd}}\, i_{\mathrm{d}} + i_{\mathrm{d}}^{\mathrm{t}}\, L_{\mathrm{dm}}\, i_{\mathrm{eq}} + i_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{t}}\, L_{\mathrm{md}}\, i_{\mathrm{d}} + i_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{t}}\, L_{\mathrm{mm}}\, i_{\mathrm{eq}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(i_{\mathrm{d}}^{\mathrm{t}}\, L_{\mathrm{dd}}\, i_{\mathrm{d}} + i_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{t}}\, L_{\mathrm{mm}}\, i_{\mathrm{eq}} \right) + i_{\mathrm{d}}^{\mathrm{t}}\, L_{\mathrm{dm}}\, i_{\mathrm{eq}}$$

Anomenant $\psi_{\mathrm{dm}} = L_{\mathrm{dm}}\, i_{\mathrm{eq}}$ al flux concatenat pels debanats reals degut als imants

$$W'_{\mathrm{mg}} = \frac{1}{2}\, i_{\mathrm{d}}^{\mathrm{t}}\, L_{\mathrm{dd}}\, i_{\mathrm{d}} + \frac{1}{2}\, i_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{t}}\, L_{\mathrm{mm}}\, i_{\mathrm{eq}} + i_{\mathrm{d}}^{\mathrm{t}}\, \psi_{\mathrm{dm}}$$

El parell (força) es pot deduir com en el cas de debanats acoblats

$$\Gamma = \frac{\partial W'_{\mathrm{mg}}}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\, i_{\mathrm{d}}^{\mathrm{t}}\, \frac{\partial}{\partial \theta}(L_{\mathrm{dd}})\, i_{\mathrm{d}} + \frac{1}{2}\, i_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{t}}\, \frac{\partial}{\partial \theta}(L_{\mathrm{mm}})\, i_{\mathrm{eq}} + i_{\mathrm{d}}^{\mathrm{t}}\, \frac{\partial}{\partial \theta}(\psi_{\mathrm{dm}})$$

Els tres termes són de fàcil interpretació:

- Parell corresponent a la interacció entre els corrents dels debanats:

$$\frac{1}{2}\, i_{\mathrm{d}}^{\mathrm{t}}\, \frac{\partial}{\partial \theta}(L_{\mathrm{dd}})\, i_{\mathrm{d}}$$

  És el mecanisme més freqüent de generació de parell

- Parell corresponent a la variació de reluctància (interacció entre els imants):

$$\frac{1}{2}\, i_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{t}}\, \frac{\partial}{\partial \theta}(L_{\mathrm{mm}})\, i_{\mathrm{eq}}$$

És el mecanisme menys freqüent. Per tal que el terme sigui no nul les reluctàncies que descriuen l'acoblament entre els imants han de ser variables amb la posició, és a dir, la recta de càrrega dels imants ha de variar amb la posició. Com a mètode de generació de parell continu o, si més no, cíclic, no fora viable amb els imants que no disposin d'una corba de romanència recta (Neodimi). En cas de qualsevol altra corba es requeriria una re-magnetització dels imants, amb un cost energètic que impedeix l'ús com a màquina elèctrica. Fins i tot amb el cas del Neodimi no és interessant per les pèrdues d'histèresi associades a la variació del punt de treball. Aquest mecanisme de generació de parell només és útil per a explicar (calcular) sistemes basats amb imants amb moviments discrets.

- Parell corresponent a la interacció entre els fluxos dels imants i els corrents dels debanats:

$$i_{\mathrm{d}}^{\mathrm{t}} \frac{\partial}{\partial \theta}(\psi_{\mathrm{dm}})$$

És el mecanisme típic de màquines com la Brushless, on la constància de la recta de càrrega dels imants fa que el terme de variació de reluctància dels imants sigui nul. Però la posició variable del rotor dona lloc a una variació del flux concatenat pels debanats degut als imants.