Màquines Elèctriques

Màquina de Continua

Curs 2016-2017

Joan Rull

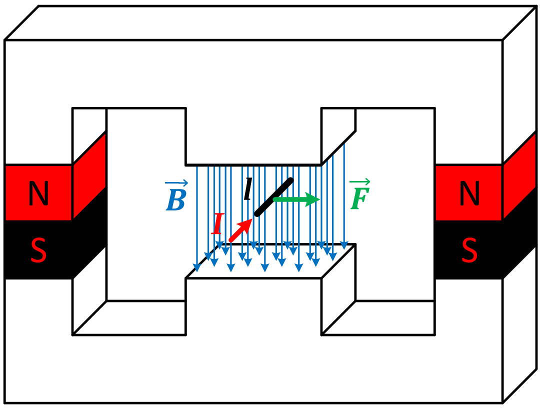
Samuel Galceran

DEE-UPC

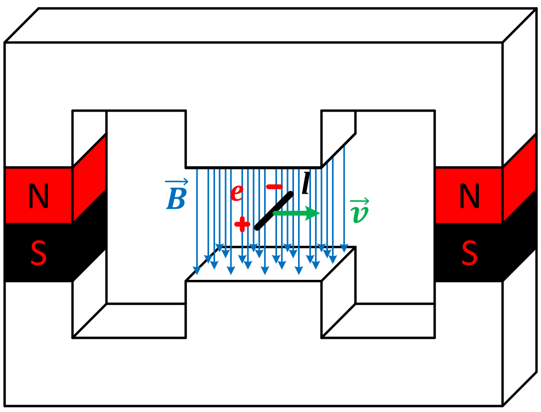
1. Introducció i principis bàsics de funcionament

La màquina de corrent continua, igual que la resta de convertidors electromecànics d'energia, és reversible; és a dir, pot funcionar com a motor i com a generador. El funcionament com a generador requereix l'aportació d'energia mecànica per l'eix del rotor i el funcionament com a generador requereix l'aportació d'energia elèctrica al circuit del rotor. En tots dos casos, però, es necessària l'existència d'un camp magnètic per al funcionament de la màquina de continua.

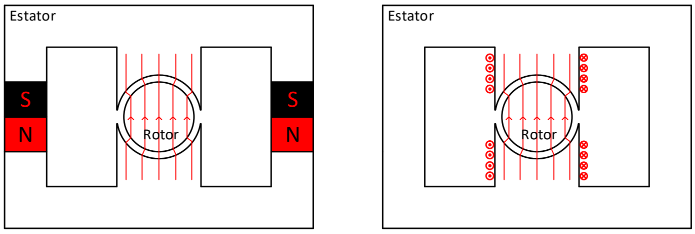
La generació de parell (força) es basa en la força de Lorentz: Una partícula carregada que es mou dins un camp magnètic B experimenta una força. En el cas de la màquina de continua, les partícules carregades són els electrons (corrent elèctric I) que circulen per conductors de longitud l. L'efecte suma de totes les forces que experimenten els electrons és l'aparició d'una força F que actua sobre el conductor.



La tensió induïda apareix gràcies a la coneguda llei d'inducció de Faraday: Un conductor de longitud l que es mou a velocitat v en el sí d'un camp magnètic B veu aparèixer una tensió e entre els seus extrems.

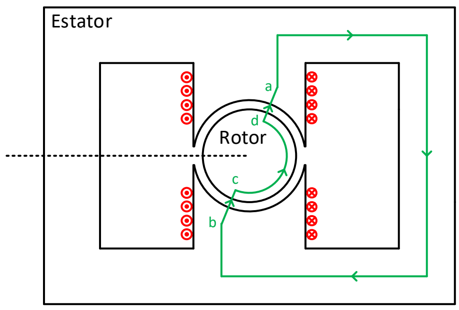


Per tal de dotar d'estructura de suport on subjectar els conductors i per tal de minimitzar la força magnetomotriu necessària per establir el camp magnètic es construeix el rotor amb material ferromagnètic, es disminueix l'entreferro i es dota al sistema de geometria cilíndrica. El camp magnètic necessari es pot establir tant amb imants permanents com amb un debanat (electroimant).

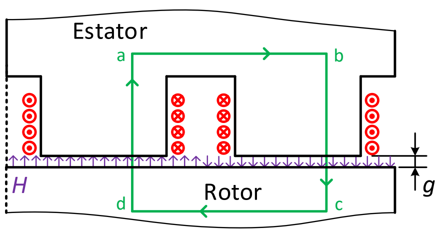


Les hipòtesis de partida per a l'anàlisi del circuit magnètic són: geometria cilíndrica, entreferro constant, ranures i dents sense efecte, permeabilitat del ferro infinita i flux radial a l'entreferro.

La densitat de camp a l'entreferro es pot calcular a partir de la llei d'Ampère. A la figura es representa la corba d'integració que engloba els conductors que tenen el corrent en un únic sentit en una màquina de geometria cilíndrica.



És habitual, però, per tal de fer més fàcil la comprensió i els dibuixos, realitzar un desenvolupament lineal de la màquina, és a dir, com si es fes un tall per la línia de punts i s'estirés la màquina fins a deixar-la rectilínia (angle recorregut es transforma en distància lineal a l'eix de les abscisses).

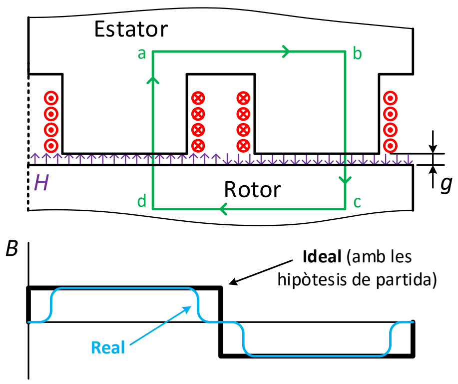


La llei d'Ampère queda, doncs,

$$\oint_\gamma \vec{H}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_a^b \vec{H}\cdot d\vec{l}}_{Nul} + \int_b^c \vec{H}\cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_c^d \vec{H}\cdot d\vec{l}}_{Nul} + \int_d^a \vec{H}\cdot d\vec{l} = N\,i$$

$$H\cdot g + H\cdot g = N\,i \quad \rightarrow \quad H = \frac{N\,i}{2\,g}$$

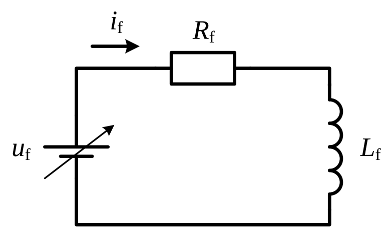
$$B = \mu_0\, H = \frac{\mu_0\, N\, i}{2\, g}$$



2. Estator

Tal com s'ha vist, la missió de l'estator de la màquina de continua és crear el camp magnètic necessari per al funcionament de la màquina. A l'estator de la màquina també se l'anomena excitació, per la funció de crear el camp.

Per tal d'establir el flux magnètic a l'entreferro existeixen dues possibilitats, a saber, imants permanents i debanats (electroimants). En el cas de crear el camp mitjançant imants permanents tenim una màquina de continua amb flux constant. A més, no hi ha circuit elèctric a l'estator. Si, en canvi, el camp es crea mitjançant un debanat, es té la possibilitat de poder variar el flux variant la tensió d'alimentació del circuit. Òbviament, si la tensió d'alimentació de l'excitació és constant, llavors el flux creat també ho serà. El circuit elèctric que respon a l'excitació es representa tot seguit. El subíndex *f* respon a *field*, habitual en la bibliografia anglesa i indicador de paràmetres relacionats amb l'excitació de la màquina.



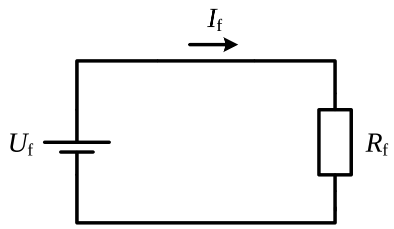
L'equació que regeix el circuit elèctric és:

$$u_f = R_f\, i_f + L_f\, \frac{di_f}{dt}$$

El flux que s'estableix a la màquina és:

$\phi_f = k_f\, i_f$ on k_f és funció de la geometria de la màquina i dels materials.

Quan s'arriba a règim estacionari, el circuit de l'excitació encara esdevé més senzill:



L'equació que regeix el circuit elèctric és:

$$U_{\mathrm{f}} = R_{\mathrm{f}}\, I_{\mathrm{f}}$$

El flux que s'estableix a la màquina és:

$$\Phi_{\mathrm{f}} = k_{\mathrm{f}}\, I_{\mathrm{f}}$$

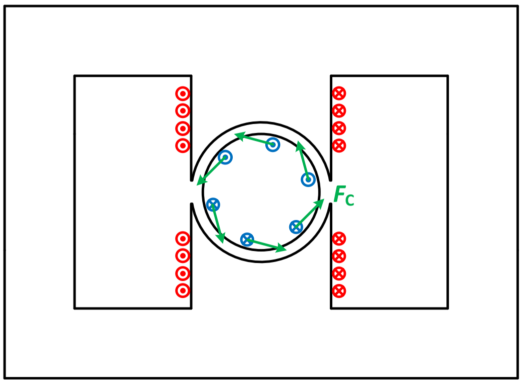
3. Rotor

El rotor també s'anomena induït. El subíndex *a* respon a *armature*, habitual en la bibliografia anglesa i indicador de paràmetres relacionats amb l'induït de la màquina.

La força F_{C} exercida sobre un conductor (força de Lorentz) de longitud l que es troba dins un camp magnètic B_{f} i el recorre un corrent i té l'expressió següent:

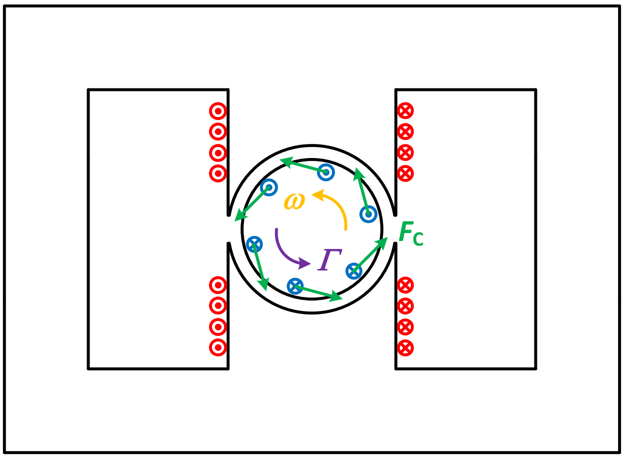
$$F_{\mathrm{C}} = i\,(l \times B_{\mathrm{f}})$$

El conductor (rectilini) recorregut per un corrent, el camp magnètic i la força són ortogonals. Per tal que la força tingui sempre el mateix sentit, és necessari que tant el camp magnètic com el corrent tinguin el mateix sentit, és a dir, si el camp magnètic canvia de signe, llavors el corrent també s'ha de canviar de signe.

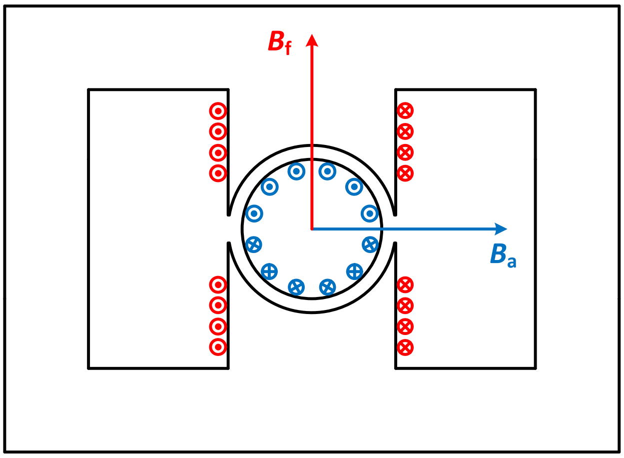


Tots els conductors que es troben sota els efectes d'un pol magnètic els ha de recórrer una intensitat de corrent del mateix sentit; i tots els conductors que es troben sota els efectes de l'altre pol magnètic els ha de recórrer una intensitat de corrent en sentit contrari. D'aquesta manera s'aconsegueix crear un parell no nul i com a conseqüència, el rotor girarà. L'expressió del parell total serà, doncs, $\Gamma = \sum r \times F_{\mathrm{C}}$; on r és el radi del rotor, distància del centre del rotor als conductors. Atès que per simetria hi ha el mateix número de conductors front els dos pols magnètics es pot suposar un nombre d'espires N_{a} i, per tant, el número de conductors actius és $2 \cdot N_{\mathrm{a}}$ ja que cada espira té un conductor que hi circula corrent en un sentit i un altre conductor en que hi circula un corrent en sentit contrari.

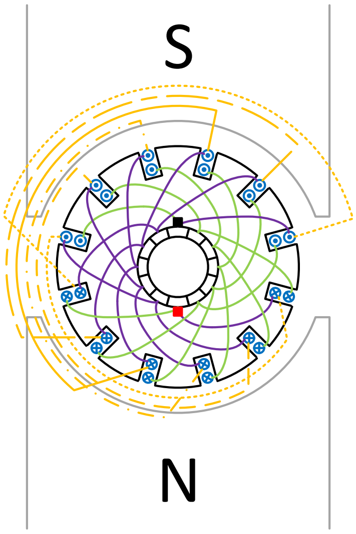
Ara bé, conforme el rotor va girant, els conductors que estan finalitzant el recorregut front d'un dels pols arriben a l'altre pol i, per tant, el sentit del corrent s'ha de canviar. Això s'aconsegueix mitjançant la commutació i s'aconsegueix fer de manera mecànica gràcies a les escombretes i al col·lector de delgues.



Per tant, en una màquina de continua es pot dir que tant els corrents de l'estator com els del rotor estan en una posició estacionària i com a conseqüència també ho estan els respectius camps magnètics. En realitat el camp del rotor oscil·la una mica i es diu que és un camp quasi estacionari. Mentre no hi ha commutació de delgues el camp varia de posició (un petit angle) i quan es commuta de delga torna a la posició inicial. Contra més ranures, més conductors i més delgues hi hagi, més petita serà la variació d'angle i més estacionari serà el camp del rotor.



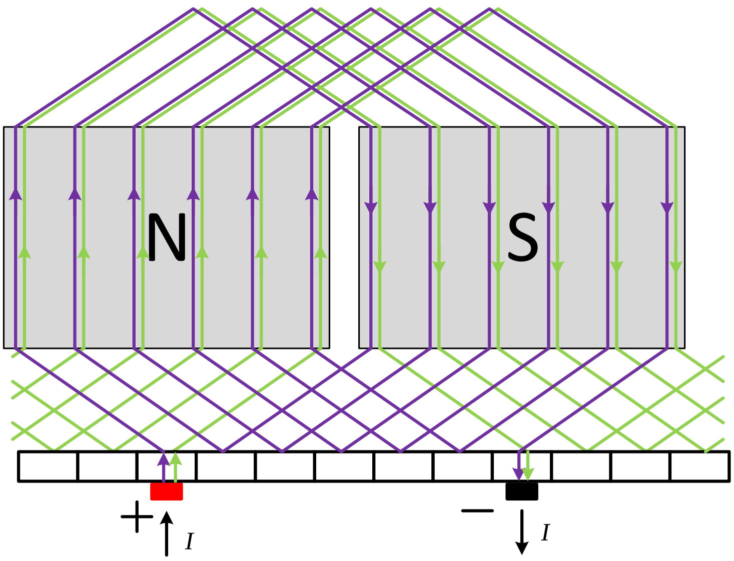
Tot seguit es representa el dibuix esquemàtic d'un rotor. Els petits quadrats vermell (+) i negre (-) representen les escombretes, fixes, per on s'alimenta el circuit del rotor.



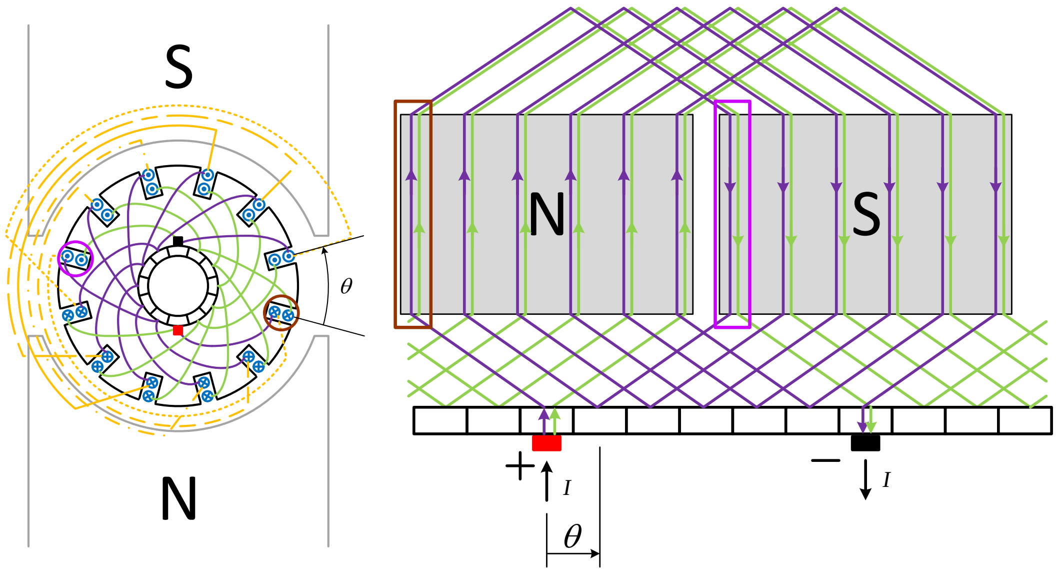
El corrent entra per l'escombreta vermella i surt (després de recórrer les espires) per la negra. Com es pot observar, en aquest exemple, hi ha dues capes de conductors corresponents a dos camins possibles $n_c = 2$; quan el corrent I passa de l'escombreta vermella a la delga (mòbil) que hi està en contacte, es divideix en dues parts iguals (per simetria) i el corrent flueix tant pel conductor representat amb color lila com pel conductor representat amb color verd. Ambdós conductors recorren la longitud del rotor (perpendicular al pla del dibuix) i en groc s'ha representat el camí que segueixen a l'altre extrem del motor i s'indica per quina ranura tornen. Cal dir, però, que el que aquí (per simplicitat) s'ha representat com un únic conductor, a la realitat pot ser un feix de conductors que conformen un debanat, és a dir, que enlloc d'un conductor gruixut per capa pot haver-hi força conductors prims que tenen les espires en les mateixes ranures.

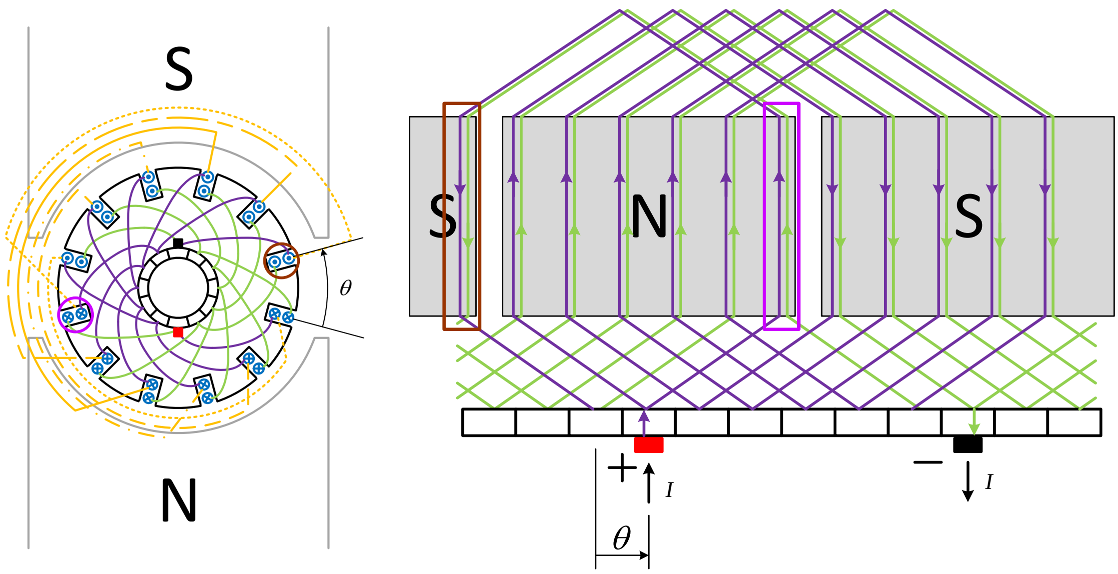
Com es pot veure, tots els conductors que es troben front el pol magnètic superior tenen el corrent circulant amb el mateix sentit; i tots els conductors que es troben front el pol magnètic inferior (canvi de polaritat del camp magnètic) tenen el corrent circulant en sentit contrari i, per tant, el parell creat en tots els conductors va en el mateix sentit.

Una altra manera de veure-ho, potser més entenedora, és amb el desenvolupament lineal del rotor, és a dir, com si el talléssim per un lloc i el despleguéssim de manera que l'angle recorregut es transformi amb distància lineal.



Per tal de comprendre millor el funcionament tot seguit es representen dues posicions del rotor fent èmfasi amb els conductors que commuten, és a dir, els conductors en que el corrent canvia de signe:





Per tant, gràcies a la commutació mecànica realitzada mitjançant les escombretes i el col·lector de delgues el corrent pels conductors és l'adequat, és a dir, per tots els conductors que estan front un pol magnètic hi circula un corrent en el mateix sentit. A més, pels conductors que estan front l'altre pol magnètic hi circula el mateix corrent en sentit contrari. Això permet la creació de parell. Si i_{a} és el corrent per l'induït, llavors

El corrent per una espira (un conductor, un camí), atesa la simetria, és $i_{\mathrm{C}} = \frac{i_{\mathrm{a}}}{n_{\mathrm{c}}}$

Per tant, la força generada per cada conductor és $F_{\mathrm{C}} = B_{\mathrm{f}}\, l\, i_{\mathrm{C}} = B_{\mathrm{f}}\, l\, \frac{i_{\mathrm{a}}}{n_{\mathrm{c}}}$

Si D és el diàmetre, el parell de cada conductor és $\Gamma_\mathrm{C} = B_\mathrm{f}\, l\, \frac{i_\mathrm{a}}{n_\mathrm{c}}\, \frac{D}{2}$

I, per tant, el parell electromecànic total és $\Gamma = 2\, N_\mathrm{a}\, B_\mathrm{f}\, l\, \frac{i_\mathrm{a}}{n_\mathrm{c}}\, \frac{D}{2}$

Recordant que el flux per pol és la densitat de flux per l'àrea (corresponent a un pol) $\phi_\mathrm{f} = B_\mathrm{f}\, l\, \pi\, \frac{D}{2}$, llavors el parell electromecànic es pot expressar com:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{2\, N_\mathrm{a}}{\pi\, n_\mathrm{c}}\, \phi_\mathrm{f}\, i_\mathrm{a} = \boldsymbol{k}\, \boldsymbol{\phi}_\mathbf{f}\, \boldsymbol{i}_\mathbf{a}$$

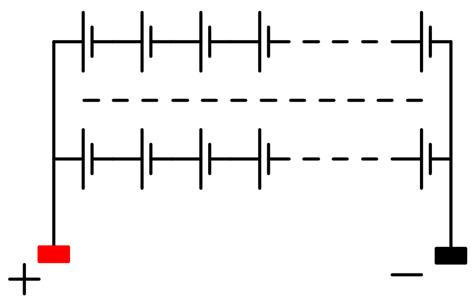
Si, enlloc d'alimentar el motor (induït) amb un corrent i_a el que es fa és girar l'eix de la màquina (generador), llavors la tensió induïda es troba fàcilment seguint la següent metodologia:

La tensió induïda e_C en un conductor de longitud l que es troba dins un camp magnètic B_f i es mou a una velocitat v té l'expressió següent:

$$e_\mathrm{C} = (v \times B_\mathrm{f})\, l = B_\mathrm{f}\, l\, v = B_\mathrm{f}\, l\, \omega\, r = B_\mathrm{f}\, l\, \omega\, \frac{D}{2}$$

On ω és la velocitat angular del rotor.

A cada conductor s'indueix una petita tensió e_C, però en estar en sèrie, les tensions se sumen. Els diferents camins, però, no contribueixen a incrementar la tensió induïda total ja que estan connectats en paral·lel. Això es pot veure representat amb el següent esquema:



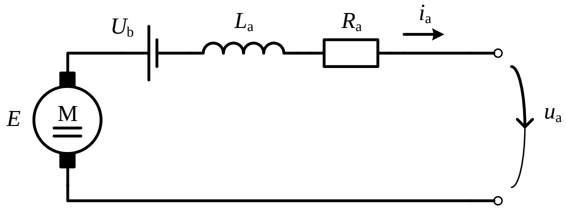
La tensió induïda total, entre escombretes, és doncs:

$$E = \frac{2\, N_\mathrm{a}}{n_\mathrm{c}}\, B_\mathrm{f}\, l\, \omega\, \frac{D}{2}$$

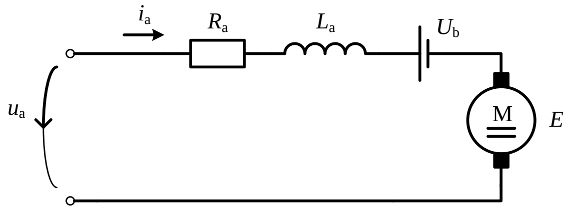
I, tenint en compte l'expressió del flux per pol, es pot reescriure com:

$$\boldsymbol{E} = \frac{2\, N_\mathrm{a}}{\pi\, n_\mathrm{c}}\, \phi_\mathrm{f}\, \omega = \boldsymbol{k}\, \boldsymbol{\phi}_\mathbf{f}\, \boldsymbol{\omega}$$

El circuit elèctric del rotor ha de tenir en compte la resistència dels conductors (inclou la de les escombretes), la caiguda de tensió en el contacte de les escombretes amb el col·lector de delgues (habitualment es modelitza com una caiguda de tensió constant) i la inductància. S'acostuma a dibuixar el circuit elèctric de manera que el flux de potència sigui d'esquerra a dreta, de manera que si es tracta d'un generador, el circuit elèctric del rotor de la màquina és:



Si es tracta d'un motor, llavors s'acostuma a dibuixar el següent circuit:



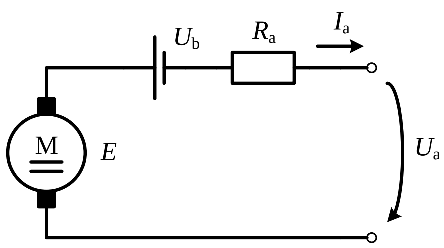
Com es pot veure, el corrent i_a i la tensió U_b canvien de sentit si es tracta d'un motor o d'un generador.

L'equació que descriu el circuit del rotor (induït) del motor de continua és, doncs,

$$u_\mathrm{a} = R_\mathrm{a}\, i_\mathrm{a} + U_\mathrm{b} + L_\mathrm{a}\,\frac{di_\mathrm{a}}{dt} + E$$

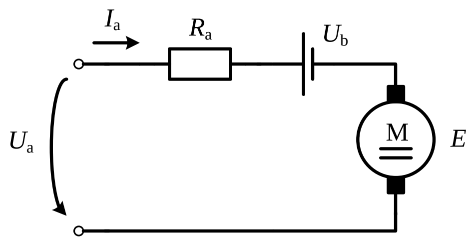
On R_a és la resistència del rotor més la de les escombretes, U_b és la caiguda de tensió a les escombretes i L_a és la inductància del debanat.

En règim estacionari de corrent continua, el circuit elèctric queda més simplificat:



Generador

$U_\mathrm{a} = E - R_\mathrm{a} I_\mathrm{a} - U_\mathrm{b}$



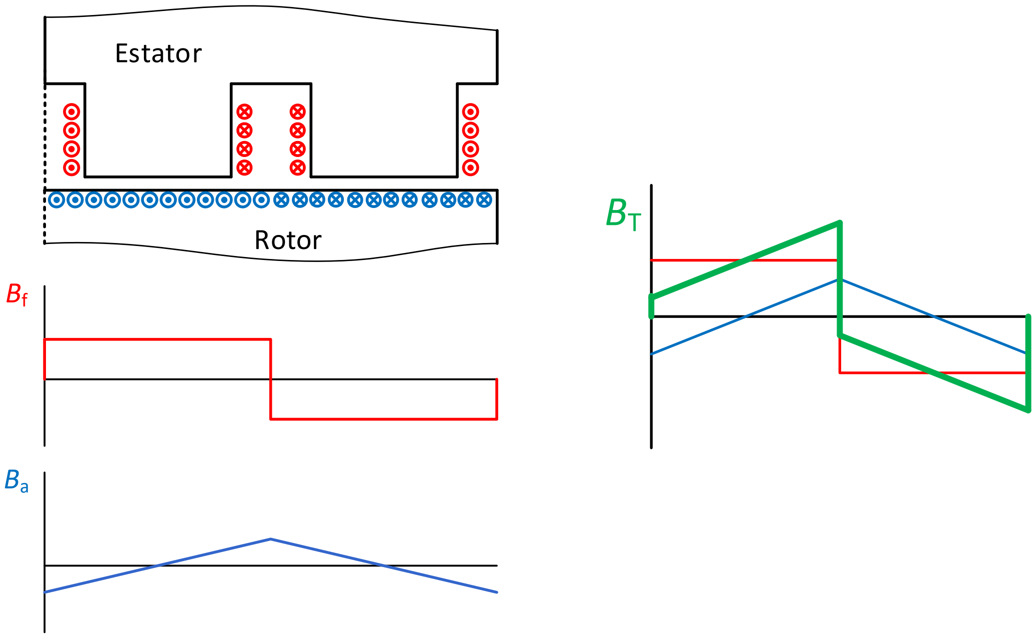
Motor

$U_\mathrm{a} = R_\mathrm{a} I_\mathrm{a} + U_\mathrm{b} + E$

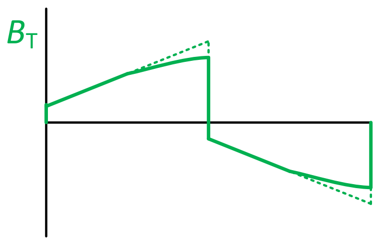
Cal dir, però, que moltes vegades la caiguda de tensió que representen les escombretes (de l'ordre d'1 V) es pot considerar negligible, especialment en màquines grans on la tensió es considerablement gran.

Reacció d'induït

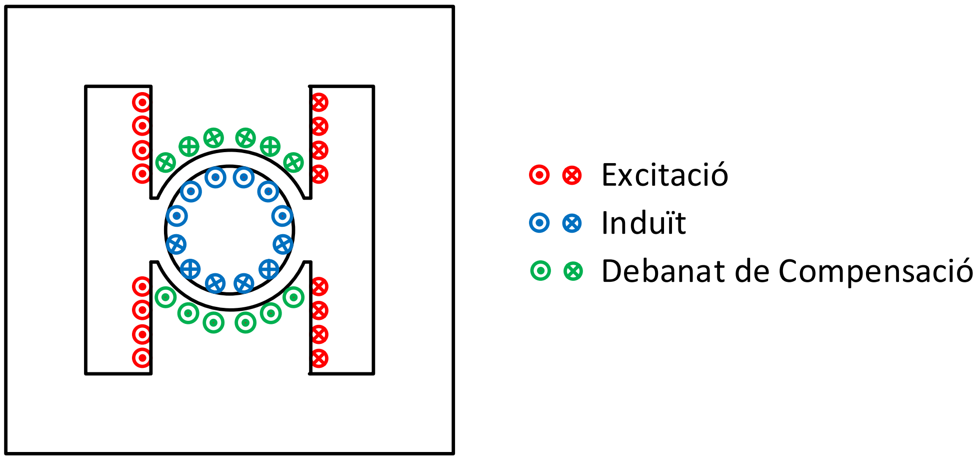
El camp magnètic de l'estator es necessari per al funcionament de la màquina. A més, per l'induït de la màquina hi circula un corrent i, degut a això, també s'establirà un camp magnètic que podem anomenar del rotor. També s'anomena reacció d'induït. Aquest camp magnètic del rotor augmenta (disminueix) conforme augmenten (disminueixen) els conductors, cosa que es pot veure aplicant la Llei d'Ampère a camins diferents abraçant més o menys conductors. A la figura s'ha representat tant el camp del rotor B_{a} com el de l'estator B_{f} i la suma dels dos B_{T} (camp a l'entreferro).



La reacció d'induït provoca que el camp magnètic disminueixi per un costat i augmenti per l'altre. Això, en principi, no hauria de tenir conseqüències ja que el valor mig roman invariable. Ara bé, com en la realitat el material ferromagnètic es fa treballar al límit de la saturació (no malbaratar material des del punt de vista econòmic, volum, pes, ...), en realitat la reacció d'induït provoca una disminució del camp a l'entreferro degut a que en el costat que hauria d'augmentar el camp no pot a causa de la saturació del ferro i, per tant, les característiques de la màquina no són les que es podrien esperar.



En màquines grans (disponibilitat d'espai) es pot eliminar l'efecte de la reacció d'induït amb els debanats anomenats de compensació. Per aquests debanats hi ha de circular, òbviament, el mateix corrent que circula per l'induït.

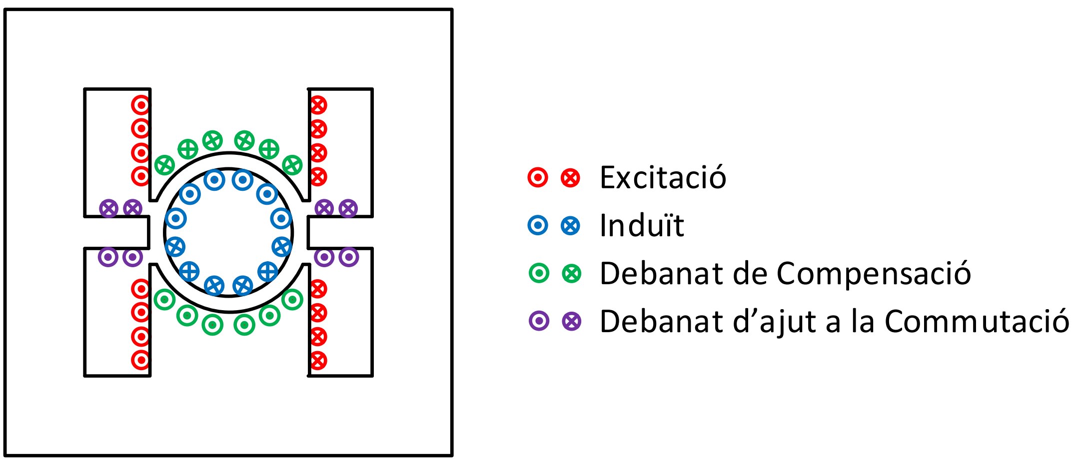


Problemes en la commutació

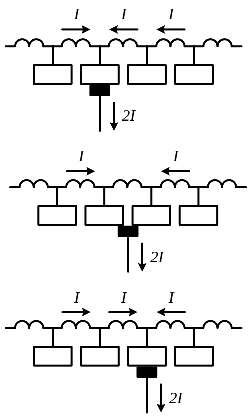
Les escombretes llisquen i freguen amb les delgues. El contacte de per sí difícil entre una part fixa (escombretes) i una part mòbil (col·lector de delgues) es veu afectat, a més, per les commutacions de corrent. Les bobines existents entre delgues consecutives veuen un corrent en un sentit per passar a anul·lar-se en el moment de la commutació (les escombretes curtcircuiten dues delgues consecutives) i, posteriorment, veure un corrent en sentit contrari de l'inicial.

El fenomen de la commutació produeix arcs elèctrics, raó per la qual les màquines de continua estan desaconsellades per treballar en atmosferes explosives o potencialment explosives. La tensió induïda per moviment i la reacció d'induït també col·laboren a la generació d'arcs elèctrics.

Els arcs elèctrics es poden reduir mitjançant l'augment de la resistència de les escombretes (augmentant, per tant, les pèrdues) o bé, en màquines grans (disponibilitat d'espai) mitjançant els anomenats pols de commutació. Els pols de commutació es fan amb uns debanats situats entre els pols de l'excitació i que es poden veure a la següent figura.



Tot seguit es mostra una sola escombreta (pintada en negre) i com es produeix la commutació, és a dir, el canvi del sentit del corrent en un dels debanats que està connectat entre dos delgues consecutives. Per comoditat en el dibuix es fa moure l'escombreta enlloc del col·lector de delgues tot i que s'ha de ser conscient que les escombretes són solidàries a l'estator i el col·lector de delgues forma part del rotor de la màquina.



4. Equacions mecàniques

El parell motor, és a dir, el parell útil a l'eix de la màquina serà el parell electromecànic minorat pel parell de pèrdues mecàniques (fregaments, autoventilació) i es pot expressar com:

$$\Gamma_{\mathrm{m}} = \Gamma - \Gamma_{\mathrm{pm}}$$

I de la segona llei de Newton podem escriure:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Gamma_{\mathrm{m}} - \Gamma_{\mathrm{L}}}{J}$$

On J és el moment d'inèrcia i Γ_{L} el parell de càrrega.

5. Tipus de motors

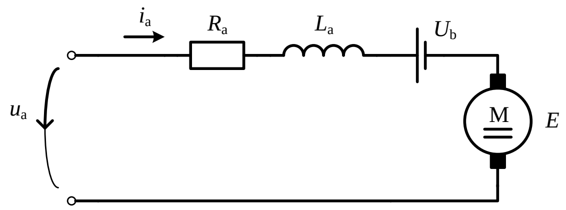
En l'actualitat els motors de continua poden classificar-se en els següents tipus segons les seves característiques:

- Excitació independent: Tal com el seu nom indica el circuit d'excitació és independent del circuit de l'induït. És el més habitual (d'entre els motors de continua) en aplicacions de velocitat variable. Gràcies a la independència dels circuits del rotor i de l'estator, es poden controlar separadament.

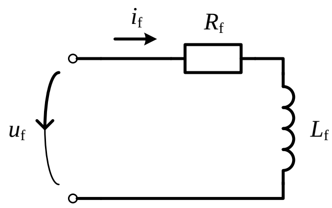
- Imants permanents: Bàsicament es com el d'excitació independent però amb l'excitació constant i, per tant, només es pot controlar el circuit del rotor (induït).
- Sèrie: Els circuits de l'induït i de l'excitació estan connectats en sèrie. En particular els circuits no són independents.

5.1. Excitació independent

Els circuits corresponents a un motor d'excitació independent es mostren a la figura següent.



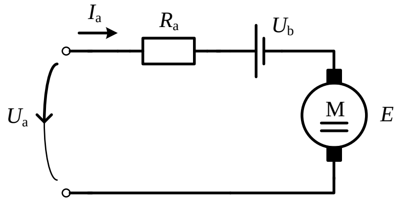
Circuit Induït (rotor)



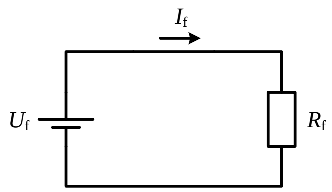
Circuit Excitació (estator)

$$u_{\mathrm{a}} = R_{\mathrm{a}}\, i_{\mathrm{a}} + U_{\mathrm{b}} + L_{\mathrm{a}}\, \frac{di_{\mathrm{a}}}{dt} + E \qquad\qquad u_{\mathrm{f}} = R_{\mathrm{f}}\, i_{\mathrm{f}} + L_{\mathrm{f}}\, \frac{di_{\mathrm{f}}}{dt}$$

En règim estacionari DC queda:



Circuit Induït (rotor)



Circuit Excitació (estator)

$$U_{\mathrm{a}} = R_{\mathrm{a}}\, I_{\mathrm{a}} + U_{\mathrm{b}} + E \qquad\qquad U_{\mathrm{f}} = R_{\mathrm{f}}\, I_{\mathrm{f}} \qquad \phi_{\mathrm{f}} = k_{\mathrm{f}}\, I_{\mathrm{f}}$$

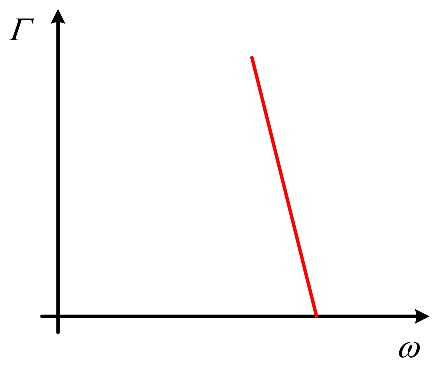
Cal recordar les expressions de la tensió E i del parell electromecànic Γ:

$$E = k\, \phi_{\mathrm{f}}\, \omega$$

$$\Gamma = k\, \phi_{\mathrm{f}}\, i_{\mathrm{a}}$$

En règim estacionari DC es pot representar la característica parell-velocitat aïllant I_{a} de l'expressió $U_{\mathrm{a}} = R_{\mathrm{a}}\, I_{\mathrm{a}} + U_{\mathrm{b}} + E$ i substituint-lo a l'expressió del parell:

$$\Gamma = k\, \phi_{\mathrm{f}}\, \frac{U_{\mathrm{a}} - U_{\mathrm{b}} - k\, \phi_{\mathrm{f}}\, \omega}{R_{\mathrm{a}}}$$



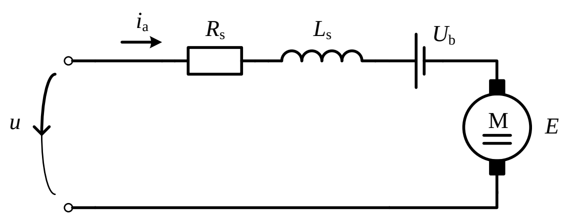
5.2. Imants permanents

La màquina de continua amb excitació d'imants permanents es pot estudiar de manera idèntica a la d'excitació independent tenint en compte que l'excitació és constant. No hi ha circuit d'excitació i, per tant, el valor del camp creat per l'estator no es pot variar a diferència del que passa amb la màquina d'excitació independent. La corba característica de règim estacionari parell-velocitat és la mateixa que en el cas d'excitació independent.

5.3. Sèrie

El motor sèrie té com a característica principal que el circuit de l'excitació i el de l'induït estan en sèrie. Degut a que el corrent d'induït (elevat) també passa pel debanat d'excitació, aquest estarà format per un conductor relativament gruixut i tindrà un nombre de voltes relativament baix. En canvi, en el motor d'excitació independent es prefereix (per raons constructives i energètiques) que el debanat d'excitació tingui més voltes, sigui d'un conductor relativament prim i, per tant, sigui necessari un corrent menor.

Per tant, el circuit elèctric tindrà una resistència R_s que es la suma de la resistència de l'induït R_a i de la de l'excitació R_f. De la mateixa manera, la inductància L_s del motor sèrie serà la suma de la inductància L_a de l'induït i de la de l'excitació L_f. A més, el corrent i_f d'excitació i el corrent i_a de l'induït és el mateix. Es pot considerar que la tensió d'alimentació u és la suma de la tensió u_f de l'excitació i de la tensió u_a de l'induït. Tot seguit es representa el circuit elèctric del motor sèrie.



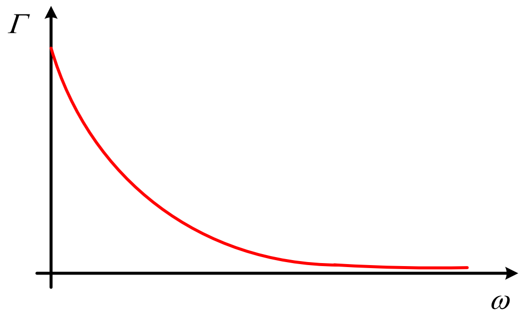
Les equacions surten de particularitzar les ja conegudes i queden, doncs

$$\begin{cases} i_{\mathrm{f}} = i_{\mathrm{a}} \\ u = u_{\mathrm{a}} + u_{\mathrm{f}} \\ R_{\mathrm{s}} = R_{\mathrm{a}} + R_{\mathrm{f}} \\ L_{\mathrm{s}} = L_{\mathrm{a}} + L_{\mathrm{f}} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u = R_{\mathrm{s}}\, i_{\mathrm{a}} + U_{\mathrm{b}} + L_{\mathrm{s}} \dfrac{di_{\mathrm{a}}}{dt} + E \\ \Gamma = k \cdot k_{\mathrm{f}} \cdot i_{\mathrm{a}}^2 \\ E = k \cdot k_{\mathrm{f}} \cdot i_{\mathrm{a}} \cdot \omega \\ \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{\Gamma_{\mathrm{m}} - \Gamma_{\mathrm{L}}}{J} \end{cases}$$

En règim estacionari DC se simplifiquen més:

$$\begin{cases} U = R_{\mathrm{s}}\, I_{\mathrm{a}} + U_{\mathrm{b}} + E \\ \Gamma = k \cdot k_{\mathrm{f}} \cdot I_{\mathrm{a}}^2 \\ E = k \cdot k_{\mathrm{f}} \cdot I_{\mathrm{a}} \cdot \omega \\ \Gamma_{\mathrm{m}} = \Gamma_{\mathrm{L}} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \Gamma = k \cdot k_{\mathrm{f}} \cdot \left(\frac{U - U_{\mathrm{b}}}{R_{\mathrm{s}} + k \cdot k_{\mathrm{f}} \cdot \omega} \right)^2$$

I la corba característica parell-velocitat es representa en la figura següent:



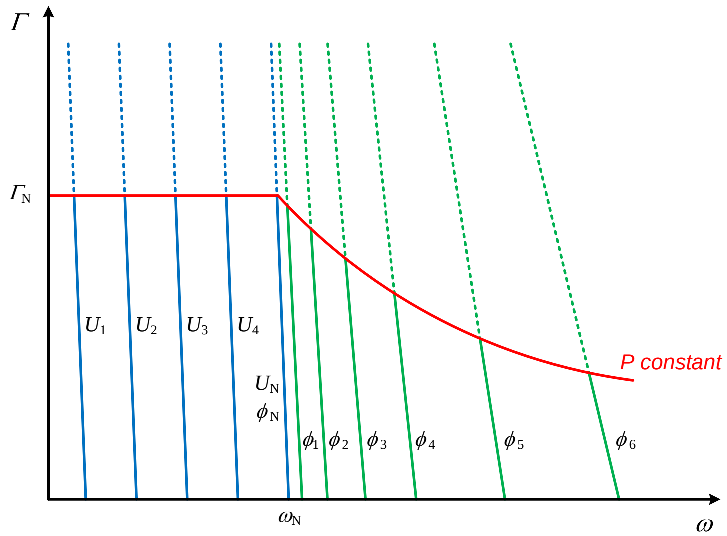
El motor sèrie té la particularitat que si s'alimenta amb corrent altern també pot funcionar ja que encara que és cert que el corrent canvia de sentit a cada període, el camp d'excitació també (degut a la connexió sèrie) i, com a conseqüència, el parell no canvia de sentit; és a dir, el parell motor sempre és en el mateix sentit. Per aquesta raó també se'l coneix com a motor universal.

6. Regulació de velocitat

La regulació de velocitat en els motors de continua és força senzilla. Com la tensió induïda és proporcional a la velocitat de gir, s'acostuma a variar (regular) la velocitat del motor actuant amb una variació de tensió d'alimentació. Això és vàlid dins un ampli rang de funcionament que abraça des d'una velocitat petita (a molt baixes voltes s'ha de vèncer la caiguda de tensió a les escombretes, els fregaments, etc.) fins a tensió nominal.

En els motors en que es pot fer debilitament de camp (excitació independent) es pot anar més enllà de la velocitat nominal debilitant el camp (disminuint l'excitació), cal però no superar el límit mecànic de velocitat. Habitualment es pot arribar al 150 % o fins i tot al 250 % de la velocitat nominal depenent de les característiques mecàniques de la màquina.

Els motors alimentats mitjançant convertidors estàtics acostumen a regular velocitat regulant tensió (per sota la tensió nominal) i mantenint el flux a valor nominal; i per sobre de la velocitat nominal, debilitant el camp inversament proporcional al rati de velocitats, és a dir, $\frac{\phi}{\phi_{\mathrm{N}}} = \frac{\omega_{\mathrm{N}}}{\omega}$. En tot cas, cal vigilar no superar la potència nominal del motor de forma permanent.



Regulació de tensió:
$U_1 < U_2 < U_3 < U_4 < U_{\mathrm{N}}$
U_{N} Tensió nominal
ϕ_{f} Flux nominal

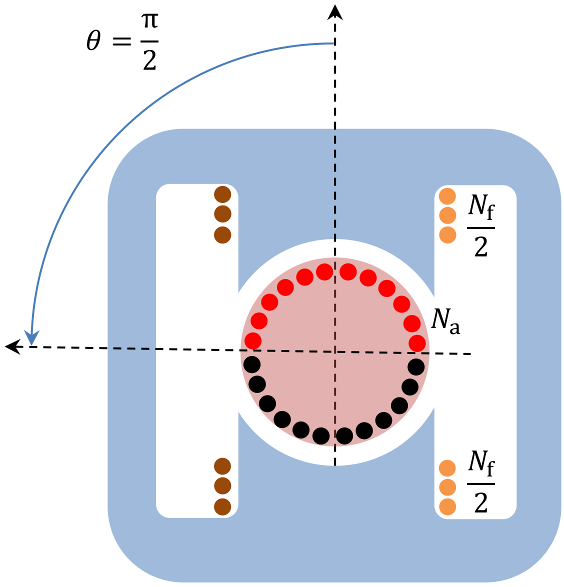
Debilitament de camp:
$\phi_{\mathrm{N}} > \phi_1 > \phi_2 > \phi_3 > \phi_4 > \phi_5 > \phi_6$
ϕ_{N} Flux nominal
U Tensió nominal

A vegades el parell màxim (i el corrent i la potència) tenen el límit en el convertidor estàtic enlloc del motor. A velocitats molt baixes o *Stall* (bloquejat) la dificultat d'evacuació del calor limita el parell entre el 15 i el 30 % del nominal.

7. Deducció de l'esquema equivalent mitjançant la formulació d'inductàncies acoblades.

Suposi's un debanat en el rotor format per N_{a} espires (2 N_{a} conductors), uniformement distribuïts entre les ranures del rotor, que al seu torn són també uniformement distribuïdes. El principi i el final del debanat correspon als punts de connexió: les escombretes. El debanat és tancat, a cada delga hi surt i hi arriba un conductor. Les espires formen dues capes sobre les ranures, de forma que hi ha dos camins de conductors per al pas de corrent (connexió paral·lel). Tant per al càlcul de la inductància del debanat rotòric com per al càlcul de la inductància d'acoblament caldrà considerar que el nombre efectiu d'espires a considerar és la meitat del nombre total d'espires $\frac{N_\mathrm{a}}{2}$.

En l'estator es disposen N_f espires repartides a parts iguals entre els dos pols. La distribució es fa per facilitat constructiva (simetria), i per simetria magnètica (dispersió), atès que idealitzant el sistema (considerant nul el flux de dispersió) s'obtindria el mateix resultat si estesin concentrades sobre un sol pol.



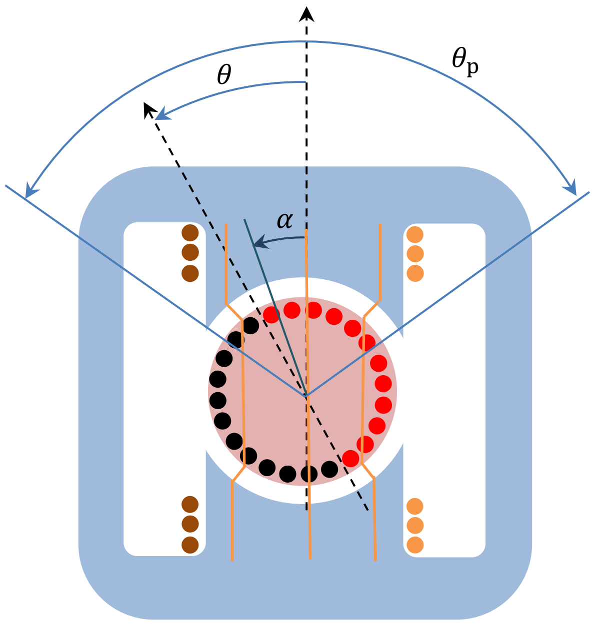
Mercès al commutador mecànic, la posició dels conductors serà quasi estacionaria i de valor $\theta = \frac{\pi}{2}$. No obstant, a efectes de determinar les equacions de la màquina és convenient pensar que ocupa una posició arbitrària i variable. El sentit del corrent del debanat (cercles vermells/negres) és respecte dels dos fils de connexió, és a dir, les escombretes. Per a l'excitació el sentit del corrent es representa per la intensitat de color dels cercles marró.

Seguint la metodologia de les inductàncies acoblades, cal determinar el flux concatenat per cada debanat quan només hi ha corrent en un d'ells. En un primer estadi és convenient suposar que l'acoblament és ideal, en el sentit que no hi han fluxos de dispersió. En considerar la reluctància del ferro negligible, tot el flux magnètic travessa l'entreferro i, per tant, s'estableix per l'estator i el rotor, primer en el sentit rotor cap a l'estator per a tancar-se fent el pas en sentit contrari. Per contra, els fluxos de dispersió no travessen l'entreferro, és a dir les línies de camp s'estableixen a l'estator (o al rotor) cap a l'entreferro per a tancar-se tornant a entrar a l'estator (o al rotor).

$$L_{\mathrm{ffi}} = \left.\frac{\Psi_{\mathrm{fi}}}{i_{\mathrm{f}}}\right|_{i_{\mathrm{a}}=0} \qquad L_{\mathrm{af}} = \left.\frac{\Psi_{\mathrm{a}}}{i_{\mathrm{f}}}\right|_{i_{\mathrm{a}}=0}$$

$$L_{\mathrm{aai}} = \left.\frac{\Psi_{\mathrm{ai}}}{i_{\mathrm{a}}}\right|_{i_{\mathrm{f}}=0} \qquad L_{\mathrm{fa}} = \left.\frac{\Psi_{\mathrm{a}}}{i_{\mathrm{a}}}\right|_{i_{\mathrm{f}}=0}$$

Alimentant únicament l'estator, la llei d'Ampère sobre algun dels recorreguts marrons de la figura, atesa la simetria del sistema, permet determinar la intensitat de camp en els dos entreferros del camí tancat (que coincideix amb les línies de camp).



Es consideren negligibles els efectes de les ranures, de forma que la intensitat de camp a l'entreferro (espessor δ) és constant dins de l'arc polar (definit per l'angle θ_{p}) i nul a fora.

$$H_{\mathrm{f}} = \begin{cases} \dfrac{N_{\mathrm{f}}\, i_{\mathrm{f}}}{2\,\delta} & -\dfrac{\theta_{\mathrm{p}}}{2} < \alpha < \dfrac{\theta_{\mathrm{p}}}{2} \\ 0 & -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < -\dfrac{\theta_{\mathrm{p}}}{2};\quad \dfrac{\theta_{\mathrm{p}}}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$B_{\mathrm{fi}} = \mu_0\, H = \begin{cases} \mu_0\,\dfrac{N_{\mathrm{f}}\, i_{\mathrm{f}}}{2\,\delta} & -\dfrac{\theta_{\mathrm{p}}}{2} < \alpha < \dfrac{\theta_{\mathrm{p}}}{2} \\ 0 & -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < -\dfrac{\theta_{\mathrm{p}}}{2};\quad \dfrac{\theta_{\mathrm{p}}}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

La densitat de camp en funció de la posició (α) és constant, del mateix valor, però canviat de signe en cada pol.

El flux es determina per integració sobre la superfície polar, que en ser la densitat constant és simplement multiplicar per la superfície polar. La longitud (útil) de la màquina és l, mentre que el diàmetre de l'entreferro és D.

$$\phi_{\mathrm{fi}} = B_{\mathrm{fi}} \frac{\theta_{\mathrm{p}}\, D\, l}{2}$$

I el flux concatenat

$$\psi_{\mathrm{fi}} = N_{\mathrm{f}} \cdot \phi_{\mathrm{fi}} = N_{\mathrm{f}}\, B_{\mathrm{fi}} \frac{\theta_{\mathrm{p}}\, D\, l}{2}$$

$$L_{\mathrm{ffi}} = \frac{\psi_{\mathrm{fi}}}{i_{\mathrm{f}}} = \frac{N_{\mathrm{f}}^2}{2\,\delta}\, \mu_0\, \frac{\theta_{\mathrm{p}}\, D\, l}{2} = \frac{N_{\mathrm{f}}^2}{\mathcal{R}}$$

On la reluctància $\mathcal{R}$ val

$$\mathcal{R} = \frac{2\,\delta}{\mu_0\, \frac{\theta_{\mathrm{p}}\, D\, l}{2}}$$

En cas que $\theta_{\mathrm{p}} = \pi$

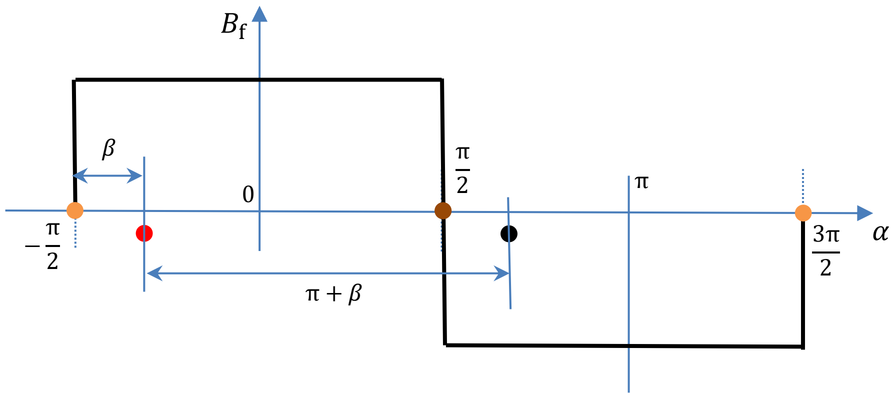
$$\mathcal{R}_{\pi} = \frac{2\,\delta}{\mu_0\, \frac{\pi\, D\, l}{2}}$$

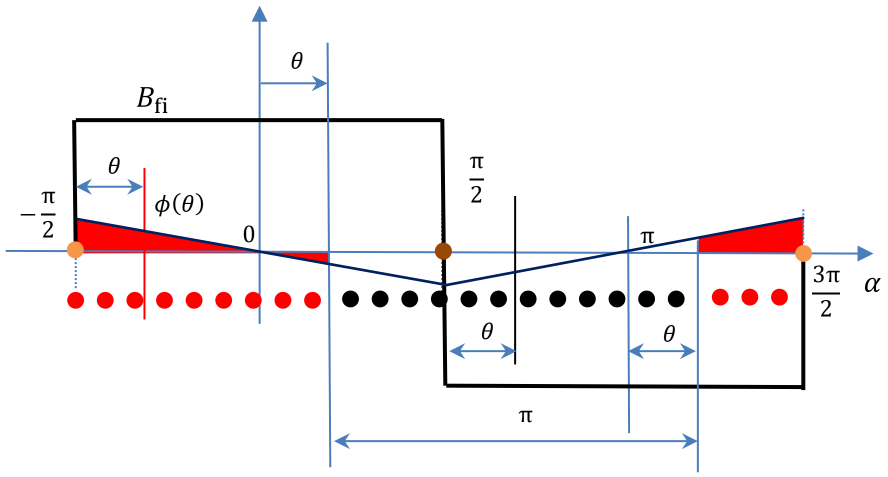
El mateix resultat es pot obtenir directament amb la modelització magnètica, atès que en el circuit equivalent només hi ha la reluctància de l'entreferro.

Per a determinar el flux concatenat pel rotor, que es troba en una posició angular θ, s'ha de realitzar la integració d'un diferencial de flux concatenat amb més detall. Si, com és obligatori per motius constructius, el pas polar no ocupa tota la semi-circumferència $(\theta_{\mathrm{p}} < \pi)$, les expressions que descriuen el sistema són lineals a múltiples trams. La descripció és carregosa i no aporta res des del punt de vista qualitatiu. Per aquest motiu, a efectes de càlcul del terme d'acoblament suposarem que el pol ocupa tota la semi-circumferència $(\theta_{\mathrm{p}} = \pi)$, reduint-se notòriament el nombre de trams, i la complexitat de càlcul.

El debanat del rotor esta format per N_{a} espires ($2 \cdot N_{\mathrm{a}}$ conductors en les ranures) uniformement repartits. Des de dues delgues es veuen les N_{a} espires en dos debanats en paral·lel de $\frac{N_{\mathrm{a}}}{2}$ espires cadascun. El flux concatenat serà, per tant, proporcional a la meitat del nombre d'espires, mentre que circularà la meitat del corrent del rotor per cada espira.

La densitat d'espires és uniforme, pel que a un diferencial d'angle li correspon un diferencial d'espires.





$$\frac{N_{\mathrm{a}}}{2\,\pi} = \frac{dN_{\mathrm{a}}}{d\beta} \quad \rightarrow \quad dN_{\mathrm{a}} = \frac{N_{\mathrm{a}}}{2\,\pi}\,d\beta$$

En un diferencial d'angle $d\beta$, situat en una posició β es concatena un diferencial de flux

$$d\psi_{\mathrm{a}} = \frac{1}{2}\,dN_{\mathrm{a}} \cdot \phi(\beta)$$

$$\phi(\beta) = \begin{cases} B_{\mathrm{f}}\,D\,l\,(\pi - 2\,\beta) & 0 < \beta < \pi \\ B_{\mathrm{f}}\,D\,l\,(-3\,\pi + 2\,\beta) & \pi < \beta < 2\,\pi \end{cases}$$

Amb el rotor en posició θ, els conductors que per conveni hem considerat positius (vermells), ocupen un semicercle del debanat que representa un angle β comprès en l'interval $\frac{3\,\pi}{2} + \theta < \beta < 2\,\pi$ més l'interval $0 < \beta < \theta + \frac{\pi}{2}$. Integrant el diferencial de flux concatenat dins d'aquest interval s'obté el flux total concatenat. Per tal d'evitar tota la casuística d'integració resultant de la discontinuïtat de la funció, ens limitarem al tram vàlid per $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Per simetria, el resultat en $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\,\pi}{2}$ és el mateix canviat de signe.

$$\psi_a = \int_{\theta+\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} d\psi_a + \int_{0}^{\theta+\frac{\pi}{2}} d\psi_a$$

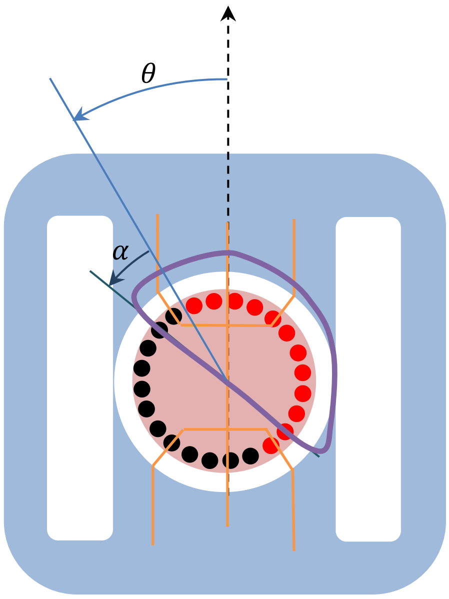
$$\psi_a = \int_{\theta+\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{N_a}{4\,\pi}\, B_f\, D\, l\, (-3\,\pi + 2\,\beta)\, d\beta + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \frac{N_a}{4\,\pi}\, B_f\, D\, l\, (\pi - 2\,\beta)\, d\beta$$

$$= \frac{N_a}{4\,\pi}\, B_f\, D\, l \left(\frac{1}{2}\pi^2 - 2\,\theta^2\right)$$

$$\psi_a = \frac{N_a}{4}\, B_f\, D\, l\, \pi \left(\frac{1}{2} - 2\,\frac{\theta^2}{\pi^2}\right) = \frac{N_a}{4}\,\frac{N_f}{2\,\delta}\,\mu_0\, i_f\, D\, l\, \pi \left(\frac{1}{2} - 2\,\frac{\theta^2}{\pi^2}\right)$$

$$L_{af}(\theta) = \frac{\psi_a}{i_f} = \frac{N_a}{4}\,\frac{N_f}{2\,\delta}\,\mu_0\, D\, l\, \pi \left(\frac{1}{2} - 2\,\frac{\theta^2}{\pi^2}\right) = \frac{N_a\, N_f}{2\,\mathcal{R}_\pi} \left(\frac{1}{2} - 2\,\frac{\theta^2}{\pi^2}\right)$$

Quan només hi ha corrent en el rotor, com anteriorment, considerant un cas idealitzat (sense flux de dispersió) i amb $\theta_p = \pi$.



En haver suposat el pas polar de mig cercle, per aplicació de la llei d'Ampère sobre el camí tancat lila de la figura, que travessa l'entreferro en la situació diametral definida per l'angle α, és immediat trobar la densitat de camp. Considerem un diferencial de debanat, amb la densitat de voltes-amper uniformement distribuïdes. Cal recordar que en haver-hi la meitat de les espires en paral·lel amb l'altra meitat, o bé es tenen en compte la meitat de les espires i el corrent sencer, o bé totes les espires i la meitat del corrent, que és la opció aquí escollida.

$$d(N_\mathrm{a}\, i_\mathrm{a}) = \frac{N_\mathrm{a}}{2\,\pi}\,\frac{i_\mathrm{a}}{2}\, d\alpha$$

$$2 \cdot dH \cdot \delta = d(N_\mathrm{a}\, i_\mathrm{a})$$

$$dB = \mu_0\, dH = \frac{N_\mathrm{a}}{8\,\pi\,\delta}\,\mu_0\, i_\mathrm{a}\, d\alpha$$

$$d\phi = dB\,\frac{D}{2}\, l\,\pi = \frac{N_\mathrm{a}}{8\,\pi\,\delta}\,\mu_0\, i_\mathrm{a}\,\frac{D}{2}\, l\,\pi\, d\alpha$$

$$d\psi = dB\,\frac{N_\mathrm{a}}{2\,\pi}\, d\alpha = \frac{N_\mathrm{a}^2}{16\,\pi\,\delta}\,\mu_0\, i_\mathrm{a}\,\frac{D}{2}\, l\, d^2\alpha$$

$$dL_\mathrm{aai} = \frac{d\psi}{i_\mathrm{a}} = \frac{N_\mathrm{a}^2}{16\,\pi\,\delta}\,\mu_0\,\frac{D}{2}\, l\, d^2\alpha$$

$$L_\mathrm{aai} = \iint_0^\pi dL_\mathrm{aa} = \iint_0^\pi \frac{N_\mathrm{a}^2}{16\,\pi\,\delta}\,\mu_0\,\frac{D}{2}\, l\, d^2\alpha = \frac{N_\mathrm{a}^2}{16\,\pi\,\delta}\,\frac{2}{\pi\,\mathcal{R}_\pi}\iint_0^\pi d^2\alpha$$

$$L_\mathrm{aai} = \frac{N_\mathrm{a}^2}{8\,\pi\,\delta}\,\frac{1}{\pi\,\mathcal{R}_\pi}\,\frac{1}{2}\,\pi^2 = \frac{N_\mathrm{a}^2}{16\,\mathcal{R}_\pi}$$

De forma més ràpida s’hauría pogut obtenir la inductància pròpia del rotor atenent al resultat obtingut en el càlcul d’$L_\mathrm{af}(\theta = 0)$, corresponent a l’acoblament màxim entre estator i rotor:

$$L_\mathrm{af}(\theta = 0) = \frac{N_\mathrm{a}\, N_\mathrm{f}}{4\,\mathcal{R}_\pi} = \frac{1}{\mathcal{R}_\pi}\,\frac{N_\mathrm{a}}{4}\, N_\mathrm{f}$$

El terme $\frac{N_\mathrm{a}}{4}$ correspon al nombre de voltes efectives del debanat $\frac{N_\mathrm{a}}{2}$ multiplicat pel coeficient corresponent a la distribució uniforme $\frac{1}{2}$ (si fos concentrat fora la unitat) i que s’acobla idealment amb un debanat concentrat de N_f espires. Simplement substituïnt el nombre de voltes corresponent s’hauria pogut trobar directament el valor de l’acoblament idealitzat (sense dispersió)

$$L_\mathrm{aai} = \frac{1}{\mathcal{R}_\pi}\,\frac{N_\mathrm{a}}{4}\,\frac{N_\mathrm{a}}{4} = \frac{N_\mathrm{a}^2}{16\,\mathcal{R}_\pi}$$

Es verifica la idealitat (no dispersió) per a $\theta = 0$

$$L_\mathrm{ff}\, L_\mathrm{aa} = L_\mathrm{af}^2\,(\theta = \pm\frac{\pi}{2})$$

$$\frac{N_\mathrm{f}^2}{\mathcal{R}}\,\frac{N_\mathrm{a}^2}{16\,\mathcal{R}} = \left(\frac{N_\mathrm{a}\,N_\mathrm{f}}{\mathcal{R}_\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

En el cas real, hi haurà dispersió en tots dos debanats. Els coeficients de dispersió $\sigma_\mathrm{f}, \sigma_\mathrm{a} > 0$ representen l'increment de la inductància pròpia respecte de la ideal.

$$\begin{bmatrix} \Psi_\mathrm{f} \\ \Psi_\mathrm{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_\mathrm{ff} & L_\mathrm{fa}(\theta) \\ L_\mathrm{af}(\theta) & L_\mathrm{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{R}_\pi} \begin{bmatrix} (1+\sigma_\mathrm{f})\,N_\mathrm{a}^2 & \dfrac{N_\mathrm{a}\,N_\mathrm{f}}{2}\left(\dfrac{1}{2} - 2\,\dfrac{\theta^2}{\pi^2}\right) \\ \dfrac{N_\mathrm{a}\,N_\mathrm{f}}{2}\left(\dfrac{1}{2} - 2\,\dfrac{\theta^2}{\pi^2}\right) & (1+\sigma_\mathrm{a})\,\dfrac{N_1^2}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Noti's que el terme d'acoblament corresponent als angles de treball de la màquina $\theta = \mp\frac{\pi}{2}$ és nul. Com a conseqüència, el punt de treball magnètic de l'excitació és independent de l'estat de càrrega (corrent de rotor) de la màquina. Admetent que no hi ha fenòmens de saturació (linealitat magnètica), en el cas d'excitació per imants el punt de treball no varia. En el cas d'excitació per debanats el circuit d'excitació i el de rotor són totalment independents des del punt de vista magnètic.

El parell desenvolupat, segons l'expressió general de la coenergia per a sistemes magnètics lineals

$$\Gamma = \frac{\partial W'_\mathrm{mg}(\boldsymbol{i},\theta)}{\partial\theta} = -\frac{\partial W_\mathrm{mg}(\boldsymbol{\Psi},\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{i^t}\cdot\frac{d}{d\theta}\boldsymbol{L}(\theta)\cdot\boldsymbol{i}$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{i^t}\cdot\frac{1}{\mathcal{R}_\pi}\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{2\,\theta\,N_\mathrm{a}\,N_\mathrm{f}}{\pi^2} \\ -\dfrac{2\,\theta\,N_\mathrm{a}\,N_\mathrm{f}}{\pi^2} & 0 \end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{i}$$

$$\Gamma = -\frac{2\,\theta\,N_\mathrm{a}\,N_\mathrm{f}}{\mathcal{R}_\pi\,\pi^2}\,i_\mathrm{f}\,i_\mathrm{a}$$

Els parells màxim i mínim corresponen a les posicions $\theta = \mp\frac{\pi}{2}$, que són les condicions en que treballarà la màquina.

$$\Gamma = \pm\frac{N_\mathrm{a}\,N_\mathrm{f}}{\mathcal{R}_\pi\,\pi}\,i_\mathrm{f}\,i_\mathrm{a} = \pm N_\mathrm{a}\,B_\mathrm{fi}\,\frac{D}{2}\,l\,i_\mathrm{a} = \pm N_\mathrm{a}\,\frac{\phi_\mathrm{fi}}{\pi}\,i_\mathrm{a} = \pm k_\mathrm{i}\,\phi_\mathrm{fi}\,i_\mathrm{a} = k_\Gamma\,i_\mathrm{a} = \pm M\,i_\mathrm{f}\,i_\mathrm{a}$$

k_Γ sol anomenar-se constant de la màquina, o constant de parell de la màquina. En el cas de l'excitació amb imant permanent, atès que el flux d'excitació és constant, amb un sol valor es caracteritza tot el comportament electromecànic de la màquina.

$$k_\Gamma = k_\mathrm{i}\,\phi_\mathrm{fi}$$

$$k_\mathrm{i} = \pm\frac{N_\mathrm{a}}{\pi}$$

$$M = \pm \frac{N_\mathrm{a}\, N_\mathrm{f}}{\pi\, \mathcal{R}_\pi} = \pm \frac{N_\mathrm{a}\, N_\mathrm{f}}{2\,\delta}\ \mu_0\ \frac{D}{2}\ l$$

El parell mecànic intern de la màquina és proporcional al corrent del rotor i al flux d'excitació amb una constant de proporcionalitat que depèn de la geometria de la màquina.

Les tensions induïdes són

$$[\boldsymbol{u}] = \frac{d}{dt}[\boldsymbol{\Psi}] = \frac{d}{dt}([\boldsymbol{L}(\theta)][\boldsymbol{i}]) = \frac{d}{d\theta}([\boldsymbol{L}(\theta)])[\boldsymbol{i}]\frac{d\theta}{dt} + [\boldsymbol{L}(\theta)]\frac{d}{dt}[\boldsymbol{i}]$$

$$\begin{bmatrix} u_\mathrm{f} \\ u_\mathrm{a} \end{bmatrix} = \frac{\omega}{\mathcal{R}_\pi}\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{4\theta N_\mathrm{a} N_\mathrm{f}}{\pi^2} \\ -\dfrac{4\theta N_\mathrm{a} N_\mathrm{f}}{\pi^2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_\mathrm{f} \\ i_\mathrm{a} \end{bmatrix} + \frac{1}{\mathcal{R}_\pi}\begin{bmatrix} (1+\sigma_\mathrm{f})\cdot N_\mathrm{a}^2 & N_\mathrm{a} N_\mathrm{f}\left(\dfrac{1}{2} - 2\dfrac{\theta^2}{\pi^2}\right) \\ N_\mathrm{a} N_\mathrm{f}\left(\dfrac{1}{2} - 2\dfrac{\theta^2}{\pi^2}\right) & (1+\sigma_\mathrm{a})\cdot N_1^2 \end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_\mathrm{f} \\ i_\mathrm{a} \end{bmatrix}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Que en les posicions de treball $\theta = \mp\frac{\pi}{2}$ valen

$$\begin{bmatrix} u_\mathrm{f} \\ u_\mathrm{a} \end{bmatrix} = \frac{\omega}{\mathcal{R}_\pi}\begin{bmatrix} 0 & \pm\dfrac{2\, N_\mathrm{a}\, N_\mathrm{f}}{\pi} \\ \pm\dfrac{2\, N_\mathrm{a}\, N_\mathrm{f}}{\pi} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_\mathrm{f} \\ i_\mathrm{a} \end{bmatrix} + \frac{1}{\mathcal{R}_\pi}\begin{bmatrix} (1+\sigma_\mathrm{f})\, N_\mathrm{a}^2 & 0 \\ 0 & (1+\sigma_\mathrm{a})\, N_1^2 \end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_\mathrm{f} \\ i_\mathrm{a} \end{bmatrix}$$

La commutació de les escombretes és difícil de modelar matemàticament. Degut al règim quasi estacionari en la distribució espacial dels corrents de rotor que la commutació de les escombretes imposa, l'angle de treball de la màquina és $\theta = \mp\frac{\pi}{2}$. En aquestes condicions l'acoblament entre rotor i estator és nul:

$$L\left(\mp\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\mathcal{R}_\pi}\begin{bmatrix} (1+\sigma_\mathrm{f})\, N_\mathrm{a}^2 & 0 \\ 0 & (1+\sigma_\mathrm{a})\, N_1^2 \end{bmatrix}$$

El flux generat pel rotor que arriba al debanat d'excitació és nul. O el que és el mateix, els conductors del rotor veuen "moure" el camp d'excitació, mentre que els conductors de l'estator ni tant sols veuen el camp generat pels corrents del rotor, atès que aquest es "curtcircuitat" en el ferro del final dels pols. Com a conseqüència, el terme $\pm\frac{2\, N_\mathrm{a}\, N_\mathrm{f}}{\pi}\ i_\mathrm{a}$ corresponent a la tensió induïda en l'excitació per moviment, tot i que formalment té el mateix origen que el terme simètric de l'induït, en realitat no hi és.

Les equacions de les tensions induïdes, incorporant el funcionament del commutador mecànic queden:

$$\begin{bmatrix} u_\mathrm{f} \\ u_\mathrm{a} \end{bmatrix} = \frac{\omega}{\mathcal{R}_\pi} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pm\dfrac{2\,N_\mathrm{a}\,N_\mathrm{f}}{\pi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\mathrm{f} \\ i_\mathrm{a} \end{bmatrix} + \frac{1}{\mathcal{R}_\pi} \begin{bmatrix} (1+\sigma_\mathrm{f})\,N_\mathrm{a}^2 & 0 \\ 0 & (1+\sigma_\mathrm{a})\,N_1^2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_\mathrm{f} \\ i_\mathrm{a} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_\mathrm{f} \\ u_\mathrm{a} \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pm M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\mathrm{f} \\ i_\mathrm{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_\mathrm{ff} & 0 \\ 0 & L_\mathrm{aa} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Les equacions elèctriques de la màquina, considerant les caigudes de tensió en les resistències i en les escombretes resten

$$\begin{bmatrix} v_\mathrm{f} \\ v_\mathrm{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_\mathrm{f} & 0 \\ 0 & R_\mathrm{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\mathrm{f} \\ i_\mathrm{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_\mathrm{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_\mathrm{f} \\ u_\mathrm{a} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_\mathrm{f} \\ v_\mathrm{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_\mathrm{f} & 0 \\ 0 & R_\mathrm{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\mathrm{f} \\ i_\mathrm{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_\mathrm{b} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pm M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\mathrm{f} \\ i_\mathrm{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_\mathrm{ff} & 0 \\ 0 & L_\mathrm{aa} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_\mathrm{f} \\ i_\mathrm{a} \end{bmatrix}$$

La caiguda de tensió en les escombretes correspon a l'arc elèctric que es forma quan el corrent travessa la capa límit d'aire en el contacte delga-escombreta. Tot i que són funció inversa amb el corrent (arc elèctric), solen modelar-se com una tensió constant. La polaritat sempre és oposada al sentit del corrent. Com les caigudes en les escombretes solen ser valor baixes, en moltes ocasions es poden negligir.

$$v_\mathrm{f} = R_\mathrm{f}\,i_\mathrm{f} + L_\mathrm{ff}\,\frac{d}{dt} i_\mathrm{f}$$

$$v_\mathrm{a} = R_\mathrm{a} i_\mathrm{a} + u_\mathrm{b} \cdot sign(i_\mathrm{a}) + L_\mathrm{aa} \frac{d}{dt} i_\mathrm{a} \pm \omega M i_\mathrm{f} = R_\mathrm{a} i_\mathrm{a} + u_\mathrm{b} \cdot sign(i_\mathrm{a}) + L_\mathrm{aa} \frac{d}{dt} i_\mathrm{a} \pm k_\mathrm{i} \phi_\mathrm{fi} \omega$$

La força electromotriu E, o tensió induïda per moviment és proporcional a la velocitat i al flux d'excitació amb una constant de proporcionalitat que depèn de la geometria de la màquina. La constant de proporcionalitat és la mateixa que la de parell. En alguns catàlegs comercials se solen donar constants de velocitat de valor numèric diferents a la de parell perquè expressen la velocitat en revolucions per minut en lloc de radians per segon.

$$E = \pm \omega\, M\, i_\mathrm{f} = \pm k_\mathrm{i}\, \phi_\mathrm{fi}\, \omega = \pm k\, \phi_\mathrm{f}\, \omega$$

$$\Gamma = \pm k_\mathrm{i}\, \phi_\mathrm{fi}\, i_\mathrm{a} = \pm k\, \phi_\mathrm{f}\, i_\mathrm{a} = k_\Gamma\, i_\mathrm{a} = \pm M\, i_\mathrm{f}\, i_\mathrm{a}$$

Si volem treballar amb el flux total de l'excitació (incloent la dispersió)

$$\phi_\mathrm{f} = (1+\sigma_\mathrm{f})\, \phi_\mathrm{fi}$$

$$k = \frac{k_\mathrm{i}}{1+\sigma_\mathrm{f}}$$

$$k_\Gamma = k_\mathrm{i}\, \phi_\mathrm{fi} = k\, \phi_\mathrm{f} = M\, i_\mathrm{f}$$

El canvi de signe de l'angle de treball $\theta = \mp\frac{\pi}{2}$ només indica el canvi en la polaritat de mesura del debanat de rotor, és a dir, de les escombretes.

$$\begin{cases} \theta = -\dfrac{\pi}{2} & \begin{cases} E = k\,\phi_{\mathrm{f}}\,\omega \\ \Gamma = k\,\phi_{\mathrm{f}}\,i_{\mathrm{a}} \end{cases} \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} & \begin{cases} E = -k\,\phi_{\mathrm{f}}\,\omega \\ \Gamma = -k\,\phi_{\mathrm{f}}\,i_{\mathrm{a}} \end{cases} \end{cases}$$

Ens podem quedar amb la versió en positiu de les equacions fixant l'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$, les equacions elèctriques i mecànica de la màquina resten

$$\begin{cases} v_{\mathrm{f}} = R_{\mathrm{f}}\,i_{\mathrm{f}} + L_{\mathrm{ff}}\,\dfrac{d}{dt}i_{\mathrm{f}} \\ v_{\mathrm{a}} = R_{\mathrm{a}}\,i_{\mathrm{a}} + u_{\mathrm{b}} \cdot sign(i_{\mathrm{a}}) + L_{\mathrm{aa}}\,\dfrac{d}{dt}i_{\mathrm{a}} + E \\ E = k\,\phi_{\mathrm{f}}\,\omega \\ \Gamma = k\,\phi_{\mathrm{f}}\,i_{\mathrm{a}} \end{cases}$$

Les equacions mantenen la generalitat quan el pas polar no és diametral $(\theta_{\mathrm{p}} < \pi)$, però els valors de les constants són menors als corresponents al pas diametral.