

Màquines Elèctriques

Màquina d'Inducció

Curs 2016-2017

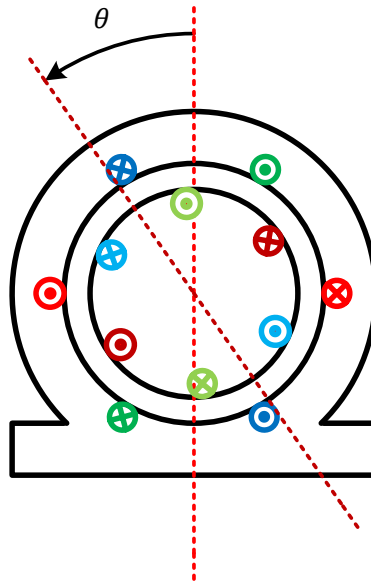
Joan Rull

Samuel Galceran

DEE-UPC

Màquina d'inducció

L'estator de la màquina d'inducció és idèntic al de la màquina síncrona i, per tant, cal recordar que els debanats estan escurçats, repartits i inclinats per aconseguir una distribució de camp sinusoidal a l'entreferro. Al rotor hi ha tres debanats igualment escurçats, repartits i inclinats corresponents a tres fases situades a 120° elèctrics. A la pràctica, però, la majoria de rotors tenen la forma de gàbia d'esquirol (barres que permeten la circulació de corrents grans).



Les equacions elèctriques de la màquina d'inducció són, doncs,

$$\begin{bmatrix} v_{sa}(t) \\ v_{sb}(t) \\ v_{sc}(t) \\ v_{ra}(t) \\ v_{rb}(t) \\ v_{rc}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sa} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{sb} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{sc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{ra} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{rb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{rc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa}(t) \\ i_{sb}(t) \\ i_{sc}(t) \\ i_{ra}(t) \\ i_{rb}(t) \\ i_{rc}(t) \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sa}(t) \\ \psi_{sb}(t) \\ \psi_{sc}(t) \\ \psi_{ra}(t) \\ \psi_{rb}(t) \\ \psi_{rc}(t) \end{bmatrix}$$

on

$$\begin{bmatrix} \psi_{sa}(t) \\ \psi_{sb}(t) \\ \psi_{sc}(t) \\ \psi_{ra}(t) \\ \psi_{rb}(t) \\ \psi_{rc}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{ss} \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & M_{sr} \cos(-\theta) & M_{sr} \cos\left(-\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{sr} \cos\left(-\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{ss} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & L_{ss} & M_{ss} \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) & M_{sr} \cos\left(-\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{sr} \cos(-\theta) & M_{sr} \cos\left(-\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{ss} \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & L_{ss} & M_{sr} \cos\left(-\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{sr} \cos\left(-\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{sr} \cos(-\theta) \\ M_{sr} \cos(\theta) & M_{sr} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{sr} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{rr} & M_{rr} \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) & M_{rr} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{sr} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{sr} \cos(\theta) & M_{sr} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{rr} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & L_{rr} & M_{rr} \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) \\ M_{sr} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{sr} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{sr} \cos(\theta) & M_{rr} \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) & M_{rr} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa}(t) \\ i_{sb}(t) \\ i_{sc}(t) \\ i_{ra}(t) \\ i_{rb}(t) \\ i_{rc}(t) \end{bmatrix}$$

Es té, doncs, un sistema de debanats acoblats magnèticament. Si no es permetés el gir del rotor es tractaria d'un transformador trifàsic; en el cas de moviment relatiu, cal afegir, com es veurà, el terme de moviment (variació de l'acoblament magnètic) a la tensió induïda.

Per simetria en la construcció de la màquina, les resistències dels debanats de l'estator són iguals entre sí. De la mateixa manera, les resistències dels debanats del rotor també són iguals entre sí. El mateix es pot dir dels coeficients d'autoinducció i d'inducció mútua.

Els coeficients de la matriu d'acoblements són:

$$L_{ss} = L_{ls} + \frac{4 \mu_0 r l}{\pi \delta} K_{11}^2 N_1^2$$

$$L_{rr} = L_{lr} + \frac{4 \mu_0 r l}{\pi \delta} K_{21}^2 N_2^2$$

$$M_{sr} = M_{rs} = \frac{4 \mu_0 r l}{\pi \delta} K_{11} K_{21} N_1 N_2$$

Anomenant la relació de transformació al quocient del número de voltes efectives dels debanats (escurçats, repartits i inclinats)

$$r_t = \frac{N_{1Ef}}{N_{2Ef}}$$

Es poden expressar les equacions de la màquina d'inducció referides (reduïdes) a l'estator de la mateixa manera com es realitza l'estudi dels transformadors:

$$\begin{bmatrix} v_{sa}(t) \\ v_{sb}(t) \\ v_{sc}(t) \\ v'_{ra}(t) \\ v'_{rb}(t) \\ v'_{rc}(t) \end{bmatrix} = [R'] \begin{bmatrix} i_{sa}(t) \\ i_{sb}(t) \\ i_{sc}(t) \\ i'_{ra}(t) \\ i'_{rb}(t) \\ i'_{rc}(t) \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left([M'] \begin{bmatrix} i_{sa}(t) \\ i_{sb}(t) \\ i_{sc}(t) \\ i'_{ra}(t) \\ i'_{rb}(t) \\ i'_{rc}(t) \end{bmatrix} \right)$$

Els coeficients reduïts a l'estator seran, doncs:

$$L_{ss} = L_{ls} + M_{ss}$$

$$L'_{rr} = r_t^2 L_{lr} + M_{ss}$$

$$M'_{sr} = M'_{rs} = \frac{4 \mu_0 r l}{\pi \delta} K_{11} K_{21} N_1 N_2 r_t = \frac{4 \mu_0 r l}{\pi \delta} K_{11}^2 N_1^2 = M_{ss}$$

$$M'_{rr} = \frac{4 \mu_0 r l}{\pi \delta} K_{21}^2 N_2^2 r_t^2 = \frac{4 \mu_0 r l}{\pi \delta} K_{11}^2 N_1^2 = M_{ss}$$

La matriu de resistències queda de la següent manera:

$$[R'] = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R'_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R'_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_t^2 R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_t^2 R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_t^2 R_r \end{bmatrix}$$

La matriu d'acoblements és:

$$[\mathbf{M}'] = \begin{bmatrix} L_{ss} & -0,5 M_{ss} & -0,5 M_{ss} & M_{ss} \cos(\theta) & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ -0,5 M_{ss} & L_{ss} & -0,5 M_{ss} & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos(\theta) & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -0,5 M_{ss} & -0,5 M_{ss} & L_{ss} & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos(\theta) \\ M_{ss} \cos(\theta) & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & L'_{rr} & -0,5 M_{ss} & -0,5 M_{ss} \\ M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos(\theta) & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -0,5 M_{ss} & L'_{rr} & -0,5 M_{ss} \\ M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos(\theta) & -0,5 M_{ss} & -0,5 M_{ss} & L'_{rr} \end{bmatrix}$$

Per comoditat d'escriptura i per abús de llenguatge, a partir d'ara, tot i que les magnituds estaran totes reduïdes a l'estator, es suprimeixen les indicacions a tal efecte:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} L_{ss} & -0,5 M_{ss} & -0,5 M_{ss} & M_{ss} \cos(\theta) & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ -0,5 M_{ss} & L_{ss} & -0,5 M_{ss} & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos(\theta) & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -0,5 M_{ss} & -0,5 M_{ss} & L_{ss} & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos(\theta) \\ M_{ss} \cos \theta & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{rr} & -0,5 M_{ss} & -0,5 M_{ss} \\ M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos \theta & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -0,5 M_{ss} & L_{rr} & -0,5 M_{ss} \\ M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos \theta & -0,5 M_{ss} & -0,5 M_{ss} & L_{rr} \end{bmatrix}$$

Alimentant la màquina amb un sistema de tensions simètric i equilibrat a l'estator, en el rotor també ho serà tot i que degut al moviment relatiu, les freqüències de les tensions del rotor seran diferents de les de l'estator. Cal recordar que $V'_r = r_t V_r$, però en l'expressió dels fasors corresponents suprimirem, igual que abans, qualsevol notació referent a la reducció de valors del rotor a l'estator:

$$[\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} v_{sa}(t) \\ v_{sb}(t) \\ v_{sc}(t) \\ v'_{ra}(t) \\ v'_{rb}(t) \\ v'_{rc}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} V_s \cos(\omega t + \varphi_{VS}) \\ \sqrt{2} V_s \cos\left(\omega t + \varphi_{VS} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sqrt{2} V_s \cos\left(\omega t + \varphi_{VS} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sqrt{2} V'_r \cos(\omega_r t + \varphi_{VR}) \\ \sqrt{2} V'_r \cos\left(\omega_r t + \varphi_{VR} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sqrt{2} V'_r \cos\left(\omega_r t + \varphi_{VR} + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{sa} \\ \underline{V}_{sb} \\ \underline{V}_{sc} \\ \underline{V}_{ra} \\ \underline{V}_{rb} \\ \underline{V}_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{sa} \\ a^2 \underline{V}_{sa} \\ a \underline{V}_{sa} \\ \underline{V}_{ra} \\ a^2 \underline{V}_{ra} \\ a \underline{V}_{ra} \end{bmatrix}$$

El mateix podem dir pel que fa referència als corrents ($I_r' = \frac{1}{r_t} I_r$):

$$[\mathbf{i}] = \begin{bmatrix} i_{sa}(t) \\ i_{sb}(t) \\ i_{sc}(t) \\ i'_{ra}(t) \\ i'_{rb}(t) \\ i'_{rc}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} I_s \cos(\omega t + \varphi_{IS}) \\ \sqrt{2} I_s \cos\left(\omega t + \varphi_{IS} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sqrt{2} I_s \cos\left(\omega t + \varphi_{IS} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sqrt{2} I_r' \cos(\omega_r t + \varphi_{IR}) \\ \sqrt{2} I_r' \cos\left(\omega_r t + \varphi_{IR} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sqrt{2} I_r' \cos\left(\omega_r t + \varphi_{IR} + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{sa} \\ \underline{I}_{sb} \\ \underline{I}_{sc} \\ \underline{I}_{ra} \\ \underline{I}_{rb} \\ \underline{I}_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{sa} \\ a^2 \underline{I}_{sa} \\ a \underline{I}_{sa} \\ \underline{I}_{ra} \\ a^2 \underline{I}_{ra} \\ a \underline{I}_{ra} \end{bmatrix}$$

Les equacions elèctriques de la màquina d'inducció són, per tant:

$$[\mathbf{u}] = [\mathbf{R}][\mathbf{i}] + \frac{d}{dt}[\boldsymbol{\Psi}] = [\mathbf{R}][\mathbf{i}] + \frac{d}{dt}([\mathbf{M}][\mathbf{i}]) = [\mathbf{R}][\mathbf{i}] + \frac{d}{dt}([\mathbf{M}])[\mathbf{i}] + [\mathbf{M}] \frac{d}{dt}([\mathbf{i}])$$

$$\frac{d}{dt}([\mathbf{M}]) = \frac{d\mathbf{M}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad \omega_m = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}([\mathbf{M}]) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -M_{ss} \sin \theta & -M_{ss} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{ss} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ 0 & 0 & 0 & -M_{ss} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{ss} \sin \theta & -M_{ss} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ 0 & 0 & 0 & -M_{ss} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{ss} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{ss} \sin \theta \\ -M_{ss} \sin \theta & -M_{ss} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{ss} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -M_{ss} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{ss} \sin \theta & -M_{ss} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -M_{ss} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{ss} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{ss} \sin \theta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\theta}{dt}$$

Amb règim estacionari $\omega_m = \frac{d\theta}{dt} = \text{constant}$:

$$\frac{d}{dt}([\mathbf{M}]) = \omega_m M_{ss} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En règim estacionari de corrents (simetria en estator i rotor):

$$[\mathbf{i}] = \begin{bmatrix} \underline{I}_{sa} \\ a^2 \underline{I}_{sa} \\ a \underline{I}_{sa} \\ \underline{I}_{ra} \\ a^2 \underline{I}_{ra} \\ a \underline{I}_{ra} \end{bmatrix} \quad \frac{d}{dt}([\mathbf{i}]) = j \begin{bmatrix} \omega \underline{I}_{sa} \\ \omega a^2 \underline{I}_{sa} \\ \omega a \underline{I}_{sa} \\ \omega_r \underline{I}_{ra} \\ \omega_r a^2 \underline{I}_{ra} \\ \omega_r a \underline{I}_{ra} \end{bmatrix}$$

Si el rotor està en curtcircuit (gàbia d'esquirol o be curtcircuitat a través dels anells lliscants):

$$[\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} v_{sa}(t) \\ v_{sb}(t) \\ v_{sc}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} V_s \cos(\omega t + \varphi_{Vs}) \\ \sqrt{2} V_s \cos\left(\omega t + \varphi_{Vs} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sqrt{2} V_s \cos\left(\omega t + \varphi_{Vs} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{sa}}{V_{sb}} \\ \frac{V_{sc}}{0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{sa}}{a^2 \frac{V_{sa}}{a}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Incorporant tots els termes a les equacions elèctriques de la màquina d'inducció s'obtenen unes equacions que són força laborioses de manipular. Com es pot observar simetria de $\frac{2\pi}{3}$, es treballarà només amb una equació d'estator i una altra de rotor. S'escullen les equacions corresponents a les fases a d'estator i rotor.

$$[\mathbf{u}] = [\mathbf{R}] [\mathbf{i}] + \frac{d}{dt}([\mathbf{M}]) [\mathbf{i}] + [\mathbf{M}] \frac{d}{dt}([\mathbf{i}])$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{V_{sa}}{a^2 \frac{V_{sa}}{a}} \\ \frac{V_{sa}}{a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L_{sa}}{a^2 L_{sa}} \\ a L_{sa} \\ L_{ra} \\ a^2 L_{ra} \\ a L_{ra} \end{bmatrix} + \omega_m M_{ss} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{sa} \\ a^2 L_{sa} \\ a L_{sa} \\ L_{ra} \\ a^2 L_{ra} \\ a L_{ra} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{ss} & -0,5M_{ss} & -0,5M_{ss} & M_{ss} \cos(\theta) & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ -0,5M_{ss} & L_{ss} & -0,5M_{ss} & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos(\theta) & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -0,5M_{ss} & -0,5M_{ss} & L_{ss} & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos(\theta) \\ M_{ss} \cos \theta & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{rr} & -0,5M_{ss} & -0,5M_{ss} \\ M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos \theta & M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -0,5M_{ss} & L_{rr} & -0,5M_{ss} \\ M_{ss} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ss} \cos \theta & -0,5M_{ss} & -0,5M_{ss} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega L_{sa} \\ \omega a^2 L_{sa} \\ \omega a L_{sa} \\ \omega_r L_{ra} \\ \omega_r a^2 L_{ra} \\ \omega_r a L_{ra} \end{bmatrix}$$

Equació d'estator:

$$\begin{aligned} \underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + \omega_m M_{ss} \left[\underline{I}_r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + a^2 \underline{I}_r \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + a \underline{I}_r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ + j \omega L_{ss} \underline{I}_s - 0,5 j \omega M_{ss} a^2 \underline{I}_s - 0,5 j \omega M_{ss} a \underline{I}_s \\ + j \omega_r M_{ss} \left[\underline{I}_r \cos(\theta) + a^2 \underline{I}_r \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + a \underline{I}_r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

Equació de rotor:

$$\begin{aligned} 0 = R_r \underline{I}_r + \omega_m M_{ss} \left[\underline{I}_s \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + a^2 \underline{I}_s \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + a \underline{I}_s \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ + j \omega M_{ss} \left[\underline{I}_s \cos \theta + a^2 \underline{I}_s \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + a \underline{I}_s \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ + j \omega_r L_{rr} \underline{I}_r - 0,5 j \omega_r M_{ss} a^2 \underline{I}_r - 0,5 j \omega_r M_{ss} a \underline{I}_r \end{aligned}$$

Aquestes equacions es poden simplificar notablement. Tenint en compte que

$$L_{ss} = L_{ls} + M_{ss}$$

$$L_{rr} = L_{lr} + M_{ss}$$

Els termes de les equacions de l'estator i del rotor

$$j L_{ss} \omega \underline{I}_s - 0,5 j M_{ss} \omega a^2 \underline{I}_s - 0,5 j M_{ss} \omega a \underline{I}_s$$

$$j L_{rr} \omega_r \underline{I}_r - 0,5 j M_{ss} \omega_r a^2 \underline{I}_r - 0,5 j M_{ss} \omega_r a \underline{I}_r$$

queden, respectivament:

$$j \omega L_{ls} \underline{I}_s + j \omega M_{ss} \underline{I}_s - 0,5 j \omega M_{ss} a^2 \underline{I}_s - 0,5 j \omega M_{ss} a \underline{I}_s = j \omega L_{ls} \underline{I}_s + \frac{3}{2} j \omega M_{ss} \underline{I}_s$$

$$j \omega_r L_{lr} \underline{I}_r + j \omega_r M_{ss} \underline{I}_r - 0,5 j \omega_r M_{ss} a^2 \underline{I}_r - 0,5 j \omega_r M_{ss} a \underline{I}_r = j \omega_r L_{lr} \underline{I}_r + \frac{3}{2} j \omega_r M_{ss} \underline{I}_r$$

Anomenant $M = \frac{3}{2} M_{ss}$ tenim, respectivament:

$$j \omega L_{ls} \underline{I}_s + \frac{3}{2} j \omega M_{ss} \underline{I}_s = j \omega (L_{ls} + M) \underline{I}_s$$

$$j \omega_r L_{lr} \underline{I}_r + \frac{3}{2} j \omega_r M_{ss} \underline{I}_r = j \omega_r (L_{lr} + M) \underline{I}_r$$

Per altra banda, a l'equació d'estator i a la del rotor surten el termes, respectivament:

$$\underline{I}_r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + a^2 \underline{I}_r \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + a \underline{I}_r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underline{I}_s \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + a^2 \underline{I}_s \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + a \underline{I}_s \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sabent que $i_r(t) = \sqrt{2} I_r \cos(\omega_r t + \varphi_{IR})$ i que $\theta = \omega_m t + \theta_0$ estem davant d'un producte de dues magnituds sinusoidals de diferent pulsació:

$$\sqrt{2} M_1 \cos(\omega_1 t + \alpha) \sqrt{2} M_2 \cos(\omega_2 t + \beta) = 2 M_1 M_2 \frac{\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \alpha + \beta) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \alpha - \beta)}{2}$$

O bé en notació fasorial:

$\underline{M}_1 \cdot \underline{M}_2 = \frac{M_1 M_2}{\sqrt{2}} \left(e_+^{j(\alpha+\beta)} + e_-^{j(\alpha-\beta)} \right)$ on el subíndex + o - indica que les pulsacions corresponents se sumen o resten. Agafant $\underline{\theta} = 1 \cdot e^{j(\theta_0 + \frac{\pi}{2})}$ com a fasor representatiu de $\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos\left(\omega_m t + \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right)$ tenim

$$\begin{aligned} \underline{I}_r^{(j\omega)} &= I_r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + a^2 I_r \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + a I_r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= I_r \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\theta} + a^2 I_r a \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\theta} + a I_r a^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\theta} = \\ &= \frac{I_r}{2} \left(e_+^{j(\varphi_{IR} + \theta_0 + \frac{\pi}{2})} + e_-^{j(\varphi_{IR} - \theta_0 - \frac{\pi}{2})} \right) + \frac{I_r}{2} \left(e_+^{j(\varphi_{IR} + \theta_0 + \frac{\pi}{2})} + e_-^{j(\varphi_{IR} - \theta_0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} \right) + \frac{I_r}{2} \left(e_+^{j(\varphi_{IR} + \theta_0 + \frac{\pi}{2})} + e_-^{j(\varphi_{IR} - \theta_0 - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} \right) \\ &= \frac{3 I_r}{2} e_+^{j(\varphi_{IR} + \theta_0 + \frac{\pi}{2})} + \frac{3 I_r}{2} \underbrace{\left(e_-^{j(\varphi_{IR} - \theta_0 - \frac{\pi}{2})} + e_-^{j(\varphi_{IR} - \theta_0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} + e_-^{j(\varphi_{IR} - \theta_0 - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} \right)}_{\text{nul}} = j \frac{3 I_r}{2} e_+^{j(\varphi_{IR} + \theta_0)} \end{aligned}$$

La interpretació del resultat és que $\underline{I}_r^{(j\omega)}$ té com a resultat un fasor de mòdul $\frac{3 I_r}{2}$ i angle de fase $\varphi_{IR} + \theta_0 + \frac{\pi}{2}$. A més, la magnitud sinusoidal a la qual representa té una pulsació $\omega_r + \omega_m = \omega$

$$\underline{I}_r^{(j\omega)} = \frac{3}{2} I_r \angle(\varphi_{IR} + \theta_0 + \frac{\pi}{2}) = j \frac{3}{2} I_r \angle(\varphi_{IR} + \theta_0) = j \underline{I}_r^{(\omega)}$$

On $\underline{I}_r^{(\omega)}$ és la representació fasorial del corrent del rotor a la pulsació de la xarxa, és a dir, el que té la mateixa amplitud però a pulsació diferent de la real.

Amb la mateixa metodologia, el terme

$$I_r \cos(\theta) + a^2 I_r \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + a I_r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

passa a valer $\underline{I}_r^{(\omega)}$

L'equació de l'estator

$$\begin{aligned} \underline{V}_s &= R_s \underline{I}_s + \omega_m M_{ss} \left[\underline{I}_r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + a^2 \underline{I}_r \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + a \underline{I}_r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &\quad + j \omega L_{ss} \underline{I}_s - 0,5 j \omega M_{ss} a^2 \underline{I}_s - 0,5 j \omega M_{ss} a \underline{I}_s \\ &\quad + j \omega_r M_{ss} \left[\underline{I}_r \cos(\theta) + a^2 \underline{I}_r \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + a \underline{I}_r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

queda, doncs:

$$\underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + j \omega (L_{ls} + M) \underline{I}_s + j \omega_m M_{ss} \frac{3}{2} \underline{I}_r^{(\omega)} + j \omega_r M_{ss} \frac{3}{2} \underline{I}_r^{(\omega)}$$

Agrupant termes i recordant el valor de M :

$$\underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + j \omega (L_{ls} + M) \underline{I}_s + j (\omega_m + \omega_r) M \underline{I}_r^{(\omega)}$$

$$\underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + j \omega (L_{ls} + M) \underline{I}_s + j \omega M \underline{I}_r^{(\omega)}$$

Noti's que tots els fasors són a pulsació de la xarxa.

Pel que fa al terme del rotor:

$$\begin{aligned} \underline{I}_s^{(j\omega_r)} &= \underline{I}_s \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + a^2 \underline{I}_s \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + a \underline{I}_s \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \underline{I}_s \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\theta} + a^2 \underline{I}_s a^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\theta} + a \underline{I}_s a \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\theta} \\ &= \frac{I_s}{2} \left(e_+^{j(\varphi_{1s} + \theta_0 + \frac{\pi}{2})} + e_-^{j(\varphi_{1s} - \theta_0 - \frac{\pi}{2})} \right) + \frac{I_s}{2} \left(e_+^{j(\varphi_{1s} + \theta_0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} + e_-^{j(\varphi_{1s} - \theta_0 - \frac{\pi}{2})} \right) \\ &\quad + \frac{I_s}{2} \left(e_+^{j(\varphi_{1s} + \theta_0 - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} + e_-^{j(\varphi_{1s} - \theta_0 - \frac{\pi}{2})} \right) = \\ &= \frac{3 I_s}{2} e_-^{j(\varphi_{1s} - \theta_0 - \frac{\pi}{2})} + \frac{3 I_s}{2} \underbrace{\left(e_+^{j(\varphi_{1s} + \theta_0 + \frac{\pi}{2})} + e_+^{j(\varphi_{1s} + \theta_0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} + e_+^{j(\varphi_{1s} + \theta_0 - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} \right)}_{\text{nul}} = -j \frac{3 I_s}{2} e_-^{j(\varphi_{1s} - \theta_0)} \end{aligned}$$

La interpretació del resultat és que $\underline{I}_s^{(j\omega_r)}$ té com a resultat un fasor de mòdul $\frac{3 I_s}{2}$ i angle de fase $\varphi_{1s} - \theta_0 - \frac{\pi}{2}$. A més, la magnitud sinusoidal a la qual representa té una pulsació $\omega - \omega_m = \omega_r$

$$\underline{I}_s^{(j\omega_r)} = \frac{3}{2} I_s \angle_{(\varphi_{1s} - \theta_0 - \frac{\pi}{2})} = -j \frac{3}{2} I_s \angle_{(\varphi_{1s} - \theta_0)} = -j \underline{I}_s^{(\omega_r)}$$

On $\underline{I}_s^{(\omega_r)}$ és la representació fasorial del corrent de l'estator a la pulsació del rotor, és a dir, el que té la mateixa amplitud però a pulsació diferent de la real.

Amb la mateixa metodologia, el terme

$$\underline{I}_s \cos(\theta) + a^2 \underline{I}_s \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + a \underline{I}_s \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

passa a valer $\underline{I}_s^{(\omega_r)}$

L'equació del rotor

$$\begin{aligned} 0 &= R_r \underline{I}_r + \omega_m M_{ss} \left[\underline{I}_s \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + a^2 \underline{I}_s \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + a \underline{I}_s \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &\quad + j \omega M_{ss} \left[\underline{I}_s \cos \theta + a^2 \underline{I}_s \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + a \underline{I}_s \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &\quad + j \omega_r L_{rr} \underline{I}_r - 0,5 j \omega_r M_{ss} a^2 \underline{I}_r - 0,5 j \omega_r M_{ss} a \underline{I}_r \end{aligned}$$

queda, doncs:

$$0 = R_r \underline{I}_r + j \omega_r (L_{lr} + M) \underline{I}_r - j \omega_m M_{ss} \frac{3}{2} \underline{I}_s^{(\omega_r)} + j \omega M_{ss} \frac{3}{2} \underline{I}_s^{(\omega_r)}$$

Recordant el valor de M :

$$0 = R_r \underline{I}_r + j \omega_r (L_{lr} + M) \underline{I}_r + j (\omega - \omega_m) M \underline{I}_s^{(\omega_r)}$$

Noti's que tots els fasors són a la pulsació del rotor ($\omega_r = \omega - \omega_m$)

Reordenant termes tant de l'equació de l'estator com de la del rotor

$$\begin{cases} \underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + j \omega L_{ls} \underline{I}_s + j \omega M (\underline{I}_s + \underline{I}_r^{(\omega)}) \\ 0 = R_r \underline{I}_r + j \omega_r L_{lr} \underline{I}_r + j \omega_r M (\underline{I}_s^{(\omega_r)} + \underline{I}_r) \end{cases}$$

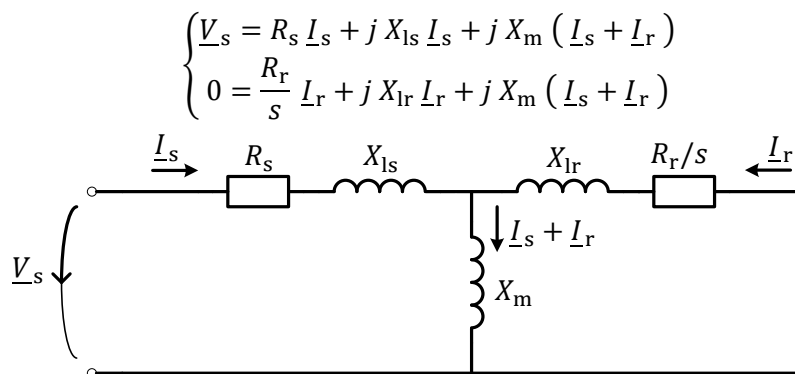
Dividint l'equació del rotor pel lliscament $s = \frac{\omega - \omega_m}{\omega} = \frac{\omega_r}{\omega}$ s'obté:

$$\begin{cases} \underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + j \omega L_{ls} \underline{I}_s + j \omega M (\underline{I}_s + \underline{I}_r^{(\omega)}) \\ 0 = \frac{R_r}{s} \underline{I}_r + j \omega L_{lr} \underline{I}_r + j \omega M (\underline{I}_s^{(\omega_r)} + \underline{I}_r) \end{cases}$$

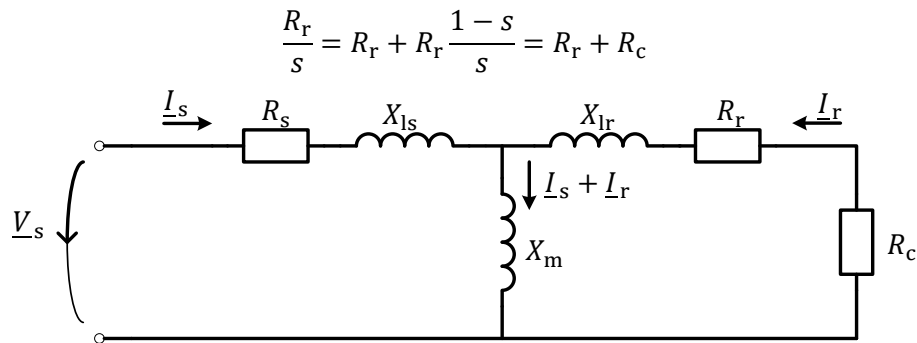
Atès que totes les reactàncies han quedat en funció de la pulsació de la xarxa, podem fer abstracció de quines són les pulsacions reals del circuit, i considerar que tots els corrents i tensions són a la pulsació de la xarxa, obtenint-se

$$\begin{cases} \underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + j \omega L_{ls} \underline{I}_s + j \omega M (\underline{I}_s + \underline{I}_r) \\ 0 = \frac{R_r}{s} \underline{I}_r + j \omega L_{lr} \underline{I}_r + j \omega M (\underline{I}_s + \underline{I}_r) \end{cases}$$

A partir d'aquestes dues últimes equacions es pot deduir l'esquema equivalent per fase (molt similar al d'un transformador amb el secundari curtcircuitat):



Sovint, per tal de donar significat físic a $\frac{R_r}{s}$ es descompon en dues parts, a saber, R_r que la potència que dissipa en passar-hi el corrent del rotor representa les pèrdues al coure del rotor i la resta, R_c , que representa la potència que es converteix a mecànica:



La potència mecànica a l'eix de la màquina és, doncs, la potència que es dissipa a R_c multiplicada per tres (ja que a l'esquema equivalent només es considera una de les tres fases):

$$P_{mec} = \Gamma_m \omega_m = \Gamma_m (\omega - \omega_r) = \Gamma_m (\omega - s \omega) = \Gamma_m \omega (1 - s) = 3 R_c I_r^2$$

$$P_{mec} = 3 R_r \frac{1-s}{s} I_r^2$$

I, per tant, l'expressió del parell motor és

$$\Gamma_m = \frac{P_{mec}}{\omega_m} = \frac{3 R_r \frac{1-s}{s} I_r^2}{\omega (1-s)} = \frac{3}{\omega} \frac{R_r}{s} I_r^2$$

Cal recordar que fins el moment s'ha considerat una màquina d'un sol parell de pols per simplicitat. En cas que la màquina tingui p parells de pols, cal modificar les expressions convenientment.

La velocitat de sincronisme (a la qual gira el camp magnètic) és

$$\omega_s = \frac{\omega}{p}$$

On ω és, com sempre, la pulsació de la xarxa.

El parell motor cal multiplicar-lo per p :

$$\Gamma_m = \frac{3 p}{\omega} \frac{R_r}{s} I_r^2$$

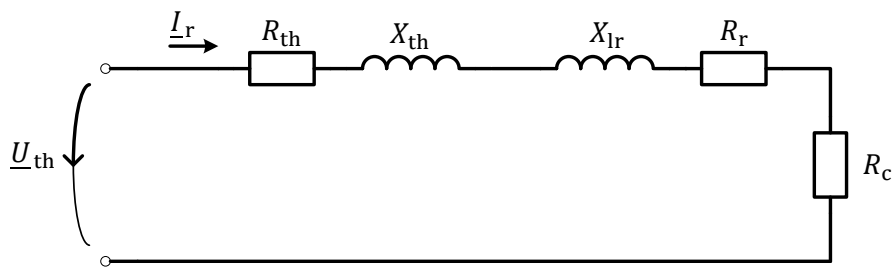
El lliscament és:

$$s = \frac{\omega - p \omega_m}{\omega} = \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s}$$

La potència, però, dona el mateix considerant els p parells de pols o bé considerant que només hi ha un parell de pols:

$$\omega_{p=p} = \frac{\omega_{p=1}}{p} \quad \Gamma_{p=p} = p \cdot \Gamma_{p=1} \quad P = \Gamma_{p=p} \cdot \omega_{p=p} = \Gamma_{p=1} \cdot \omega_{p=1}$$

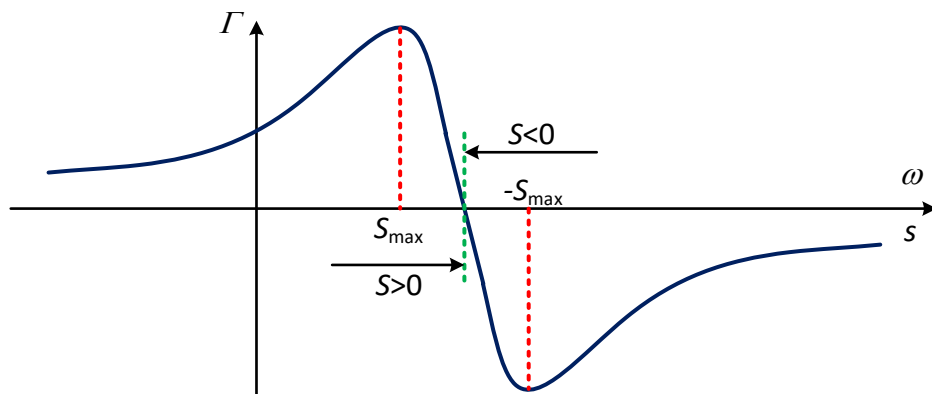
Per tal de resoldre el circuit equivalent de la màquina d'inducció molts cops i per simplificar s'usa l'equivalent Thévenin considerant l'estator i la part de magnetització (vist des del rotor):



$$\underline{U}_{th} = \underline{V}_s \frac{j X_m}{(R_s + j X_{ls}) + j X_m}$$

$$\underline{Z}_{th} = R_{th} + j X_{th} = \frac{(R_s + j X_{ls}) j X_m}{(R_s + j X_{ls}) + j X_m}$$

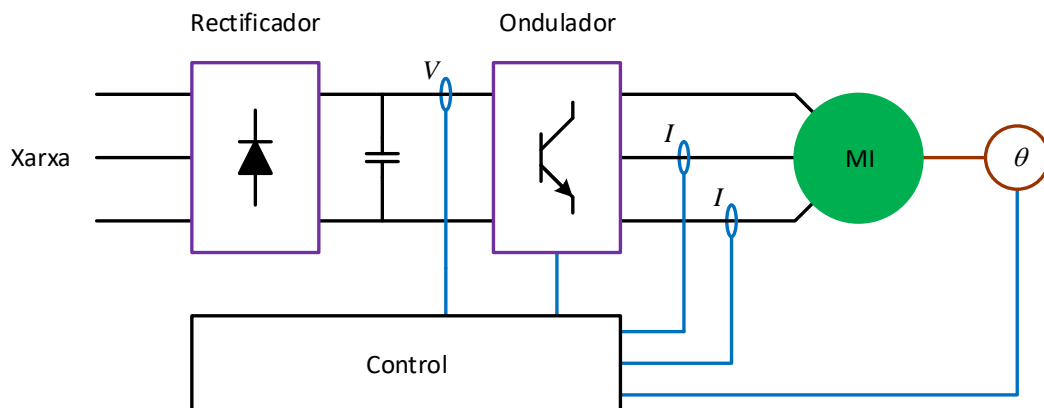
És clar que les expressions anteriors són sense tenir en consideració les pèrdues al ferro. De manera similar a l'anàlisi de transformadors, si es volen tenir en compte les pèrdues al ferro es pot usar una resistència equivalent R_{Fe} en paral·lel amb la X_m . Les expressions per trobar l'equivalent Thévenin s'han de modificar oportunament.



L'expressió del lliscament en el qual es produeix parell màxim és:

$$s_{max} = \pm \frac{R_r}{\sqrt{R_{th}^2 + (X_{th} + X_{lr})^2}}$$

Alimentació amb convertidor estàtic. Variació de velocitat



Alimentant el motor amb un equip d'electrònica de potència es poden sintetitzar tensions i corrents arbitraris, de forma que es pot controlar el parell i la velocitat del motor a voluntat.

Existeixen diferents mètodes de control que permeten diferents graus de prestacions dinàmiques i estàtiques. Els més freqüents són V/f, vectorials i DTC (Direct Torque Control).

Variació de velocitat V/f

Va ser el primer mètode de variació de velocitat que es va aplicar al motor d'inducció. Es caracteritza per una dinàmica limitada.

Depenent de la velocitat que es vulgui aconseguir es poden distingir dues zones de treball:

Zona de parell (màxim) constant, a velocitats inferiors a la nominal.

Zona de debilitament de camp, a velocitats superiors a la nominal.

Zona de parell (màxim) constant

Suposem la resistència de l'estator negligible, així com les pèrdues en el ferro i les mecàniques. Per tal de facilitar la comprensió se suposa un parell de pols ($\omega_{sN} = 2 \pi f_N$ $p = 1$).

En aquestes condicions totes les pèrdues de la màquina són les del coure del rotor:

$$P_{Cu} = 3 R_r I_{rN}^2$$

que són totes les pèrdues que la màquina admet tèrmicament en règim estacionari i servei continu (les altres pèrdues s'han considerat negligibles).

Per tal de regular velocitat caldrà sintetitzar una xarxa de freqüència variable.

Suposem que volem regular velocitat fent el parell nominal. En condicions nominals (U_N, f_N) hi haurà un corrent en el rotor de valor nominal (I_{rN}) i una pulsació $\omega_{rN} = s_N \omega_{sN} = \omega_{sN} - \omega_N$.

El parell nominal en condicions nominals s'obté mercès a treballar amb les condicions nominals de rotor:

$$\Gamma_N = 3 \frac{R_r (1 - s_N) I_{rN}^2}{s_N \omega_N} = 3 \frac{R_r (1 - s_N) I_{rN}^2}{s_N \omega_{sN} (1 - s_N)} = 3 \frac{R_r I_{rN}^2}{s_N \omega_{sN}} = 3 \frac{R_r I_{rN}^2}{\omega_{rN}}$$

A una freqüència f el mateix parell s'obté amb un lliscament s

$$\Gamma_N = 3 \frac{R_r I_r^2}{s \omega_s} = 3 \frac{R_r I_r^2}{\omega_r}$$

Sembla que hi hagi graus de llibertat a l'hora de bescanviar corrent per lliscament o pulsació rotòrica. Però no serà així. El corrent de rotor no pot superar el nominal, per motiu del límit tèrmic. Més endavant es veurà que tampoc pot ser menor que el nominal, per motiu de límit magnètic. Admetem que el corrent del rotor per a fer el parell nominal ha de ser el nominal.

$$\Gamma_N = 3 \frac{R_r I_{rN}^2}{s \omega_s} = 3 \frac{R_r I_{rN}^2}{\omega_r}$$

Llavors necessàriament

$$s_N \omega_{sN} = \omega_{rN} = s \omega_s = \omega_r$$

La mateixa metodologia es podria aplicar a qualsevol punt de treball (parell-velocitat) a tensió i freqüència nominals. És a dir, que si cal fer el mateix parell en condicions de tensió i freqüència no nominals que amb les nominals, de forma que la velocitat sigui diferent, amb la condició de que es manté el valor eficaç del corrent de rotor en ambdues situacions, la pulsació del rotor ha de ser la mateixa.

Ja s'ha vist prèviament que el corrent de rotor no pot ser major que el nominal, pel límit de les pèrdues. Anem a veure que tampoc pot ser menor, per límits magnètics.

En condicions nominals, la tensió de magnetització val

$$\underline{V}_{mgN} = \underline{I}_{rN} \left(\frac{R_r}{s_N} + j 2 \pi f_N L_{lr} \right)$$

i el corrent de magnetització

$$\underline{I}_{mgN} = \frac{\underline{V}_{mgN}}{j 2 \pi f_N M} = \frac{\underline{I}_{rN} \left(\frac{R_r}{s_N} + j 2 \pi f_N L_{lr} \right)}{j 2 \pi f_N M}$$

$$I_{mgN} = \frac{V_{mgN}}{2 \pi f_N M} = \frac{I_{rN} \left| \frac{R_r}{s_N} + j 2 \pi f_N L_{lr} \right|}{2 \pi f_N M} = \frac{I_{rN} |R_r + j 2 \pi L_{lr} s_N f_N|}{2 \pi f_N M s_N}$$

Se suposa que aquest corrent de magnetització és (o està proper al) límit magnètic del material. Per tant, no pot ser incrementat. Tampoc convé disminuir-lo atès que per assolir el mateix parell, si el flux disminueix caldrà incrementar els corrents i, per tant, les pèrdues.

Així en una condició de freqüència i tensió diferents de la nominal, per a desenvolupar el parell nominal ens convé mantenir el corrent del rotor i el flux de la màquina (corrent magnetitzant) als seus valor nominals

$$I_{mg} = I_{mgN} = \frac{V_{mg}}{2 \pi f M} = \frac{I_{rN} |R_r + j 2 \pi L_{lr} s f|}{2 \pi M s f} = \frac{I_{rN} |R_r + j 2 \pi L_{lr} s_N f_N|}{2 \pi M s_N f_N}$$

La igualtat es compleix quan $s_N f_N = s f$, o el que és el mateix, quan

$$\omega_r = \omega_{rN}$$

Amb la mateixa metodologia, però aplicada a qualsevol altre parell, s'arriba a la conclusió que el valor de la pulsació del rotor quan s'alimenta a una tensió i freqüència tals que la velocitat varia s'ha de mantenir igual que el corresponent al mateix parell a la freqüència i tensió nominals.

En condicions nominals la tensió a l'estator és la nominal.

$$\underline{V}_N = \underline{V}_{mgN} + j 2 \pi f_N L_{ls} (\underline{I}_{rN} + \underline{I}_{mgN}) = j 2 \pi f_N M \underline{I}_{mgN} + j 2 \pi f_N L_{ls} (\underline{I}_{rN} + \underline{I}_{mgN})$$

A tensió i freqüència diferents i, per tant, a velocitat diferent, però mantenint el parell nominal, com volem mantenir tant el flux de la màquina com el corrent de rotor als valor nominals, la tensió a l'estator val

$$\underline{V} = j 2 \pi f M \underline{I}_{mgN} + j 2 \pi f L_{ls} (\underline{I}_{rN} + \underline{I}_{mgN})$$

Dividint les dues expressions es troba la relació entre tensions i freqüències

$$\frac{V}{V_N} = \frac{f}{f_N} \rightarrow \frac{V}{f} = \frac{V_N}{f_N} = \text{constant}$$

Zona de debilitament de camp

A partir de la tensió i freqüència nominals, si es vol incrementar la velocitat ja no es pot mantenir el rati tensió freqüència. Normalment el convertidor estàtic no pot donar més tensió que la nominal, com a conseqüència de la limitació de tensió de la xarxa que l'alimenta. Però si ho poguéss fer, estaríem forçant l'aïllament de la màquina.

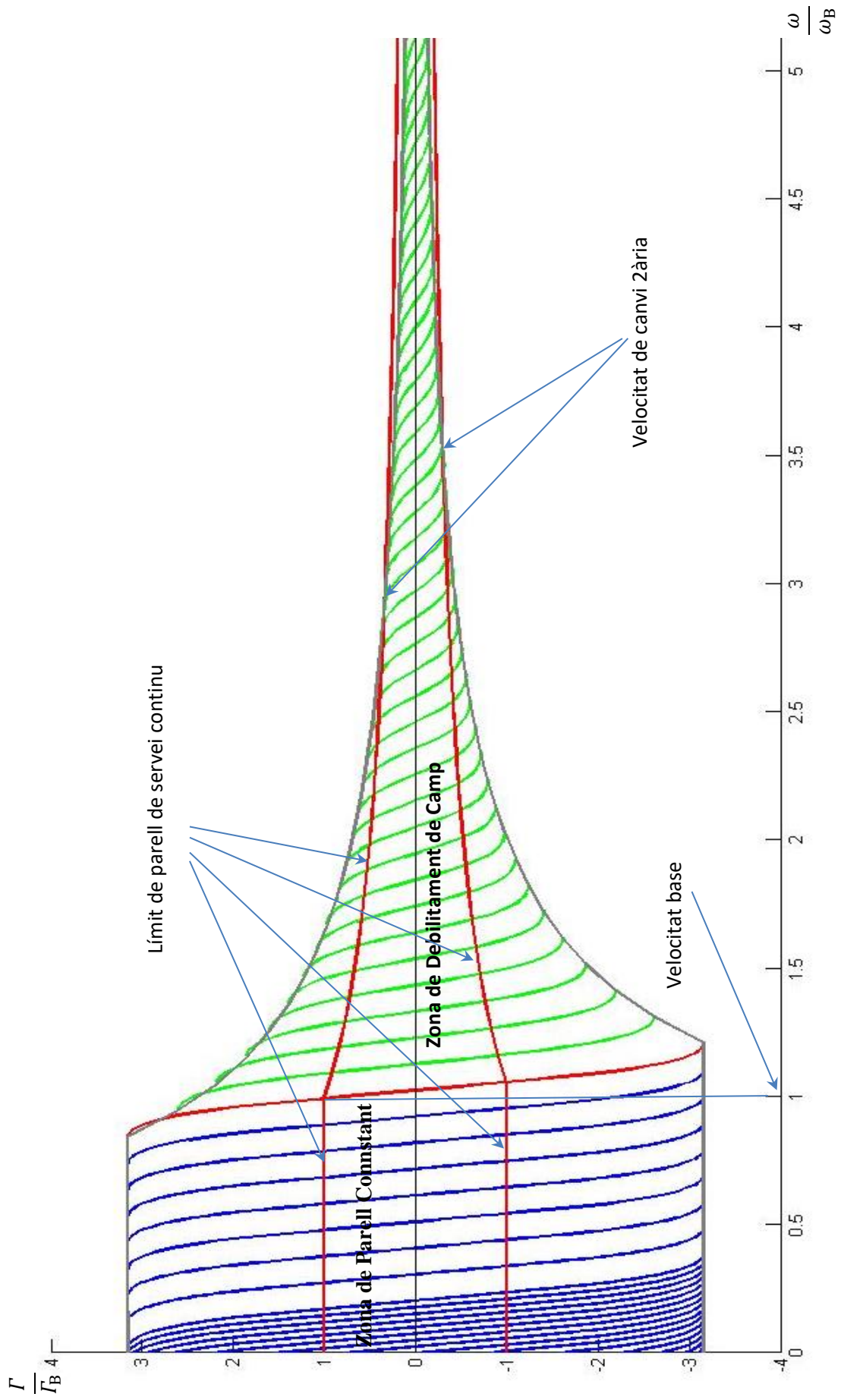
Com a conseqüència, per sobre de la velocitat nominal, en la mesura en que la freqüència augmenta, la magnetització de la màquina disminueix de forma inversament proporcional. La reducció de camp inversa amb la freqüència es pot deduir directament de l'esquema equivalent. A tensió nominal (màxima), en la mesura en que augmenta la freqüència, ho fa la reactància de

magnetització; el corrent de magnetització i , per tant, el flux, decreixen inversament a la freqüència.

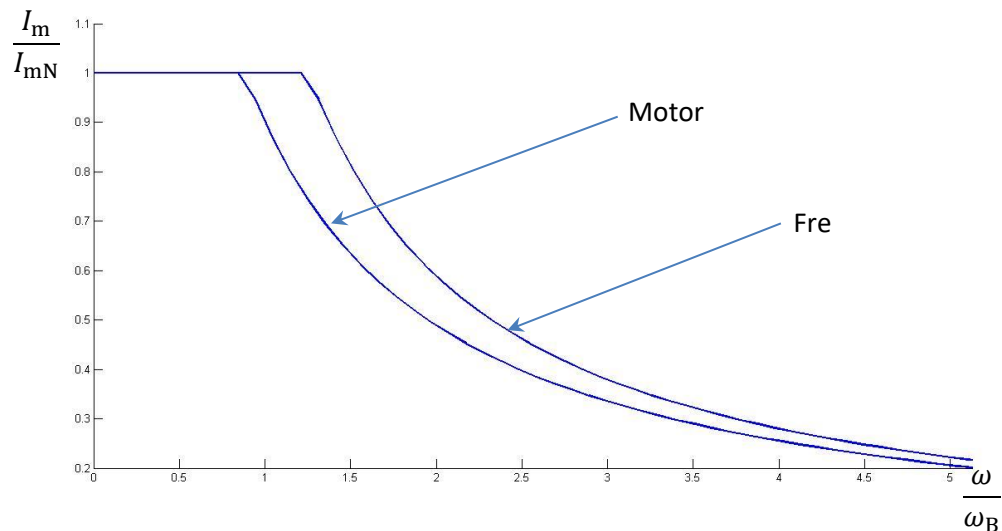
A la freqüència, velocitat, parell i tensió nominals del motor se'ls sol anomenar valors base quan es tracta d'accionaments a velocitat variable.

Amb la hipòtesi de resistència de rotor negligible, les corbes característiques a diferents freqüències es mostren, en pu dels valors base, en la figura situada a la pàgina següent per major claredat.

Les corbes de parell blaves corresponen a la zona de parell constant (sense debilitament de camp). La corba vermella vertical és la de parell a freqüència i tensions nominals. En servei continu el parell màxim i mínim és el limitat per les corbes vermelles de parell nominal. En la zona de parell constant són de valor constant igual al parell nominal (amb el signe que correspongui), mentre que per sobre de la freqüència nominal el parell màxim de servei continu decreix amb la freqüència (velocitat). En la zona de parell constant, per tal de fer un parell a una certa velocitat, la pulsació del rotor ha de ser la mateixa que la que correspon al mateix parell en condicions nominals de freqüència (i tensió). En la zona de debilitament de camp, en la mesura en que la freqüència (velocitat) augmenta, per a desenvolupar un cert parell, cal una pulsació rotòrica major quan major és la freqüència. Així arriba un punt on el parell màxim (proporcional al quadrat del rati tensió/freqüència) és menor que la corba de corrent rotòric constant (nominal), que depèn inversament de la freqüència. El resultat és que per sobre d'una freqüència (velocitat) de canvi, de vegades anomenada velocitat de canvi secundària, el parell màxim desenvolupable en servei continu és inversament proporcional al quadrat de la freqüència (velocitat). Entre la velocitat (freqüència) base i la velocitat de canvi secundària el parell màxim de servei continu és inversament proporcional a la freqüència. Entre velocitat (freqüència) nul·la i velocitat base el parell màxim de servei continu és constant i igual al nominal.



El corrent de magnetització (flux) és lleugerament major fent de fre que de motor amb debilitament de camp. En la figura es mostra el corrent (flux) de magnetització desenvolupant el parell màxim de servei continu.

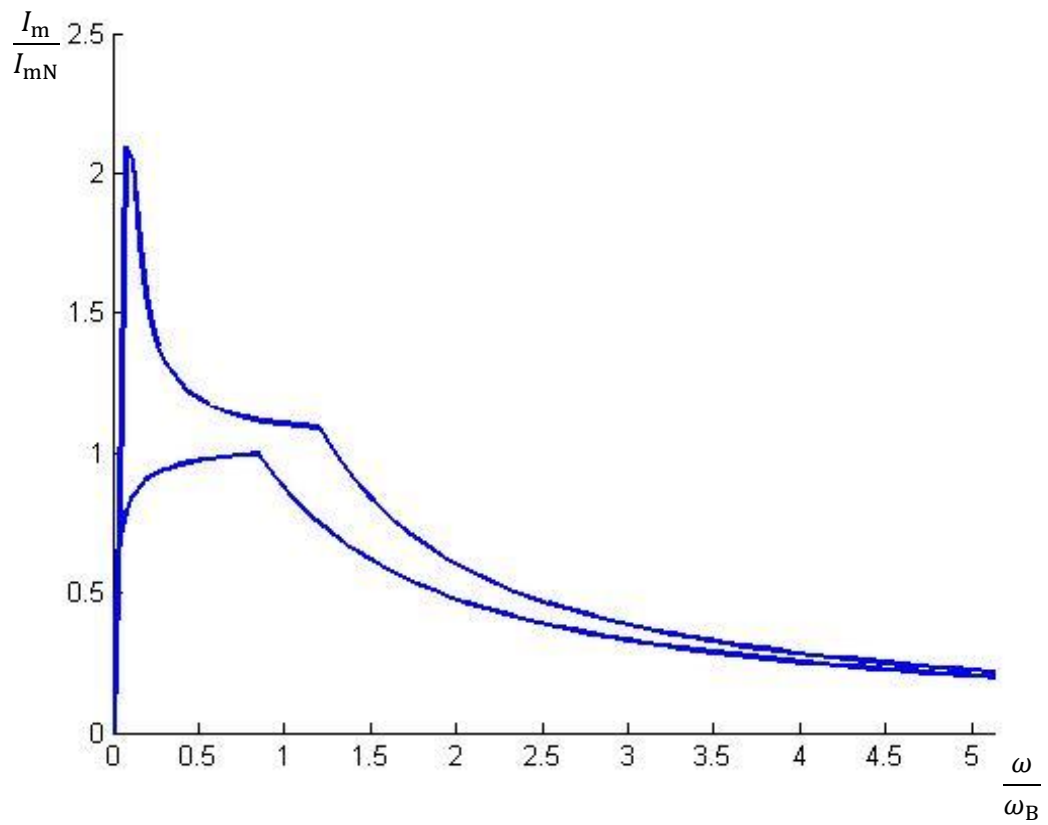
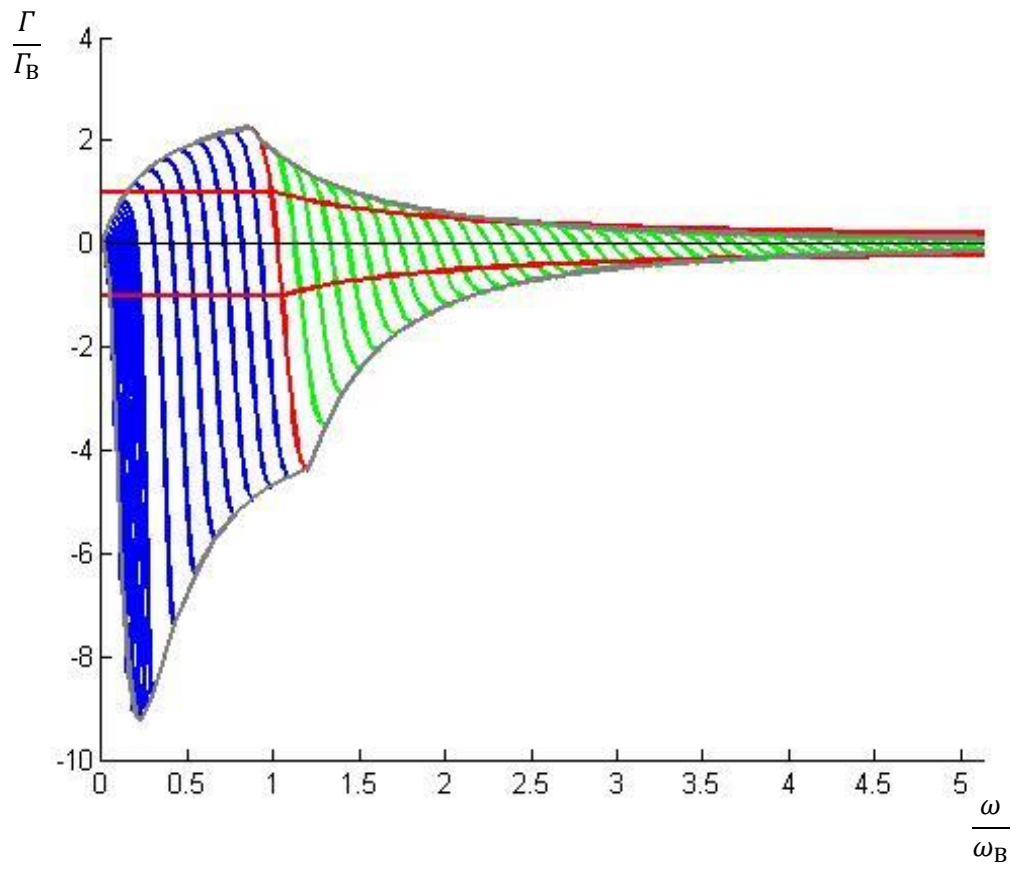


Influència de la resistència d'estator

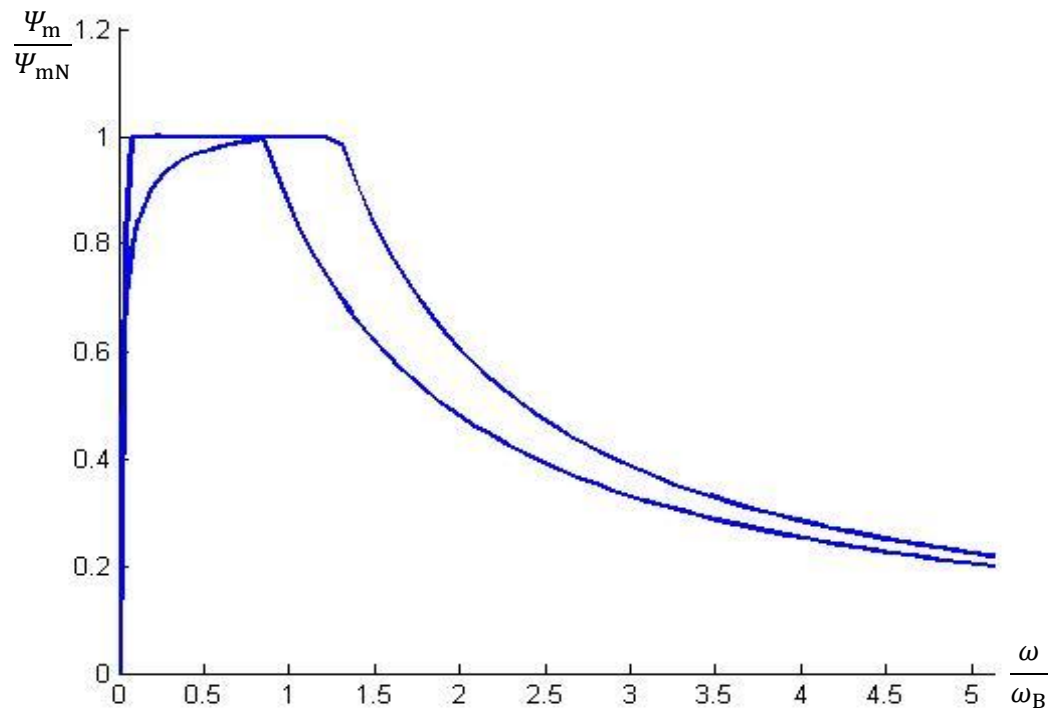
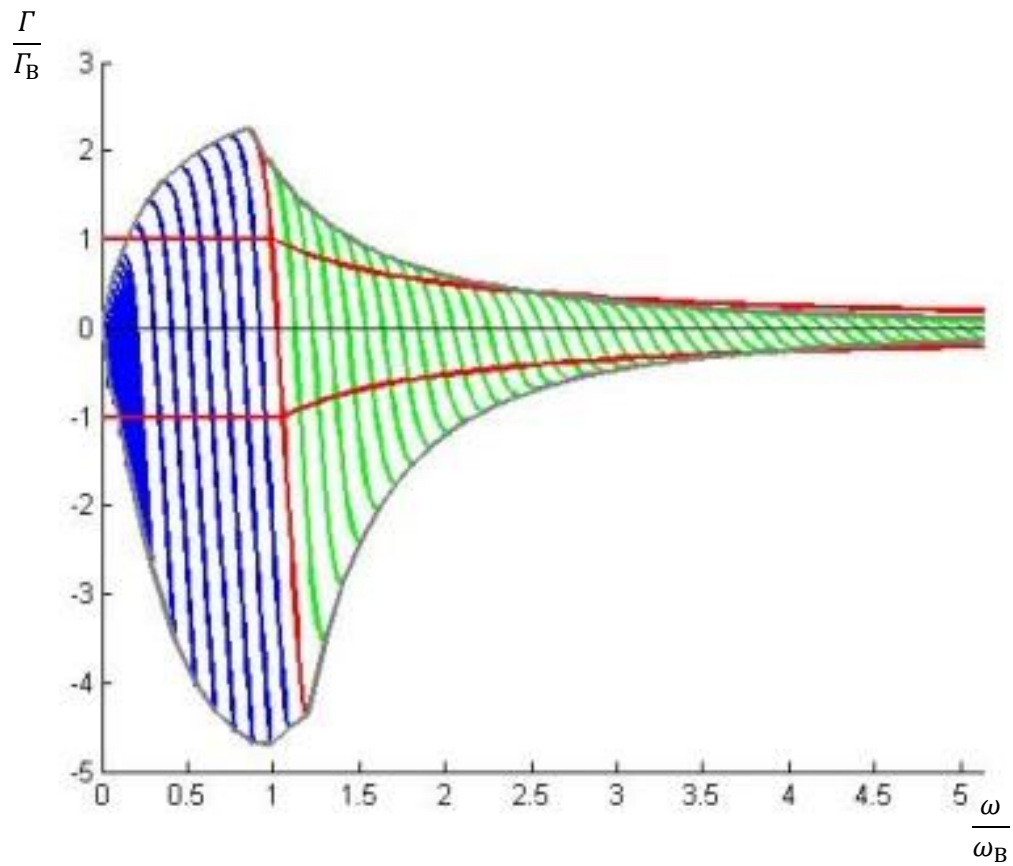
Si la resistència d'estator és no nul·la, com lògicament passa en la realitat, la caiguda de tensió que genera no és proporcional a la freqüència, com passa en la inductància de dispersió de l'estator. El resultat és que fent de motor, en mantenir la relació tensió freqüència constant, per a molt baixes velocitats (freqüències) la màquina es desmagnetitza. La tensió de magnetització es veu disminuïda per un terme constant (a igualtat de corrents), no proporcional a la freqüència, de forma que el corrent magnetitzant i, per tant, el flux de la màquina és menor.

Per contra, si la màquina està frenant, la caiguda de tensió a la resistència tendeix a sobre-magnetitzar, atès que la tensió a la reactància de magnetització creix en el terme de caiguda de tensió a la resistència, que no és proporcional a la freqüència. Si la màquina entra en saturació el corrent de magnetització creix, però el flux creix de forma molt menor. Per tant, un model lineal tendria a sobreestimar la capacitat de frenada a baixes freqüències.

La característica de funcionament, considerant la influència de la resistència d'estator, i suposant que treballant com a fre la màquina manté la característica lineal de saturació es mostra en les següents figures. S'aprecia clarament un increment de corrent de magnetització, per sobre del nominal, del que cal esperar saturació magnètica.

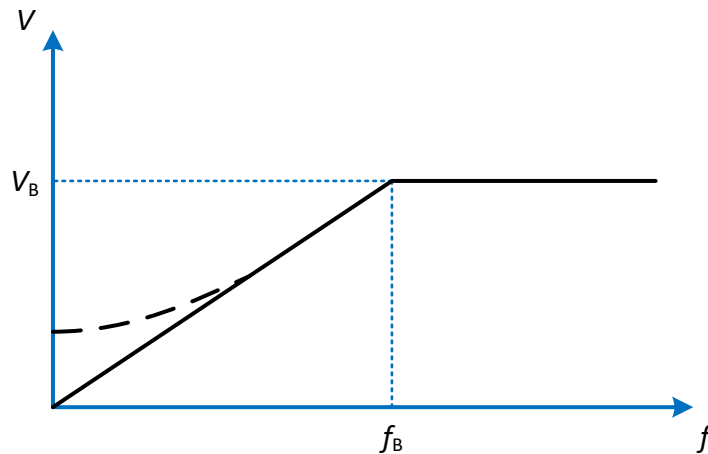


Si es modelitza de forma simple la saturació magnètica, la capacitat de parell màxim a velocitats baixes es redueix de forma notable



Compensació de la resistència d'estator

La llei de control ideal per a freqüències per sota de la base és $\frac{V}{f} = \text{constant}$, però a baixes freqüències, l'existència de la resistència de l'estator provoca que el parell decreixi de forma significativa, com a conseqüència de la pèrdua de magnetització. Habitualment aquest fenomen es comença a apreciar a partir de velocitats al voltant del 10% de la velocitat base. Es pot mitigar parcialment modificant la llei de tensió-freqüència constant aportant una sobre-tensió a freqüències baixes, de forma que no es perdi tanta magnetització.



Una possible llei de formació de la tensió addicional per al treball com a motor és

$$V = V_B \frac{f}{f_B} + V_0 \left(1 - \frac{f}{f_B} \right)$$

En cas de treballar com a generador, el convenient és reduir la tensió, de forma que la tensió addicional és negativa. Òbviament el límit es troba en la tensió nul·la. En aquest cas no es retorna energia de frenada al convertidor, pel que es dissipa en el motor. De fet, si la tensió és nul·la el convertidor no pot subministrar reactiva al motor, pel que aquest no estarà magnetitzat i no frenarà.

Amb la modificació adient de la llei tensió freqüència constant es pot rebaixar el límit pràctic de funcionament del 10% al 5% de la freqüència (velocitat) base.

Les següents figures mostren una correcció de valor $V_0 = 2 R_s I_B$

