Màquines Elèctriques

Problemes d'acoblaments i de debanats

Curs 2016-2017

Joan Rull

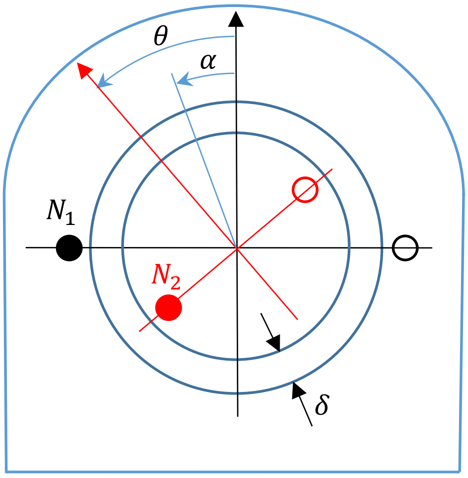
Samuel Galceran

DEE-UPC

ACODEB01

En la figura es representa un transformador monofàsic de relació de transformació variable mitjançant la posició del rotor (θ). La posició es manté fixa mitjançant un mecanisme de pinyó i vis-sens-fi. El rotor pot arribar a donar una volta completa.

Els debanats d'estator i de rotor es poden considerar concentrats en un punt i de resistència negligible i s'estima el flux de dispersió com el 10 % i el 5 % del flux concatenat comú màxim ($\theta = 0$) per a l'estator i rotor respectivament. El ferro es pot considerar de permeabilitat infinita. En ser l'entreferro constant, de valor δ, i en considerar negligibles els efectes de ranura, la distribució de camp en l'entreferro és constant (a trams). El diàmetre mig de l'entreferro és D, mentre que la longitud útil del rotor i de l'estator és l.



$N_1 = 100$

$N_2 = 50$

$\delta = 1\ \mathrm{mm}$

$D = 200\ \mathrm{mm}$

$l = 150\ \mathrm{mm}$

Es connecta l'estator a una font de tensió $U_1 = 230\ \mathrm{V}$ a $50\ \mathrm{Hz}$. En règim estacionari, determineu:

1) Les relacions flux-corrent
2) Les relacions tensió-corrent
3) L'expressió del parell instantani i mig del mecanisme vis-sens-fi

Amb el rotor obert (transformador en buit), determineu:

4) El camp en rotor i estator en funció de l'angle θ
5) El parell del mecanisme vis-sens-fi

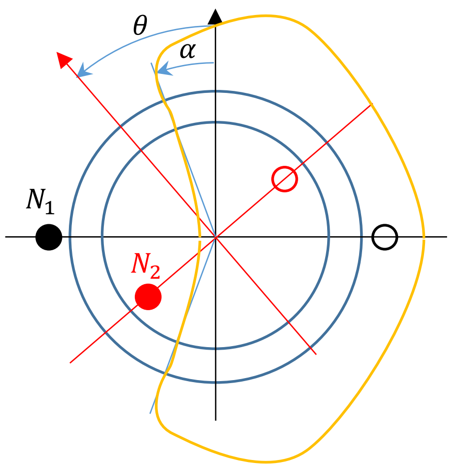
Amb el rotor connectat a una impedància de valor $\underline{Z}_2 = 20 + j\,20\ \Omega$ i amb un angle $\theta = 45º$

6) El camp en rotor i estator
7) El parell mig, màxim i mínim del mecanisme vis-sens-fi

1) Cal determinar la matriu d'inductàncies. En primer lloc suposem que no hi ha flux de dispersió, és a dir, una situació idealitzada on la infinita permeabilitat del ferro fa que tot el flux passi tant pel rotor com per l'estator. Posteriorment es quantificarà la influència de la dispersió, tal i com requereix l'enunciat.

$$L_{11\mathrm{i}} = \left.\frac{\Psi_{1\mathrm{i}}}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad L_{21} = \left.\frac{\Psi_2}{i_1}\right|_{i_2=0}$$

$$\Psi_{1\mathrm{i}} = N_1\,\phi_1 \qquad \Psi_2 = N_2\,\phi_2$$



Per aplicació de la llei d'Ampere sobre el camí groc:

$$2\,H_{1\mathrm{i}}\,\delta = N_1\,i_1$$

$$H_{1\mathrm{i}} = \frac{N_1\,i_1}{2\,\delta}$$

$$B_{1\mathrm{i}} = \mu_0\,H_{1\mathrm{i}} = \mu_0\,\frac{N_1\,i_1}{2\,\delta} = B_{\mathrm{max1i}}$$

Per a tots els angles $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ mentre que el signe (sentit) és contrari per a tots els angles $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

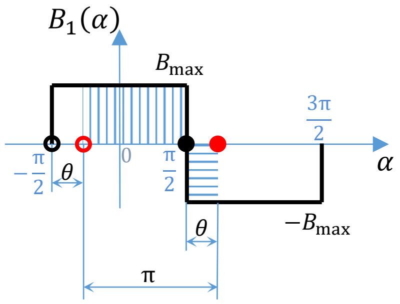
Alternativament també s'hauria pogut trobar la densitat de camp per la via del modelat magnètic. Atesa la simetria, la densitat de camp serà uniforme i en sentit radial en cada semi-entreferro, canviant de sentit en cada hemisferi definit pel debanat:

$$\phi_{1\mathrm{i}} = \frac{N_1\,i_1}{\mathcal{R}} = \frac{N_1\,i_1}{\frac{2\,\delta}{\mu_0}}\,\pi\,\frac{D}{2}\,l$$

$$B_{1\mathrm{i}} = \frac{\pm\phi_{1\mathrm{i}}}{\pi\,\frac{D}{2}\,l} = \mu_0\,\frac{\pm N_1\,i_1}{2\,\delta} = \pm B_{\mathrm{max1i}}$$

$$L_{11\mathrm{i}} = \left.\frac{\Psi_{1\mathrm{i}}}{i_1}\right|_{i_2=0} = \frac{N_1\,\phi_1}{i_1} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}$$

El flux concatenat pel debanat 2 és una fracció del flux generat pel debanat 1, en funció de la posició θ:



$$\phi_2(\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} B_1(\alpha)\, l\, \frac{D}{2}\, d\alpha = \begin{cases} \mu_0 \dfrac{N_1\, i_1}{2\,\delta}\, l\, \dfrac{D}{2}\, (\pi - 2\theta) & 0 < \theta < \pi \\ \mu_0 \dfrac{N_1\, i_1}{2\,\delta}\, l\, \dfrac{D}{2}\, (-3\pi + 2\theta) & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$L_{21} = \left.\frac{\Psi_2}{i_1}\right|_{i_2=0} = \frac{N_2\, \phi_2}{i_1} = \begin{cases} \dfrac{N_2\, N_1}{\mathcal{R}}\, \dfrac{\pi - 2\theta}{\pi} & 0 < \theta < \pi \\ -\dfrac{N_2\, N_1}{\mathcal{R}}\, \dfrac{3\pi - 2\theta}{\pi} & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

El canvi de signe és degut a que per angles $\pi < \theta < 2\pi$ el flux concatenat pel debanat 2 canvia de sentit, i com a conseqüència, també ho farà la polaritat de la tensió induïda.

De forma anàloga, si s'excita el debanat del rotor, sense corrent en el de l'estator

$$L_{22i} = \left.\frac{\Psi_{2i}}{i_2}\right|_{i_1=0} \qquad L_{12} = \left.\frac{\Psi_1}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

$$\phi_{2i} = \frac{N_2\, i_2}{\mathcal{R}} = \frac{N_2\, i_2}{\dfrac{2\,\delta}{\mu_0}}\, \pi\, \frac{D}{2}\, l$$

$$B_{2i} = \frac{\pm\phi_{2i}}{\pi\, \dfrac{D}{2}\, l} = \mu_0\, \frac{\pm N_2\, i_2}{2\,\delta} = \pm B_{\max 2}$$

$$L_{22i} = \left.\frac{\Psi_{2i}}{i_2}\right|_{i_1=0} = \frac{N_2\, \phi_{2i}}{i_2} = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$

$$\phi_1(\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}-\theta} B_2(\alpha)\, l\, \frac{D}{2}\, d\alpha = \begin{cases} \mu_0 \dfrac{N_2\, i_2}{2\,\delta}\, l\, \dfrac{D}{2}\, (\pi - 2\theta) & 0 < \theta < \pi \\ \mu_0 \dfrac{N_2\, i_2}{2\,\delta}\, l\, \dfrac{D}{2}\, (-3\pi + 2\theta) & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$L_{12} = \left.\frac{\Psi_1}{i_2}\right|_{i_1=0} = \frac{N_1\, \phi_2}{i_2} = \begin{cases} \dfrac{N_1\, N_2}{\mathcal{R}}\, \dfrac{\pi - 2\theta}{\pi} & 0 < \theta < \pi \\ -\dfrac{N_1\, N_2}{\mathcal{R}}\, \dfrac{3\pi - 2\theta}{\pi} & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

Lògicament $L_{21} = L_{12}$

La presència del flux de dispersió s'ha quantificat com del 10 % i el 5 % respectivament del flux ideal, per tant

$$L_{11} = 1{,}1 \cdot L_{11\mathrm{i}} = 1{,}1\ \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}$$
$$L_{22} = 1{,}05 \cdot L_{22\mathrm{i}} = 1{,}05\ \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$

Les relacions flux-corrent són:

$$[\,\boldsymbol{\Psi}\,] = [\,\boldsymbol{L}\,]\,[\,\boldsymbol{i}\,]$$

Per tal de simplificar la notació limitem l'angle al primer hemisferi, atès que ja sabem que en el segon el signe del terme d'acoblament canvia

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} 1{,}1\ N_1^2 & N_1\ N_2\ \dfrac{\pi - 2\theta}{\pi} \\ N_1\ N_2\ \dfrac{\pi - 2\theta}{\pi} & 1{,}05\ N_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \frac{2\ \delta}{\mu_0\ \pi\ \dfrac{D}{2}\ l} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4\ \pi\ 10^{-7}\ \pi \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}15} = 33774\ \mathrm{H}^{-1}$$

$$L_{11} = \frac{1{,}1\ N_1^2}{\mathcal{R}} = 0{,}3257\ \mathrm{H}$$

$$L_{22} = \frac{1{,}05\ N_2^2}{\mathcal{R}} = 0{,}0777\ \mathrm{H}$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{N_1\ N_2}{\mathcal{R}}\ \frac{\pi - 2\theta}{\pi} = 0{,}148\ \frac{\pi - 2\theta}{\pi}\ \mathrm{H}$$

Si els corrents són sinusoïdals, els fluxos també ho seran, pel que totes les magnituds es podran representar com a fasors

$$i_1(t) = \sqrt{2}\, I_1\ \cos(\omega\ t + \varphi_1) \quad \rightarrow \quad \underline{I}_1$$
$$i_2(t) = \sqrt{2}\, I_2\ \cos(\omega\ t + \varphi_2) \quad \rightarrow \quad \underline{I}_2$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\Psi}_1 \\ \underline{\Psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

2) Les tensions induïdes, en règim estacionari també seran sinusoïdals, pel que la notació més compacta seguirà essent la fasorial. La funció derivada en notació fasorial és simplement multiplicar per l'operador $j\omega$. En aquest cas les tensions induïdes coincidiran amb les tensions dels debanats, atès que la resistència s'ha negligit:

$$[\,\boldsymbol{u}\,] = \frac{d}{dt}[\,\boldsymbol{\Psi}\,] = \frac{d}{dt}(\,[\,\boldsymbol{L}(\theta)\,]\,[\,\boldsymbol{i}\,]\,) = \frac{d}{d\theta}(\,[\,\boldsymbol{L}(\theta)\,]\,)\,[\,\boldsymbol{i}\,]\ \frac{d\theta}{dt} + [\,\boldsymbol{L}(\theta)\,]\ \frac{d}{dt}[\,\boldsymbol{i}\,]$$

Com el rotor està fixat, la velocitat mecànica és nul·la i el primer terme desapareix.

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \rightarrow [\, \boldsymbol{u} \,] = [\, \boldsymbol{L}(\theta) \,] \, \frac{d}{dt} [\, \boldsymbol{i} \,]$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} [\, \boldsymbol{\Psi} \,] = [\, \boldsymbol{L}(\theta) \,] \, j \, \omega \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = j \, \omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$X_{11} = \omega \, L_{11} = 100 \, \pi \, 0{,}3257 = 102{,}3 \, \Omega$$

$$X_{22} = \omega \, L_{22} = 100 \, \pi \, 0{,}0777 = 24{,}42 \, \Omega$$

$$X_{12} = X_{21} = \omega \, L_{12} = 100 \, \pi \, 0{,}148 \, \frac{\pi - 2\theta}{\pi} = 46{,}51 \, \frac{\pi - 2\theta}{\pi} \, \Omega$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} 102{,}3 & 46{,}51 \, \dfrac{\pi - 2\theta}{\pi} \\ 46{,}51 \, \dfrac{\pi - 2\theta}{\pi} & 24{,}42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

3) El parell del mecanisme vis-sens-fi equilibra el parell electromecànic

$$\Gamma = \frac{\partial W'_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{i}, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{\partial W_{\mathrm{mg}}(\boldsymbol{\Psi}, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \, \boldsymbol{i}^{\boldsymbol{t}} \cdot \frac{d}{d\theta} \boldsymbol{L}(\theta) \cdot \boldsymbol{i}$$

$$\frac{d}{d\theta} \boldsymbol{L}(\theta) = \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} 0{,}3257 & 0{,}148 \, \dfrac{\pi - 2\theta}{\pi} \\ 0{,}148 \, \dfrac{\pi - 2\theta}{\pi} & 0{,}0777 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-2 \cdot 0{,}148}{\pi} \\ \dfrac{-2 \cdot 0{,}148}{\pi} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \, [\, i_1 \quad i_2 \,] \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-2 \cdot 0{,}148}{\pi} \\ \dfrac{-2 \cdot 0{,}148}{\pi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = -0{,}09425 \cdot i_1 \cdot i_2 \ \mathrm{N\,m}$$

El valor mig de l'expressió temporal és correspon en notació fasorial (recordar mesura d'un wattímetre o la potència mitja en monofàsic)

$$\Gamma = -0{,}09425 \, \sqrt{2} \, I_1 \, \cos(\omega t + \varphi_1) \, \sqrt{2} \, I_2 \, \cos(\omega t + \varphi_2) =$$

$$-0{,}09425 \, I_1 \, I_2 \, [\, \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) \,]$$

$$\Gamma_{\mathrm{mig}} = \frac{1}{T} \int_0^T -0{,}09425 \, I_1 \, I_2 \, [\, \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) \,] \, dt$$

$$\Gamma_{\mathrm{mig}} = -0{,}09425 \, \Re\{\underline{I}_1 \, \underline{I}_2^*\} = -0{,}09425 \, I_1 \, I_2 \, cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

4) En estar el rotor en buit $\underline{Z}_2 = \infty$ i $\underline{I}_2 = 0$, fixant la tensió de l'estator com a referència d'angles $\underline{U}_1 = 230$ V

$$\begin{bmatrix} 230 \\ \underline{U}_{20} \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} 102{,}3 & 46{,}51\ \dfrac{\pi - 2\theta}{\pi} \\ 46{,}51\ \dfrac{\pi - 2\theta}{\pi} & 24{,}42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{10} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{I}_{10} = \frac{230}{j\ 102{,}3} = -j\ 2{,}248 \text{ A}$$

$$\underline{U}_{20} = j\ 46{,}51\ \frac{\pi - 2\theta}{\pi}\ (-j\ 2{,}248) = 104{,}6\ \frac{\pi - 2\theta}{\pi} \text{ V}$$

$$\underline{\Psi}_1 = \frac{\underline{U}_1}{j\ \omega} = \frac{230}{j\ 100\ \pi} = -j\ 0{,}732 \text{ Wb}$$

$$\underline{\Psi}_2 = \frac{\underline{U}_2}{j\ \omega} = \frac{104{,}6}{j\ 100\ \pi}\ \frac{\pi - 2\theta}{\pi} = -j\ 0{,}333\ \frac{\pi - 2\theta}{\pi} \text{ Wb}$$

$$\underline{\phi}_1 = \frac{\underline{\Psi}_1}{N_1} = \frac{-j\ 0{,}732}{100} = -j\ 7{,}32 \text{ mWb}$$

$$\underline{\phi}_2 = \frac{\underline{\Psi}_2}{N_2} = \frac{-j\ 0{,}333}{50}\ \frac{\pi - 2\theta}{\pi} = -j\ 6{,}66\ \frac{\pi - 2\theta}{\pi} \text{ mWb}$$

$$\phi_1 = 7{,}32 \text{ mWb}$$

$$\phi_2 = 6{,}66\ \frac{\pi - 2\theta}{\pi} \text{ mWb}$$

$$B_1 = \frac{\phi_1}{\pi\ \frac{D}{2}\ l} = \frac{7{,}32 \cdot 10^{-3}}{\pi\ \frac{0{,}2}{2}\ 0{,}15} = 0{,}155 \text{ T}$$

$$B_2 = \frac{\phi_2}{\pi\ \frac{D}{2}\ l} = \frac{6{,}66}{\pi\ \frac{0{,}2}{2}\ 0{,}15}\ \frac{\pi - 2\theta}{\pi} = 141\ \frac{\pi - 2\theta}{\pi} \text{ mT}$$

$$B_{\max 1} = \sqrt{2}\ B_1 = 0{,}22 \text{ T}$$

$$B_{\max 2} = \sqrt{2}\ B_2 = 200\ \frac{\pi - 2\theta}{\pi} \text{ mT}$$

5) El parell instantani és nul atès que no hi ha corrent en el rotor

$$\Gamma = -0{,}09425\ i_1\ i_2 = 0$$

6) Amb una impedància $\underline{Z}_2 = 20 + j\ 20\ \Omega$ connectada en el rotor i amb un angle $\theta = 45^{\circ}$, atès que la tensió i el corrent del rotor es valoren amb el mateix sentit, sobre la impedància resten en sentit contrari i, per tant, la llei d'Ohm sobre la impedància té l'expressió

$$\underline{U}_2 = -\underline{Z}_2\,\underline{I}_2$$

$$\begin{bmatrix} 230 \\ -(20 + j\,20)\,\underline{I}_2 \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} 102{,}3 & 46{,}51\,\dfrac{\pi - 2\,\dfrac{\pi}{4}}{\pi} \\ 46{,}51\,\dfrac{\pi - 2\,\dfrac{\pi}{4}}{\pi} & 24{,}42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 230 \\ -(20 + j\,20)\,\underline{I}_2 \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} 102{,}3 & 23{,}255 \\ 23{,}255 & 24{,}42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}123 - j\,2{,}49 \\ -0{,}5414 + j\,1{,}0593 \end{bmatrix}\ \mathrm{A}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 230 \\ 32 - j\,10{,}4 \end{bmatrix}\ \mathrm{V}$$

En notació fasorial i, per tant, valors eficaços

$$\underline{\Psi}_1 = \frac{\underline{U}_1}{j\,\omega} = \frac{230}{j\,100\,\pi} = -j\,0{,}732\ \mathrm{Wb}$$

$$\underline{\Psi}_2 = \frac{\underline{U}_2}{j\,\omega} = \frac{32 - j\,10{,}4}{j\,100\,\pi} = -0{,}0331 - j\,0{,}1019\ \mathrm{Wb}$$

$$\underline{\phi}_1 = \frac{\underline{\Psi}_1}{N_1} = \frac{-j\,0{,}732}{100} = -j\,7{,}32\ \mathrm{mWb}$$

$$\underline{\phi}_2 = \frac{\underline{\Psi}_2}{N_2} = \frac{-0{,}0331 - j\,0{,}1019}{50} = -0{,}662 - j\,2{,}037\ \mathrm{mWb}$$

$$\phi_1 = 7{,}32\ \mathrm{mWb}$$

$$\phi_2 = 2{,}14\ \mathrm{mWb}$$

$$B_1 = \frac{\phi_1}{\pi\,\dfrac{D}{2}\,l} = \frac{7{,}32 \cdot 10^{-3}}{\pi\,\dfrac{0{,}2}{2}\,0{,}15} = 0{,}155\ \mathrm{T}$$

$$B_2 = \frac{\phi_2}{\pi\,\dfrac{D}{2}\,l} = \frac{2{,}14}{\pi\,\dfrac{0{,}2}{2}\,0{,}15} = 45{,}4\ \mathrm{mT}$$

$$B_{\max 1} = \sqrt{2}\,B_1 = 0{,}22\ \mathrm{T}$$

$$B_{\max 2} = \sqrt{2}\,B_2 = 64{,}2\ \mathrm{mT}$$

Nota: Clarament es tracta d'un exercici acadèmic, atès que en un disseny real el valor de pic de la densitat de camp hauria estat per sobre d'1T pel cap baix. És a dir, s'ha desaprofitat el ferro en mig ordre de magnitud.

7) Amb els valors dels corrents trobats anteriorment es pot determinar la variació temporal del parell

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}493_{\angle -87{,}17º} \\ 1{,}191_{\angle 117{,}18º} \end{bmatrix} \text{ A}$$

$$\Gamma = -0{,}09425\ i_1\ i_2 =$$

$$= -0{,}09425\ \sqrt{2}\ 2{,}493\ \cos(100\pi t - 87{,}17º)\ \sqrt{2}\ 1{,}191\ \cos(100\pi t + 117{,}18º)$$

$$= -0{,}09425 \cdot 2{,}493 \cdot 1{,}191\ [\cos(-87{,}17º - 117{,}18º) + \cos(200\pi t - 87{,}17º + 117{,}18º)]$$

$$= -0{,}2798\ [\cos(-204{,}35º) + \cos(200\pi t + 30{,}01º)] =$$

$$= -0{,}2549 - 0{,}2798\ \cos(200\pi t + 30{,}01º)\ \text{ N m}$$

El producte dels cosinus, (recordi's la potència instantània en sistemes monofàsics), equival a una oscil·lació, de freqüència doble de la xarxa (100 Hz), d'amplitud producte dels valors eficaços i de valor mig producte dels valors eficaços pel cosinus de l'angle diferència de fases:

$$\Gamma_{\max} = -0{,}2549 + 0{,}2798 = 0{,}0249 \text{ N m}$$
$$\Gamma_{\min} = -0{,}2549 - 0{,}2798 = -0{,}5348 \text{ N m}$$
$$\Gamma_{\text{mig}} = -0{,}2549 \text{ N m}$$