Eines algebràiques

Mecànica del medi continu

jordi.marce@upc.edu

Escola Tècnica Superior d'Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa

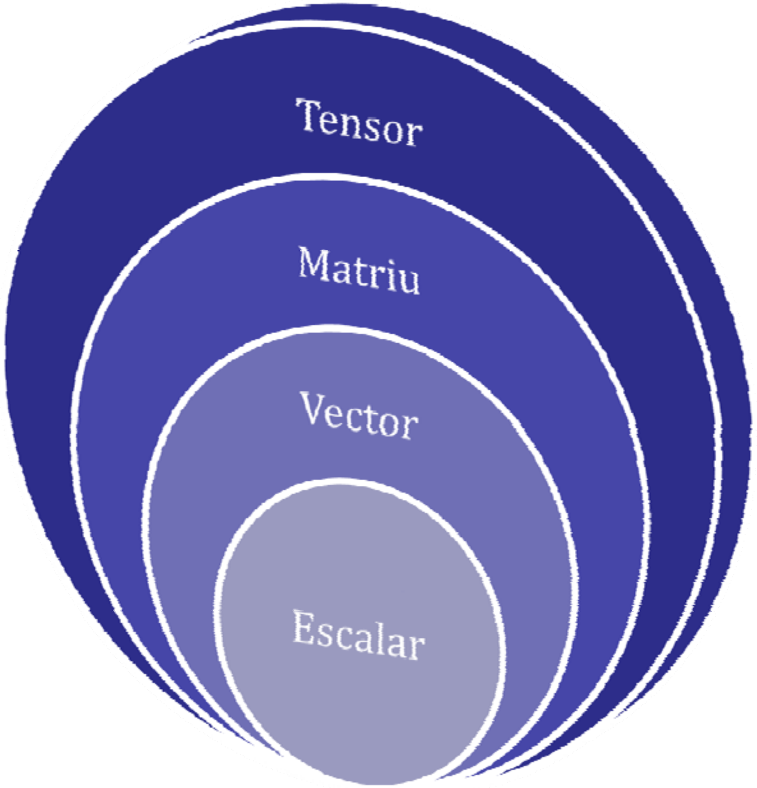
RESISTÈNCIA DE MATERIALS I ESTRUCTURES A L'ENGINYERIA
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

1. Quantificació de fenòmens físics

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 7.32$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$



$$\vec{u}(X,t) = 4X_1\hat{e}_1 + 5(X_1 + X_2)\hat{e}_2 - 4\hat{e}_3$$

2. Escalar

Un nombre real, complex o racional.

3. Vector. Definicions

Un segment orientat, que té una direcció, un sentit i un mòdul .

- **Notació:**

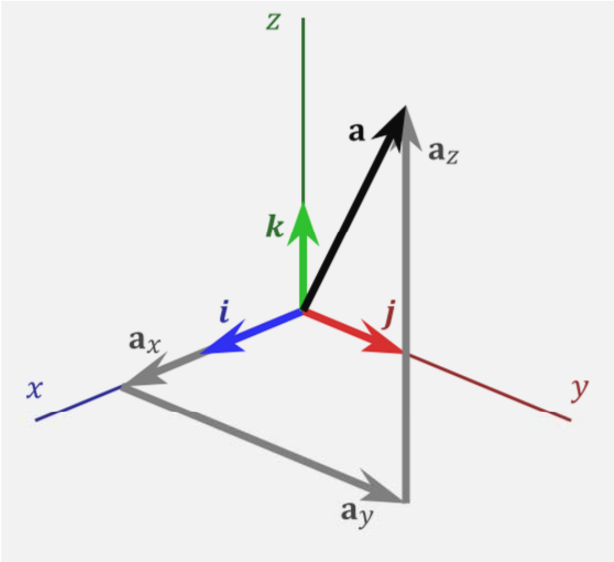
$$\vec{a} = \underline{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\hat{e}_i \rightarrow \quad \vec{a} = a_i\hat{e}_i$$

- **Mòdul:**

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

- **Vector unitari:**

$$\hat{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$



3. Vector. Exemple 1

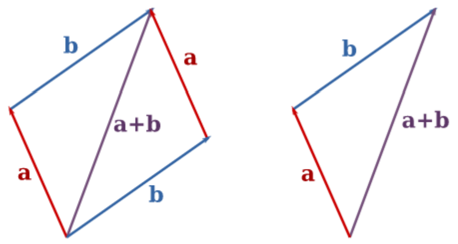
Escriviu explícitament cada una de les components del vector a partir de la seva notació simplificada.

$$a_i = b_i c_i d_j$$

$$y_i = C_{ij} x_j$$

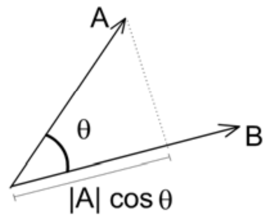
3. Vector. Operacions

Operacions vectorials habituals



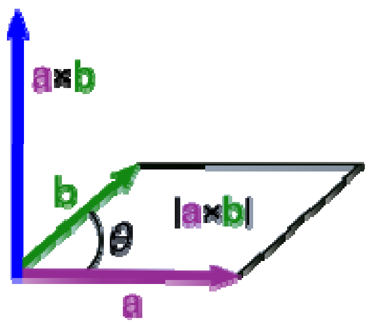
- **Suma vectorial:**

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1)\hat{e}_1+(a_2+b_2)\hat{e}_2+(a_3+b_3)\hat{e}_3$$



- **Producte escalar:**

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$



- **Producte vectorial**

$$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\vec{n}=\det\begin{bmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}$$

3. Vector. Exemple 2

Es defineixen els vectors $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ i $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. Determineu-ne la suma vectorial, el producte escalar, el producte vectorial i l'angle que formen entre ells.

1. Suma vectorial:

2. Producte escalar:

3. Producte vectorial:

4. Matrius. Operacions

Una taula rectangular de nombres

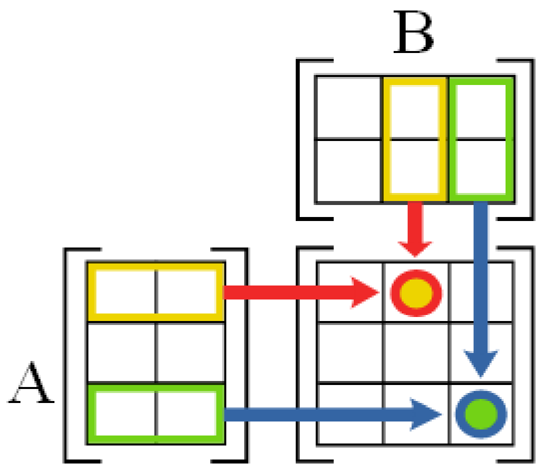
$$\underline{\underline{A}} = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

- **Suma de matrius:**

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

- **Producte de matrius:**

$$\left[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}\right]_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{in}B_{nj} = \sum_{r=1}^{N} A_{ir}B_{rj}$$



- **Transposició:**

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\underline{A}}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

4. Matrius. Operacions

- **Invariants:** Traça, quadràtic i determinant

$$I_A = tr\,\underline{\underline{A}}$$

$$II_A = \frac{1}{2}\left[tr(A)^2 - tr\left(\underline{\underline{A}}^2\right)\right]$$

$$III_A = \det \underline{\underline{A}} = \left|a_{ij}\right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i+1} \left|A_{i1}\right|$$

- **Valors propis, vectors propis i matriu diagonal:**

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right) = \lambda^3 - I_A\lambda^2 + II_A\lambda - III_A = 0$$

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right)\vec{n}_i = 0$$

$$\longrightarrow \quad \underline{\underline{A}}^* = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}$$

4. Matriu. Exemple

Donades les matrius **A** i **B**, realitzeu les següents operacions matricials:

1. Suma matricial

2. Producte matricial:

3. Transposició matricial

5. Canvi de base

- Expressar la matriu **A** en un altre sistema de coordenades

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{A}}'\,\underline{\underline{L}}^T \qquad \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{L}}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{L}}$$

$$\longrightarrow$$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \hat{n}_I & \hat{n}_{II} & \hat{n}_{III} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

6. Tensor

Una funció multilinear escrita en funció d'una base definida, però que el seu valor no depèn d'aquest sistema de referència.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

Jordi.marce@upc.edu

6. Tensor. Exemple

Alguns exemples de tensors en la mecànica del medi continu:

1. **Tensor gradient de deformació:**

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

2. **Llei constitutiva d'un material elàstic i lineal**

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \longrightarrow \begin{array}{l} \sigma_{11} = C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1112}\varepsilon_{12} + \ldots + C_{1133}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{12} = C_{1211}\varepsilon_{11} + C_{1212}\varepsilon_{12} + \ldots + C_{1233}\varepsilon_{33} \\ \ldots \\ \sigma_{33} = C_{3311}\varepsilon_{11} + C_{3312}\varepsilon_{12} + \ldots + C_{3333}\varepsilon_{33} \end{array}$$

7. Camps vectorials

- **Gradient:** variació d'una magnitud o propietat física

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\hat{e}_i \longrightarrow \textbf{Operador diferencial}$$

$$grad\,\phi = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\hat{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\hat{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\hat{e}_3$$

•**Divergència:** Tendència d'un camp vectorial per originar-se o convergir en un punt.

$$div\,\vec{u} = \nabla\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

- **Rotacional:** Proporciona la velocitat de rotació d'un camp vectorial respecte a un punt determinat

$$rot\,\vec{u} = \nabla\times\vec{u} = e_{ikj}\hat{e}_i\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$