



Attribution-Noncommercial 2.5
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/2.5/es/deed.ca>



La Mecànica del medi continu en el càlcul computacional

Mecànica del medi continu

jordi.marce@upc.edu



Escola Tècnica Superior d'Enginyeries
Industrial i Aeronàutica de Terrassa

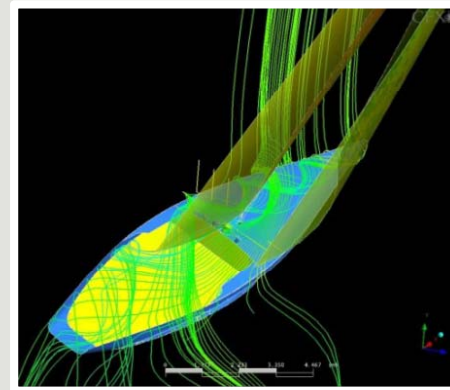
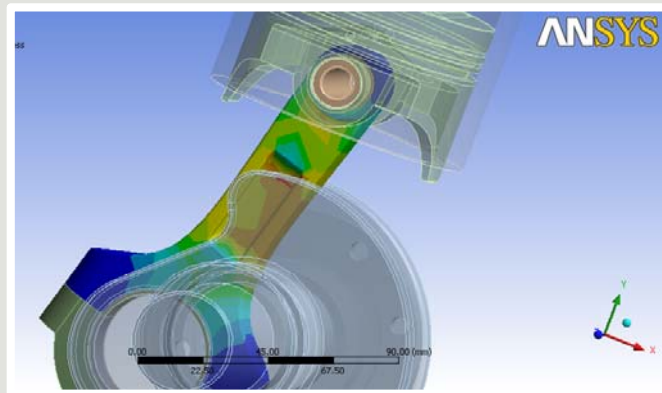


RESISTÈNCIA DE MATERIALS I ESTRUCTURES A L'ENGINYERIA
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA



Objectius

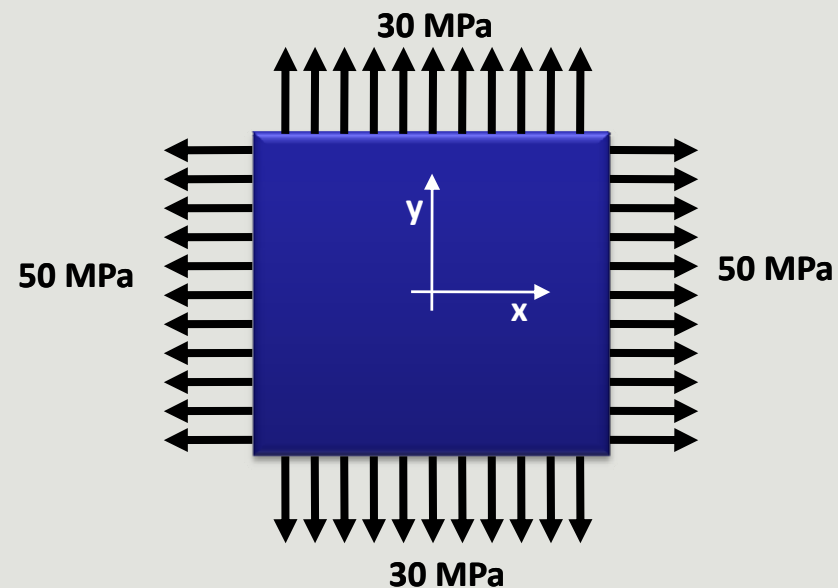
- ✓ **Conèixer** la existència de mètodes computacionals per resoldre el problema elàstic.
- ✓ **Relacionar** els conceptes de tensió i deformació amb els obtinguts empíricament
- ✓ **Resoldre** el problema elàstic en una placa prima
- ✓ **Comprovar** que els resultats són els mateixos





Enunciat del problema

Una placa d'acer ($E=200$ GPa i $\nu=0.3$) de dimensions 200×200 mm. com la de la figura està sotmesa a uns esforços de tracció de $\sigma=30$ MPa i $\sigma=50$ MPa. Determineu l'estat de tensió, l'estat de deformació i els desplaçaments. Analitzeu la tensió màxima de Von Mises.





Resolució analítica

Funció d'Airy

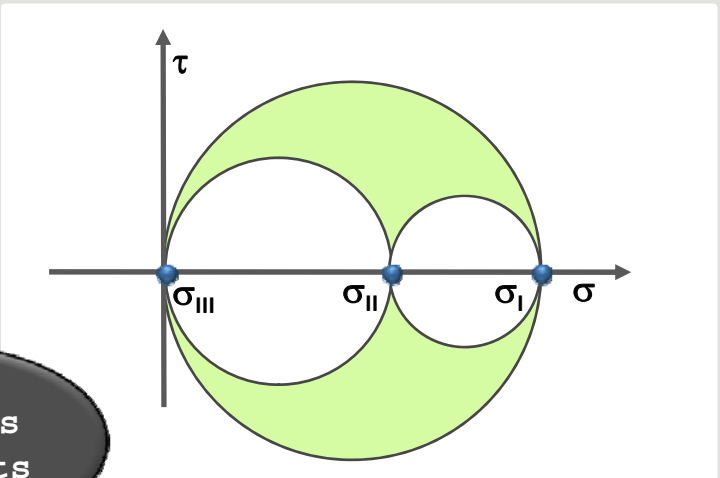
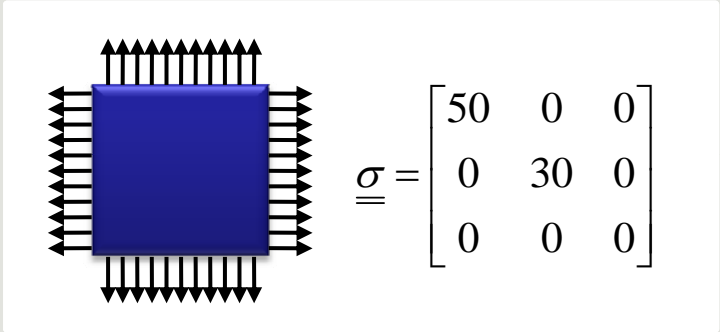
$$\phi = Ax^2 + By^2 = 15x^2 + 25y^2$$

Tensions

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2B \rightarrow B = 25$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2A \rightarrow A = 15$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 0$$



Tensions constants



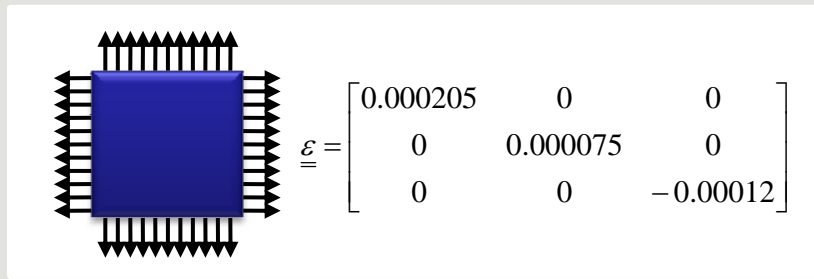
Resolució analítica

Equació constitutiva

Material elàstic i isotròpic

$$\rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 76.9 \text{ GPa}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1.5 & -1.5 & 0 & 0 & 0 \\ -1.5 & 5 & -1.5 & 0 & 0 & 0 \\ -1.5 & -1.5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \begin{Bmatrix} 50 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000205 \\ 0.000075 \\ -0.00012 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



NO hipòtesis
tensió plana

Resolució analítica

Camp de desplaçaments

$$u = \int \varepsilon_x dx = \frac{(2B - \nu 2A)x}{E} + k_1 = 0.000205x + k_1$$

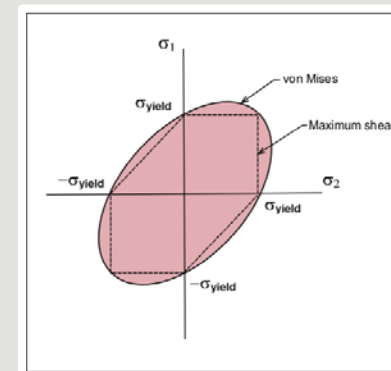
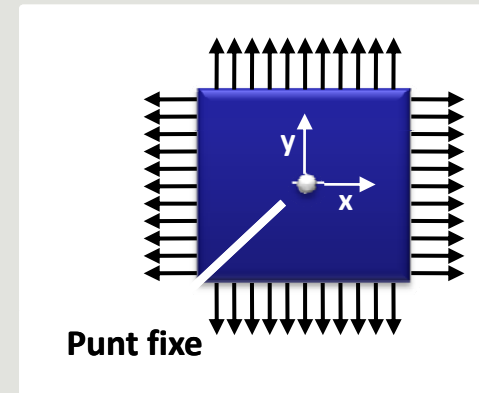
$$v = \int \varepsilon_y dy = \frac{(2A - \nu 2B)y}{E} + k_2 = 0.000075y + k_2$$

$$k_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad u = 0.000205x$$

$$k_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad v = 0.000075y$$

Tensió equivalent de Von Mises

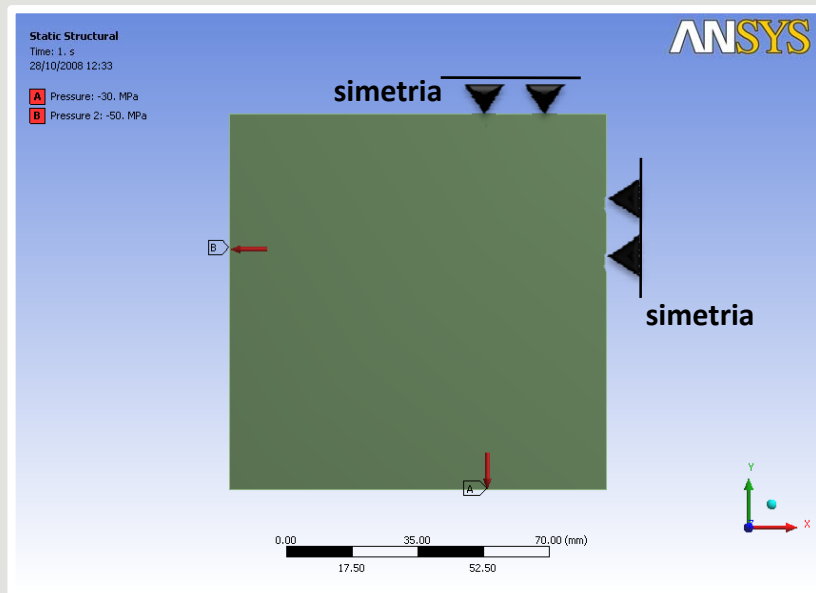
$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2]} = 43.589 \text{ MPa}$$



Resolució computacional

ANSYS
WorkBench®

Model geomètric i condicions de contorn



- ✓ Rectangle de 100x100
- ✓ Gruix molt prim
- ✓ Condicions de simetria
- ✓ Pressió a les cares laterals

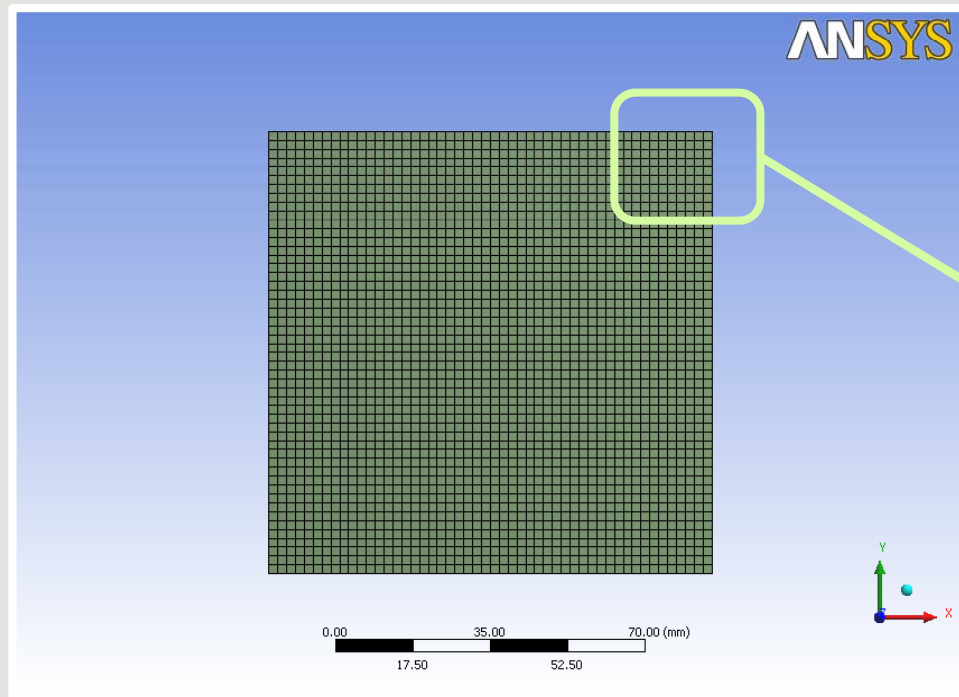
<http://www.youtube.com/watch?v=NDRBvgVab9o>



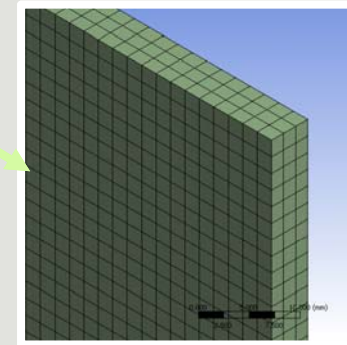


Resolució computacional

Malla del model



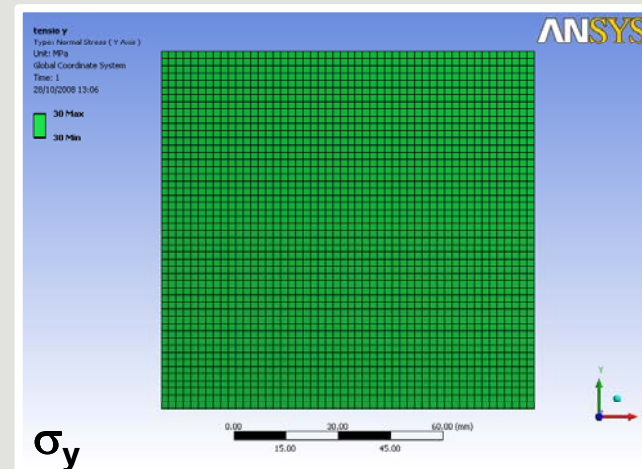
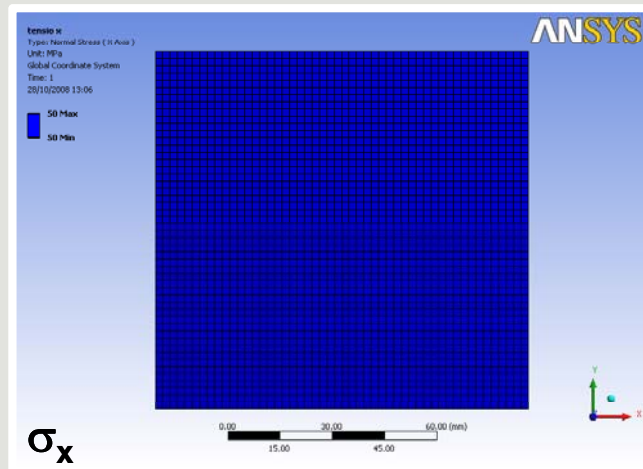
✓ Elements hexaèdrics





Resolució computacional

Mapa de tensions



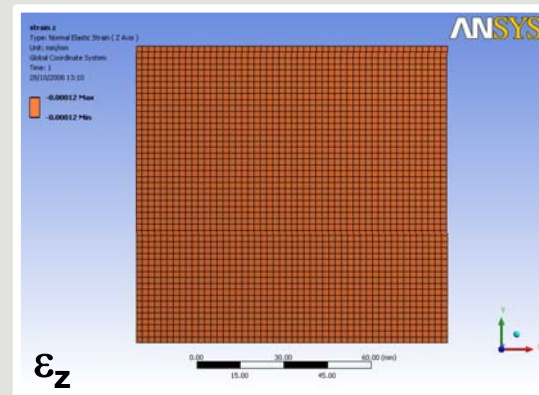
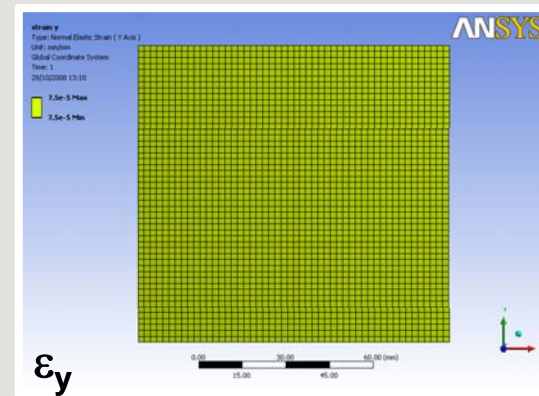
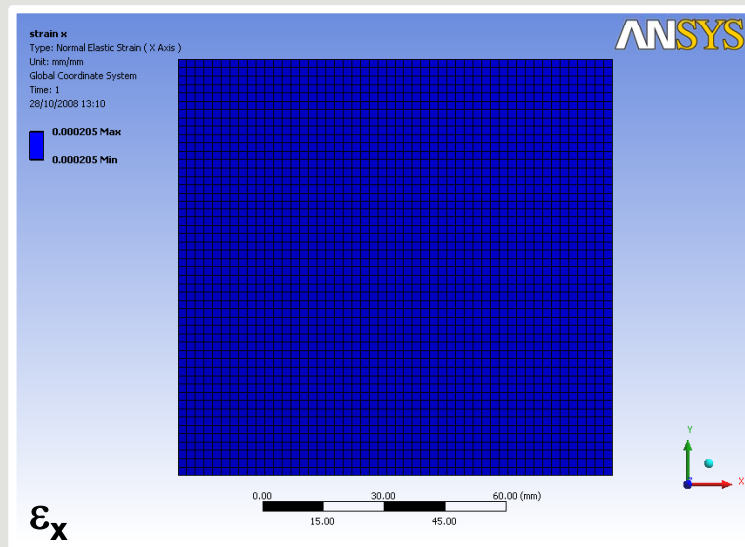
- ✓ Constant a tota la placa
- ✓ $\sigma_x = 50$ MPa i $\sigma_y = 30$ MPa

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolució computacional

Mapa de deformacions

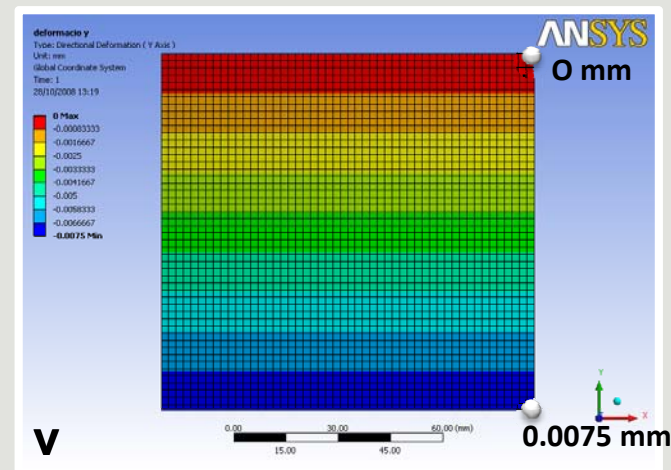
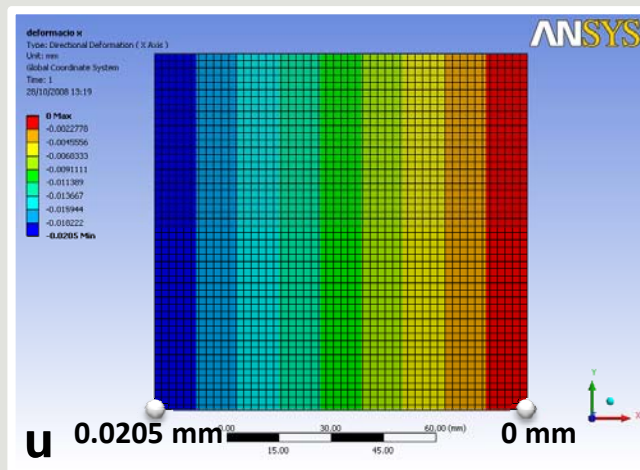
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0.000205 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000075 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00012 \end{bmatrix}$$





Resolució computacional

Camp de desplaçaments

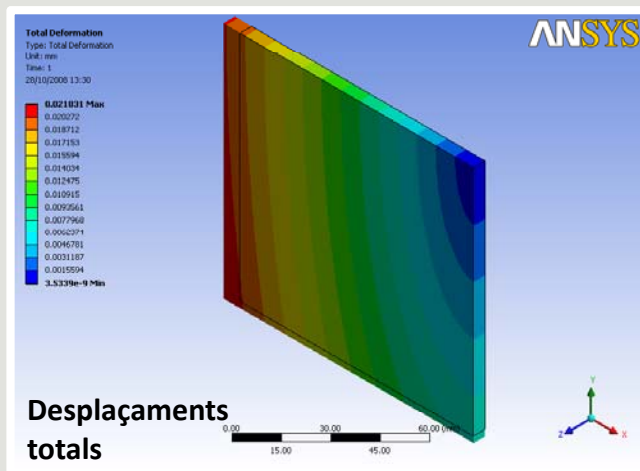


✓ varia linealment: $u = 0.000205x \rightarrow x = [0:100]$
 $v = 0.000075y \rightarrow y = [0:100]$

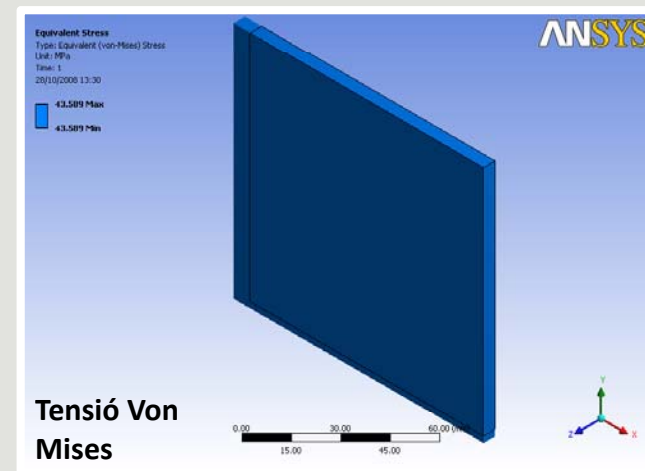


Resolució computacional

Resultats habituals



Desplaçaments totals



Tensió Von Mises

$$\sigma_{eq} = 43.589 \text{ MPa} \leq \frac{\sigma_{eq}}{\gamma} = \frac{344}{1.15} \approx 300 \text{ MPa}$$

RESULTATS
coincidents