

Viscoelasticitat lineal

Mecànica del medi continu

jordi.marce@upc.edu



Escola Tècnica Superior d'Enginyeries
Industrial i Aeronàutica de Terrassa



RESISTÈNCIA DE MATERIALS I ESTRUCTURES A L'ENGINYERIA
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA



1. Definicions

VISCOSITAT

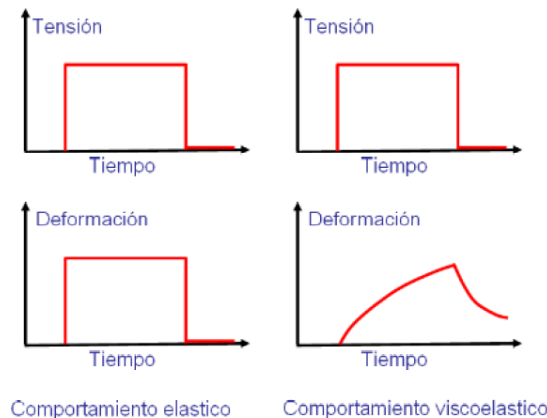
És la mesura de la resistència d'un fluid que s'està deformant respecte a les tensions tangencials i normals.

$$\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{R}}) = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{R}}$$

VISCOELASTICITAT

És la propietat dels materials que presenten alhora característiques viscoses i elàstiques quan s'estan deformant.

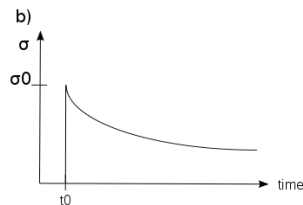
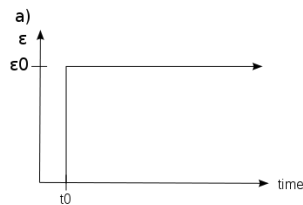
✓ Lineal, no-lineal, plastic, cautxús,...



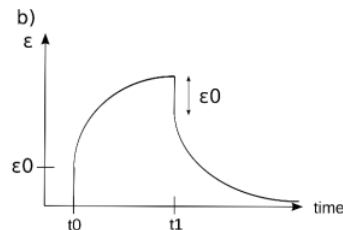
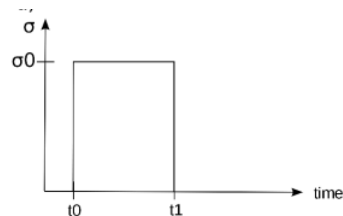


2. Fenòmens

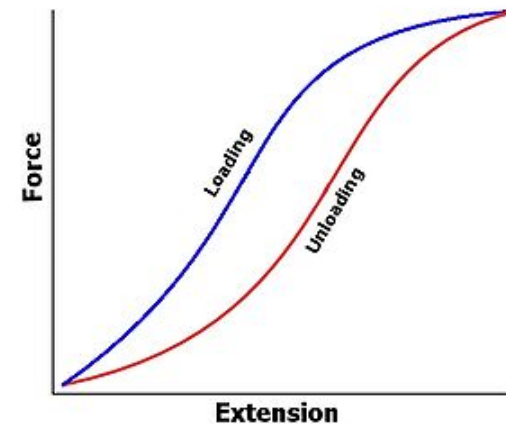
- ✓ **FLUÈNCIA:** Quan la tensió es manté constant i la deformació incrementa en el temps.
- ✓ **RELAXACIÓ:** Quan la deformació es manté constant i la tensió decreix en el temps.
- ✓ **HISTÈRESIS:** en la corba tensió deformació. Dissipació d'energia.



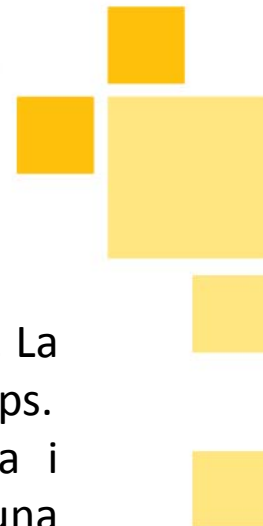
FLUÈNCIA: Aplicació de la deformació i la corresponent tensió.



RELAXACIÓ: Aplicació de la tensió i la corresponent deformació

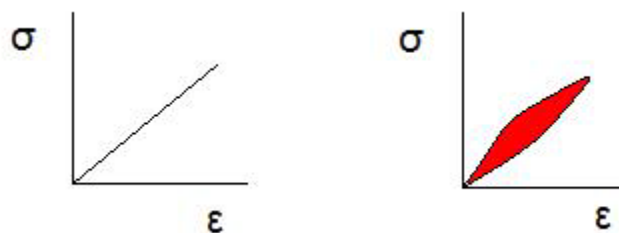


HISTÈRESIS elàstica del cauchú idealitzat



3. Comportament elàstic vs. viscoelàstic

- ✓ Un material viscoelàstic té un component elàstic i un component viscos. La viscositat dóna al material una velocitat de deformació que depèn del temps.
- ✓ Els materials elàstics no dissipen energia quan s'aplica una càrrega i després es retira. Un material viscoelàstic perd energia quan s'aplica una càrrega i després es retira.
- ✓ Els materials elàstics no tenen deformacions plàstiques en retirar la càrrega. Els viscoelàstics poden tenir-ne.



Corba tensió deformació per (a) un material elàstic (b) un material viscoelàstic

- ✓ L'ària de la histèresi en la corba de tensió-deformació és igual a l'energia perduda durant el cicle de càrrega.



4. Típus de Viscoelasticitats

LINEAL

- ✓ En petites deformacions, es pot aplicar el principi de superposició per la resposta de fluència i de relaxació de càrrega.
- ✓ Es pot representar amb l'equació de Volterra connectant σ i ε :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_{0,C}} + \int_0^t K(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau) d\tau$$

$$\sigma(t) = E_{0,R}\varepsilon(t) + \int_0^t F(t-\tau)\dot{\varepsilon}(\tau) d\tau$$

t , es el tiempo.

$\sigma(t)$, es la tensión mecánica.

$\varepsilon(t)$, es la deformación o elongación.

$E_{0,C}$ y $E_{0,R}$, son los [módulos elásticos longitudinales](#) para el creep y la relajación.

$K(t)$, es la función de [creep](#).

$F(t)$, es la función de relajación.

NO-LINEAL

- ✓ En grans deformacions o quan el material canvia les seves propietats en el temps, la funció no es pot separar.

ANELÀSTICA

- ✓ El material recupera totalment el seu estat original es treure la càrrega





5. Viscoelasticitat Lineal

MODELS CONSTITUTIUS

- ✓ Estat de tensió u-dimensional
- ✓ El comportament viscoelàstic té components elàstics i viscosos que es modelen com combinacions lineals de molles i amortidors

COMPONENT ELÀSTICA

Molles de constant elàstica E (Mòdul de Young).

$$\sigma = E\varepsilon$$

COMPONENT VISCOSA

Amortidors en els que la relació tensió-deformació es dóna segons l'equació:

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

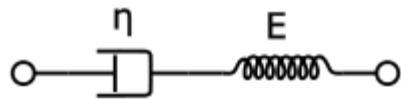




5. Viscoelasticitat Lineal

MODEL DE MAXWELL

Consisteix en un **amortidor viscos** i una **molla elàstica** connectats en sèrie



$$\frac{d\epsilon_{Total}}{dt} = \frac{d\epsilon_D}{dt} + \frac{d\epsilon_S}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}$$

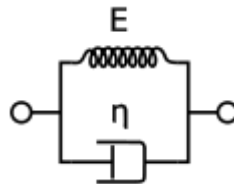
- ✓ Prediu la disminució exponencial de les tensions en el temps (relaxació)
- ✓ No prediu de forma acurada el fenomen de fluència
- ✓ **APLICACIÓ:** Sòlids tous en general: polímers termoplàstics, formigó fresc, metalls a temperatures pròximes al punt de fusió, etc...



5. Viscoelasticitat Lineal

MODEL DE KELVIN-VOIGT

Consisteix en un **amortidor viscos** i una **molla elàstica** connectats en paral·lel



$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

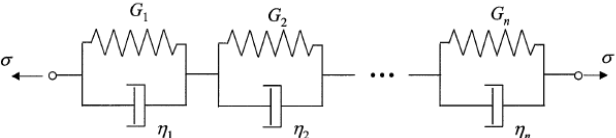
- ✓ A tensió constant, el material es deforma a velocitat constant acostant-se assimptòticament a l'estat estacionari de deformació
- ✓ Prediu molt bé la fluència però la relaxació és molt menys acurada.
- ✓ **APLICACIÓ:** Polímers orgànics, cautxú, fusta en carregues petites, etc.



5. Viscoelasticitat Lineal

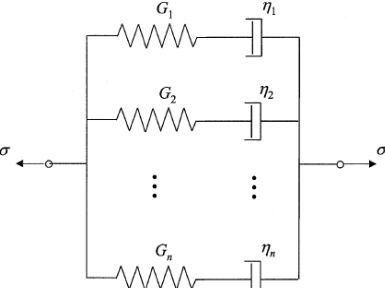
MODELS GENERALITZATS

Kelvin: La defomació total és la suma de les deformacions individuals



$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\sigma_i}{E_i + \eta_i \frac{d\varepsilon_i}{dt}} \right]$$

Maxwell: La tensió total és la suma de les tensions individuals



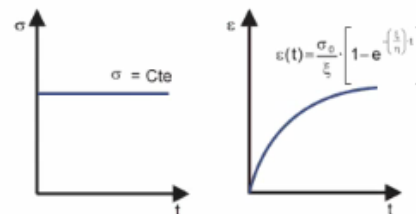
$$\sigma = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\frac{d\varepsilon_i}{dt}}{\frac{d\sigma_i}{dt} \frac{1}{E_i} + \frac{1}{\eta_i}} \right]$$



6. Funció de Fluència i Relaxació

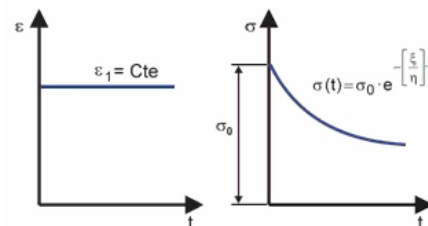
FLUÈNCIA: A partir del model de Kelvin-Voigt, que és adequat per fluència.

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right) \cdot t} \right]$$



RELAXACIÓ: A partir del model de Maxwell, que és adequat per relaxació.

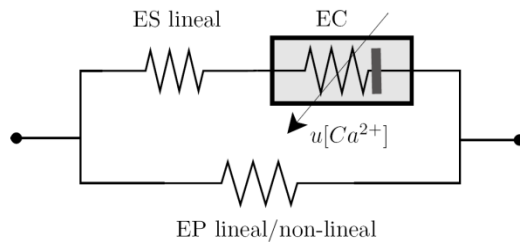
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \Rightarrow \sigma(t) = \sigma_0 e^{-\left[\frac{E}{\eta}\right] \cdot t}$$





EXEMPLE – Model Muscular de Hill Maxwell

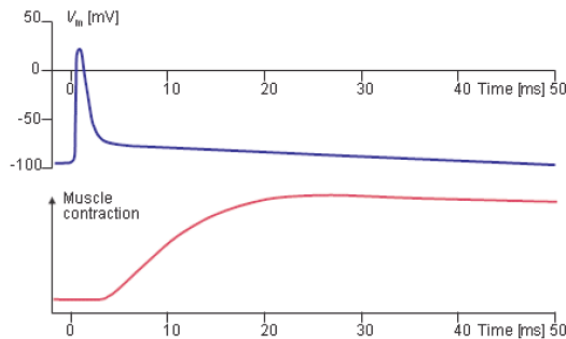
En biomecànica s'usa el model de Hill-Maxwell per definir el comportament viscoelàstic dels múscles.



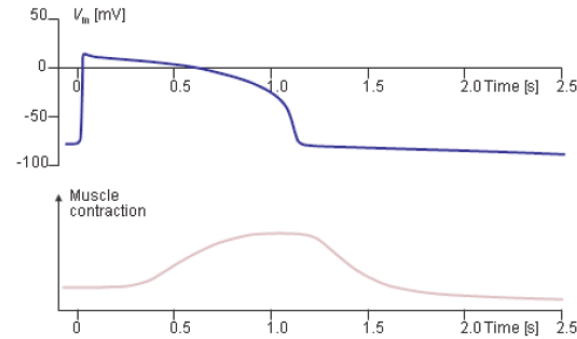
η : Fibra muscular (element contràctil)
 E_1 : teixit conjuntiu del teixit muscular
 E_2 : tendó

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\frac{E_2}{\eta} \left(\frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma - E_1 \varepsilon \right)}{E_1 + E_2}$$

A tensió constant el múscle es deforma instantàniament per arribar a l'estat estacionari de deformació



(a) frog sartorius muscle cell



(b) frog cardiac muscle cell

Viscoelasticitat lineal

Mecànica del medi continu

jordi.marce@upc.edu



Escola Tècnica Superior d'Enginyeries
Industrial i Aeronàutica de Terrassa



RESISTÈNCIA DE MATERIALS I ESTRUCTURES A L'ENGINYERIA
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA