Els càlculs de matemàtica financera referits a l'interès. Els coeficients financers

DOEETSEIBUPCDireccioEmpresesPart309MatematicaFinancera

CALCULOS DE MATEMATICAS FINANCIERAS REFERIDOS AL INTERES

A. - INTRODUCCIÓN

1. El tiempo asignado a los movimientos de dinero influye en lo que se denomina "el valor del tiempo en dinero". En virtud de las oportunidades para invertir dinero y para aumentar su valor, una suma vale hoy más que la misma suma en algún tiempo futuro. El hecho de pasar por alto la repercusión del tiempo en el dinero, que interviene en las opciones selectivas de inversión, puede tener por consecuencia decisiones desacertados.

2. La equivalencia

Una cantidad de dinero (sea una suma única o una serie uniforme) tiene, una escala infinita de valores equivalentes y potenciales en el curso del tiempo, aunque puede tener existencia real sólo en un momento determinado en el tiempo. Para fin es de una definición se dice que dos cantidades o series de dinero en fechas distintas son equivalentes si en alguna fecha llegan a igualarse entre si, a un tipo de interés determinado.

B. - CÁLCULOS DE INTERESES

Los cálculos de intereses pueden referirse a tipos de interés simple o compuesto.

1. - Interés simple

Siempre que el cargo por concepto de intereses de cualquier período se basa únicamente en la cantidad principal y no en ninguna acumulación de intereses, se dice que el interés es simple. Los cálculos pueden hacerse aplicando la siguiente fórmula:

$$\mathbf{I = P \times s \times N}$$

en la que P = cantidad prestada (invertido)
S = tipo de interés simple
N = numero de periodos anteriores al reintegro.

2. - Interés compuesto

Siempre que el cargo por intereses en cualquier período se basa en la cantidad principal restante más cualesquiera intereses acumulados hasta el principio de ese periodo, se dice que el interés es compuesto.

3. - Fórmulas de interés compuesto

En la práctica es mucho más frecuente operar a base de interés compuesto que simple. Se entiende que las fórmulas básicas del interés compuesto y las tablas correspondientes se refieren a pagos discretos (en una suma total).

4. - Representación y diagrama de flujo de dinero

Sea

i = tipo efectivo de interés por cada periodo de intereses

N = número de períodos a interés compuesto

P = cantidad actual de dinero (P, inicial de "presente") (el valor equivalente de uno o más flujos de dinero en una fecha determinada será llamado "actual")

F = cantidad futura de dinero (el valor equivalente de uno o más flujos de dinero en una fecha determinada llamada "futuro")

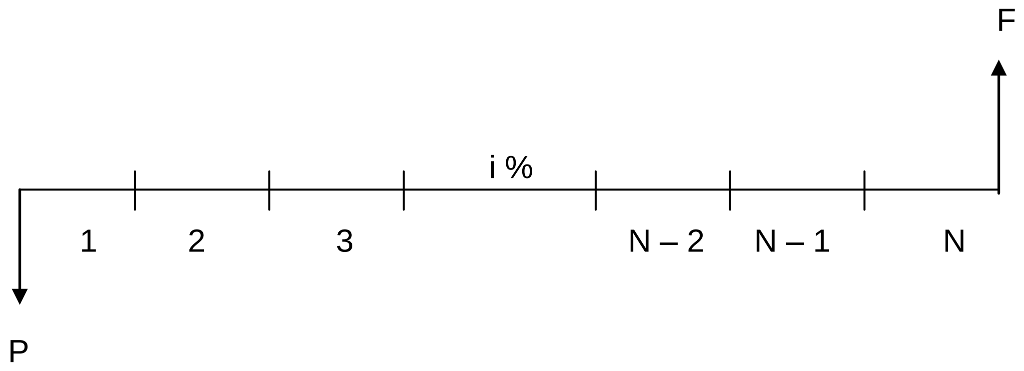
A = movimiento (flujo) de dinero al final de periodo (o valores equivalentes de fin de período) en una serie uniforme que se prolonga por un número especifico de periodos), y

G = aumento uniforme de periodo tras período; o disminución en el flujo de dinero o de cantidades (o sea el "gradiente" aritmético).

Se recomienda el empleo de diagramas de flujo para casi todos los problemas, por lo menos siempre que el analista desee formarse una idea "visual" de los casos en que hay movimientos de dinero. Siempre que parezca tener ventaja hacer alguna distinción entre los tipos de movimientos propios de dinero, se recomienda marcar con una flecha ascendente las entradas y señalar con una descendente todas las salidas de dinero.

C. - FÓRMULAS DE INTERÉS QUE RELACIONAN ENTRE SÍ SUMAS ACTUALES Y FUTURAS DE DINERO

La figura muestra un diagrama de tiempo en que intervienen sola cantidad actual, P, y una sola cantidad futura. F, separadas por N períodos, son intereses al 1 % por período. A continuación damos dos fórmulas relativas a estos valores.



1. Hallar F cuando se conoce P

Si hoy se depositan P en una cuenta que devenga i % por período, la cuenta crecerá hasta ser

Primer periodo $P (1 + i \%)$

Segundo periodo $P (1 + i \%) (1 + i \%) = P (1 + i \%)^2$

Tercer periodo $P (1 + i \%)^2 (1 + i \%) = P (1 + i \%)^3$

Y al final de N periodos la cuenta habra crecido hasta ser una suma futura, F, según se indica en

N Periodos $P (1 + i \%)^{N-1} (1 + i \%) = P (1 + i \%)^N$

$$\boxed{\mathbf{F = P (1 + i \%)^N}}$$

en la que la cantidad $(1 + i \%)^N$ designada por (F/P), se indica en las tablas para valores de i y de N. Expresada con símbolos

$$\boxed{F = P(F/P, i\%, N)}$$

en la que, el factor que se encuentra entre el paréntesis denota tanto lo desconocido como lo conocido, el tipo de interés y el número de período, respectivamente.

Calculo Informatizado
EXCEL 97

VF Devuelve el valor futuro de una inversión basándose en pagos periódicos constantes y en una tasa de interés constante.

Sintaxis

VF (tasa; nper; pago; va; tipo)

Tasa es la tasa de interés por período.

Nper es el número total de pagos de una anualidad.

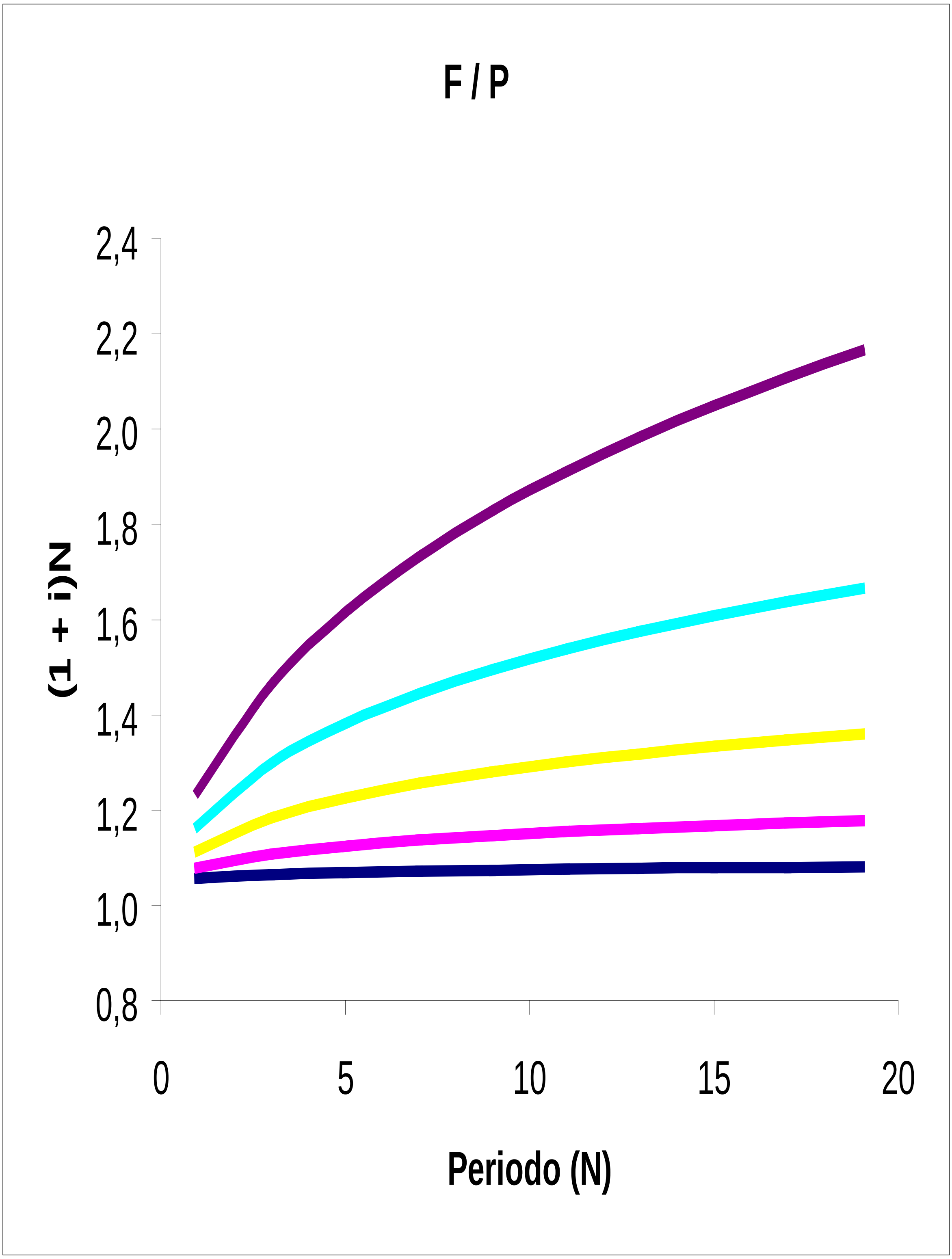
Pago es el pago que se efectúa cada período y que no puede cambiar durante la vigencia de la anualidad. Generalmente, el argumento pago incluye el capital y el interés pero ningún otro arancel o impuesto.

Va es el valor actual de la cantidad total de una serie de pagos futuros. Si el argumento va se omite, se considerará 0 (cero).

Tipo es el número 0 ó 1 e indica cuándo vencen los pagos. Si el argumento tipo se omite, se considerará 0.

Defina tipo como	Si los pagos vencen
0	Al final del período
1	Al inicio del período

			$(1+i)^N$		
N	1%	4.00%	9%	16%	25%
1	1.006956	1.028114	1.064370	1.117287	1.189207
3	1.013959	1.057018	1.132884	1.248331	1.414214
5	1.018079	1.074301	1.174988	1.332000	1.565085
7	1.021012	1.086735	1.205808	1.394744	1.681793
9	1.023293	1.096478	1.230269	1.445440	1.778279
11	1.025160	1.104504	1.250623	1.488226	1.861210
13	1.026742	1.111335	1.268094	1.525389	1.934336
15	1.028114	1.117287	1.283426	1.558329	2.000000
17	1.029325	1.122563	1.297103	1.587975	2.059767
19	1.030411	1.127304	1.309461	1.614971	2.114743


F / P
(1 + i)N
2,4
2,2
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0
5
10
15
20
Periodo (N)

2. - Hallar P cuando se conoce F

La recíproca de la relación entre P *y* F antes dada, se expresa en forma matemática, como

$$\mathbf{P = F}\left[\frac{1}{1+i\%}\right]^N$$

en la que la cantidad 1/[(1 + i%)]^N se halla en las tablas.
Expresando en símbolos

P = F (P/F, i %, N)

Calculo Informatizado
EXCEL 97

VA Devuelve el valor actual de una inversión. El valor actual es el valor que tiene actualmente la suma de una serie de pagos que se efectuarán en el futuro. Por ejemplo, cuando pide dinero prestado, la cantidad del préstamo es el valor actual para el prestamista.

Sintaxis

VA(tasa; nper; pago; vf; tipo)

Tasa es la tasa de interés por período.

Nper es el número total de períodos en una anualidad

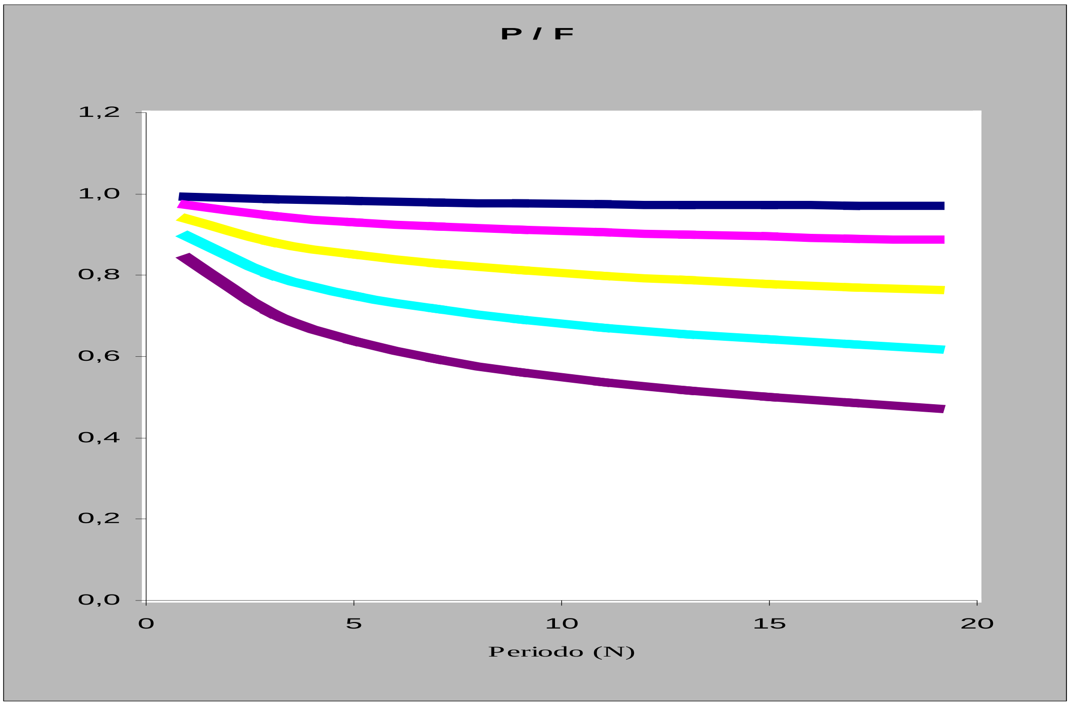
Pago es el pago que se efectúa en cada período y que no cambia durante la vida de la anualidad. Por lo general, el argumento pago incluye el capital y el interés pero no incluye ningún otro cargo o impuesto.

Vf es el valor futuro o el saldo en efectivo que desea lograr después de efectuar el último pago. Si el argumento vf se omite, se asume que el valor es 0 (por ejemplo, el valor futuro de un préstamo es 0).

Tipo es el número 0 ó 1 e indica el vencimiento de los pagos.

Defina tipo como	Si los pagos vencen
0 u omitido	Al final del período
1	Al inicio del período

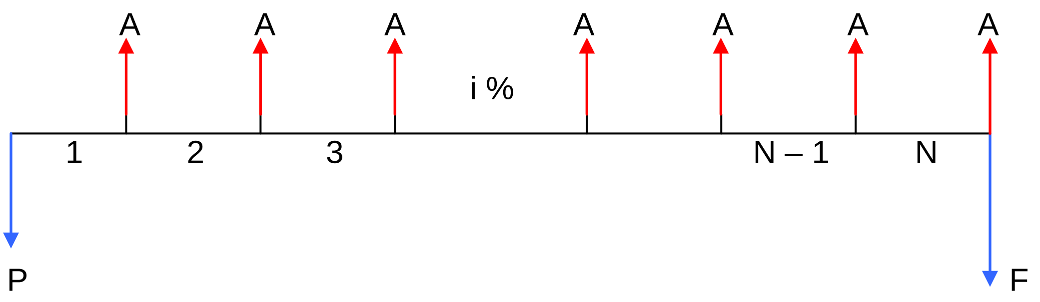
			$(1+i)^N$		
N	**1%**	**4%**	**9%**	**16%**	**25%**
1	0.993092	0.972655	0.939523	0.895025	0.840896
3	0.986233	0.946058	0.882703	0.801070	0.707107
5	0.982242	0.930838	0.851072	0.750751	0.638943
7	0.979420	0.920188	0.829320	0.716978	0.594604
9	0.977237	0.912011	0.812831	0.691831	0.562341
11	0.975457	0.905384	0.799602	0.671941	0.537285
13	0.973955	0.899818	0.788585	0.655571	0.516973
15	0.972655	0.895025	0.779165	0.641713	0.500000
17	0.971510	0.890818	0.770949	0.629733	0.485492
19	0.970487	0.887072	0.763673	0.619206	0.472871



- FÓRMULAS DE INTERÉS QUE VINCULAN SERIES UNIFORMES DE PAGOS, CON SU VALOR ACTUAL Y FUTURO

La figura muestra un diagrama de tiempo referente a una serie de movimientos (flujos) de dinero, uniformes, de la cantidad A, que se realizan al final de cada período, por *N* periodos, con intereses al í% por periodo. Como se ilustra en la misma figura, las fórmulas y tablas son derivaciones de manera que

1. P tiene lugar en un período de intereses anterior a la primera A.
2. F tiene lugar en la misma fecha de la última A y N periodos después de P.



1. Hallar F cuando se conoce A

Si se depositan A al final de cada período por N períodos en una cuenta que devenga i % por período, la suma futura A acumulada al final del período N es

$$F = A\,[\,1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots \ldots + (1 + i)^{N-2} + (1 + i)^{N-1}\,]$$

Esto se reduce a

$$\mathbf{F = A}\left[\frac{(1+i\%)^N - 1}{i\%}\right]$$

en que la cantidad $\left[\frac{(1+i\%)^N - 1}{i\%}\right]$ se halla en tablas.

Expresándola en símbolos

$$F = A\,(\,F/A,\ i\%,\ N)$$

Calculo Informatizado
EXCEL 97

VF Devuelve el valor futuro de una inversión basándose en pagos periódicos constantes y en una tasa de interés constante.

Sintaxis

VF (tasa; nper; pago; va; tipo)

Tasa es la tasa de interés por período.

Nper es el número total de pagos de una anualidad.

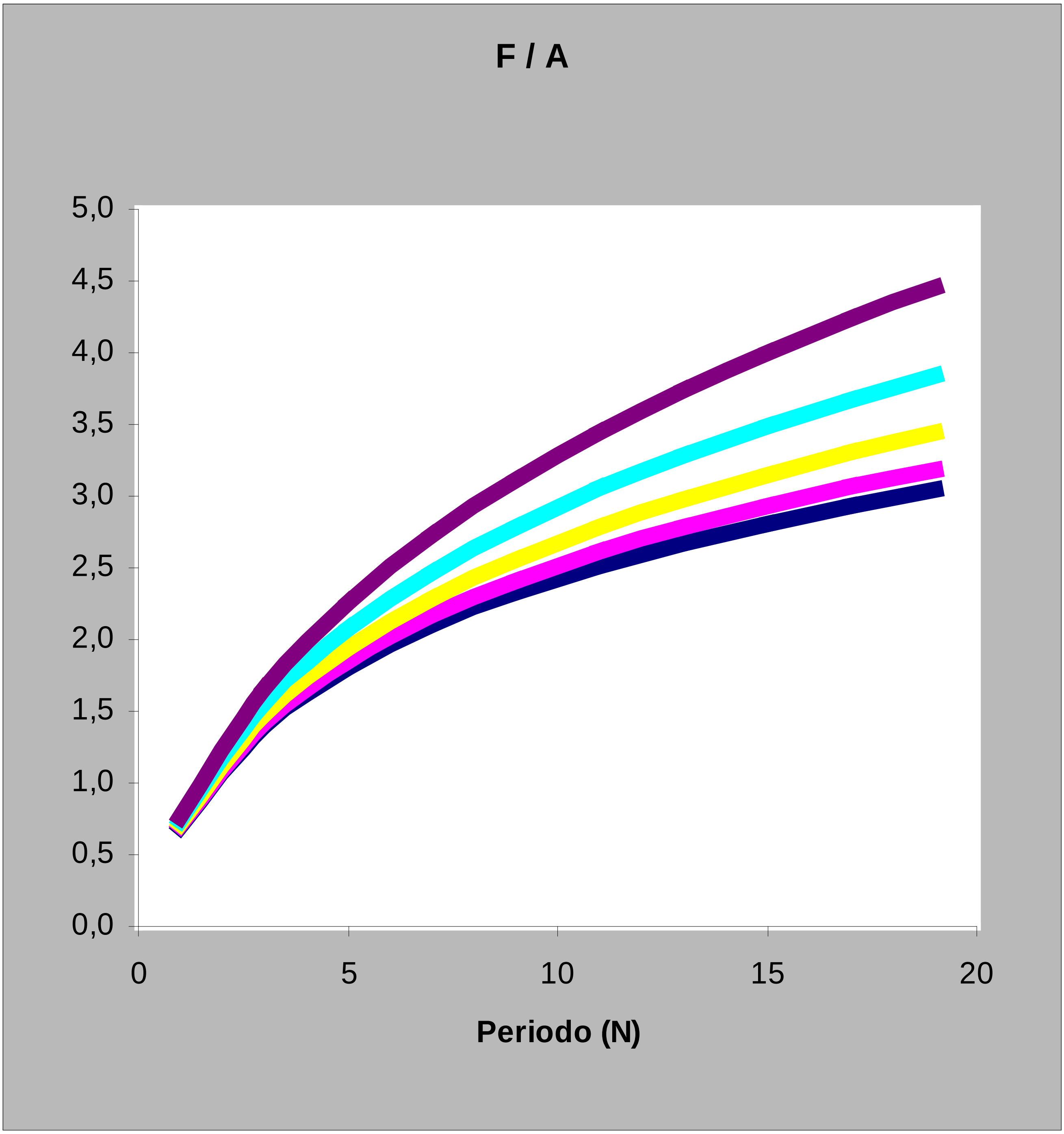
Pago es el pago que se efectúa cada período y que no puede cambiar durante la vigencia de la anualidad. Generalmente, el argumento pago incluye el capital y el interés pero ningún otro arancel o impuesto.

Va es el valor actual de la cantidad total de una serie de pagos futuros. Si el argumento va se omite, se considerará 0 (cero).

Tipo es el número 0 ó 1 e indica cuándo vencen los pagos. Si el argumento tipo se omite, se considerará 0.

Defina tipo como Si los pagos vencen
0 Al final del período
2 Al inicio del período

			$(1+i)^N-1/i$		
N	**1%**	**4%**	**9%**	**16%**	**25%**
1	0.695555	0.702846	0.715224	0.733045	0.756828
3	1.395948	1.425451	1.476488	1.552066	1.656854
5	1.807908	1.857529	1.944317	2.075000	2.260338
7	2.101213	2.168372	2.286754	2.467148	2.727171
9	2.329299	2.411955	2.558542	2.783999	3.113118
11	2.516038	2.612597	2.784697	3.051415	3.444839
13	2.674189	2.783383	2.978825	3.283679	3.737346
15	2.811383	2.932178	3.149177	3.489557	4.000000
17	2.932548	3.064086	3.301146	3.674842	4.239069
19	3.041056	3.182610	3.438460	3.843570	4.458970


F / A
5,0
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0,0
0
5
10
15
20
Periodo (N)

2. Hallar A cuando se conoce F

La recíproca de las relaciones entre A *y* F dadas arriba matemáticamente es como sigue:

$$\mathbf{F = A}\left[\frac{i\%}{(1+i\%)^{N}-1}\right]$$

en que la cantidad $\left[\frac{i\%}{(1+i\%)^{N}-1}\right]$ se halla en tablas.

Expresada en símbolos,

A = F (A/F, i%, N)

Calculo Informatizado
EXCEL 97

PAGO Calcula el pago de un préstamo basándose en pagos constantes y en una tasa de interés constante.

Sintaxis

PAGO(tasa; nper; va; vf; tipo)

Tasa es la tasa de interés del préstamo.

Nper es el número total de pagos del préstamo.

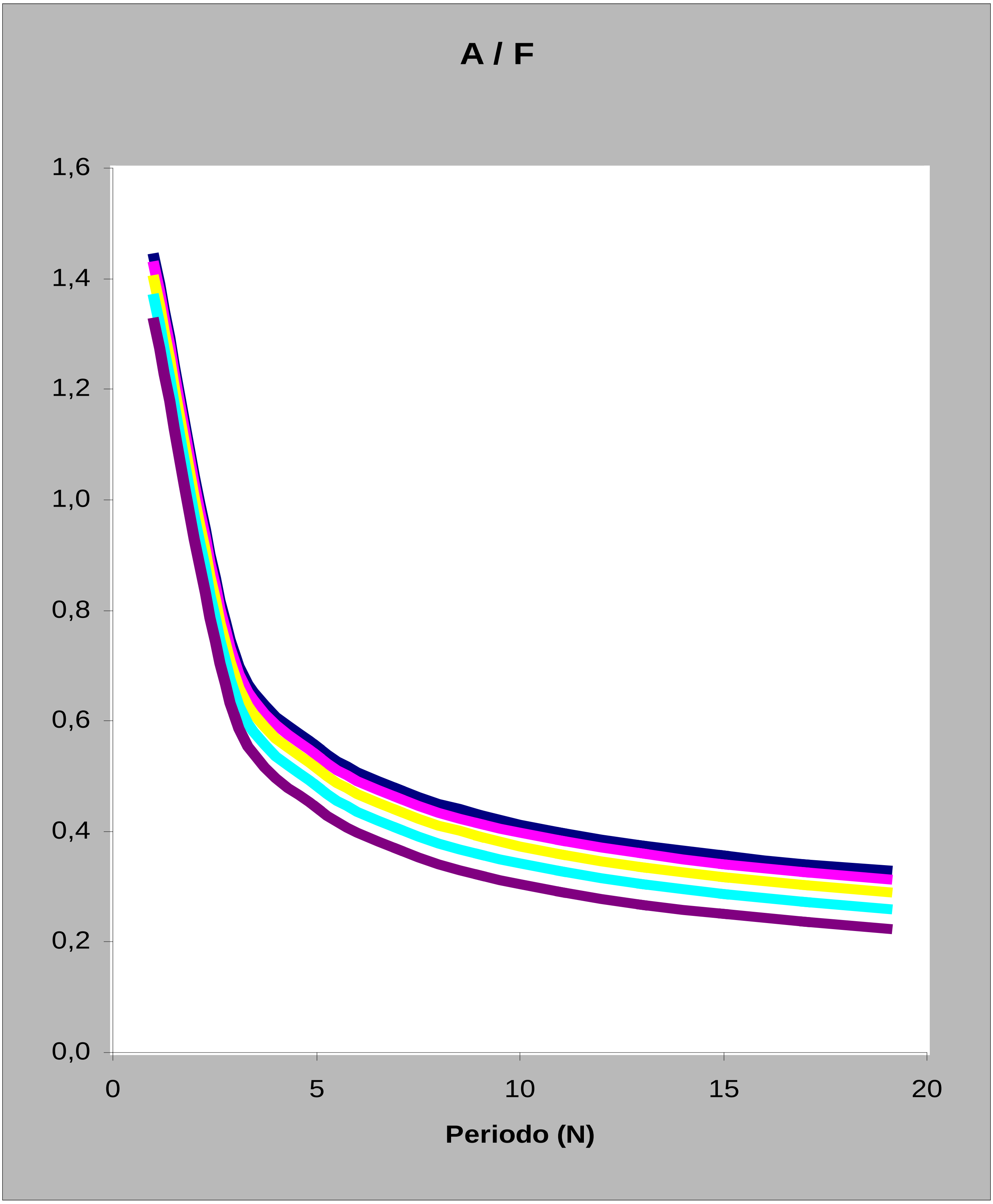
Va es el valor actual o lo que vale ahora la cantidad total de una serie de pagos futuros.

Vf es el valor futuro o saldo en efectivo que desea lograr después de efectuar el último pago. Si el argumento vf se omite, se asume que el valor es 0 (por ejemplo, el valor futuro de un préstamo es 0).

Tipo es el número 0 (cero) o 1 e indica el vencimiento de pagos.

Defina tipo como	Si los pagos vencen
0 u omitido	Al final del período
1	Al inicio del período

			1/(1 + i)^{N}-1 / i		
N	**1%**	**4%**	**9%**	**16%**	**25%**
1	1.43770	1.42279	1.39816	1.36417	1.32130
3	0.71636	0.70153	0.67728	0.64430	0.60355
5	0.55313	0.53835	0.51432	0.48193	0.44241
7	0.47592	0.46118	0.43730	0.40533	0.36668
9	0.42931	0.41460	0.39085	0.35920	0.32122
11	0.39745	0.38276	0.35911	0.32772	0.29029
13	0.37395	0.35927	0.33570	0.30454	0.26757
15	0.35570	0.34104	0.31754	0.28657	0.25000
17	0.34100	0.32636	0.30293	0.27212	0.23590
19	0.32883	0.31421	0.29083	0.26017	0.22427


A / F
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0
5
10
15
20
Periodo (N)

3. - Hallar P cuando se conoce A

Si tomamos la ecuación

$$\mathbf{F = A}\left[\frac{(1+i\%)^N - 1}{i\%}\right]$$

y hacemos la sustitución de

$$\mathbf{F = P\,(1 + i\,\%)^N}$$

hallaremos que

$$\mathbf{P = A}\left[\frac{(1+i\%)^N - 1}{i\%}\right]\left[\frac{1}{1+i\%}\right]^N$$

que en forma simplificada es

$$\mathbf{P = A}\left[\frac{(1+i\%)^N - 1}{i\%(1+i\%)^N}\right]$$

El factor dentro de los corchetes se halla en las tablas.
Expresado en símbolos

P = A(P/A, i%, N)

Calculo Informatizado
EXCEL 97

VA Devuelve el valor actual de una inversión. El valor actual es el valor que tiene actualmente la suma de una serie de pagos que se efectuarán en el futuro. Por ejemplo, cuando pide dinero prestado, la cantidad del préstamo es el valor actual para el prestamista.

Sintaxis

VA(tasa; nper; pago; vf; tipo)

Tasa es la tasa de interés por período.

Nper es el número total de períodos en una anualidad

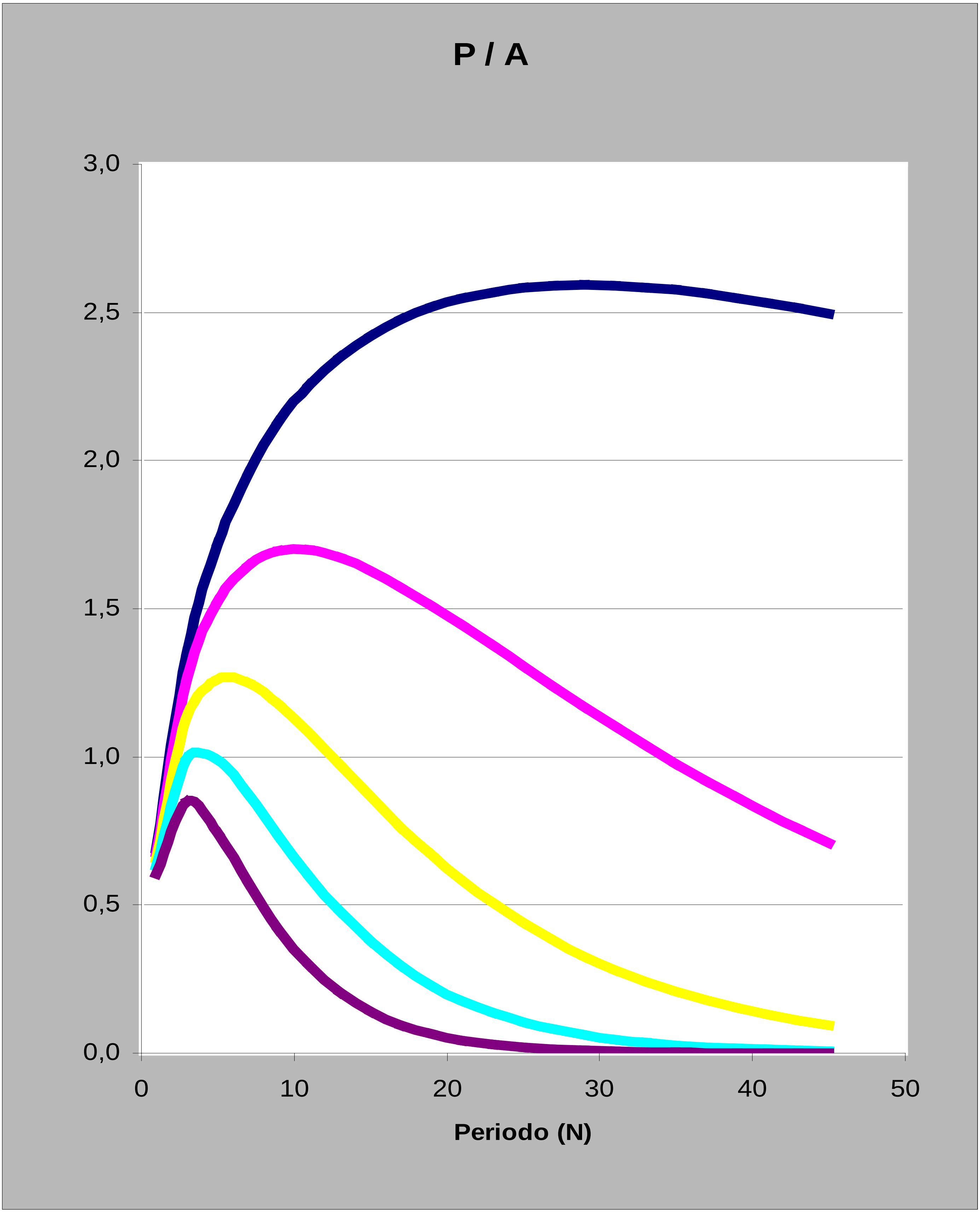
Pago es el pago que se efectúa en cada período y que no cambia durante la vida de la anualidad. Por lo general, el argumento pago incluye el capital y el interés pero no incluye ningún otro cargo o impuesto.

Vf es el valor futuro o el saldo en efectivo que desea lograr después de efectuar el último pago. Si el argumento vf se omite, se asume que el valor es 0 (por ejemplo, el valor futuro de un préstamo es 0).

Tipo es el número 0 ó 1 e indica el vencimiento de los pagos.

Defina tipo como	Si los pagos vencen
0 u omitido	Al final del período
2	Al inicio del período

			$1/(1+i)^N - 1/i$		
N	**1%**	**4%**	**9%**	**16%**	**25%**
1	0.6887	0.6758	0.6562	0.6319	0.6055
3	1.3549	1.2672	1.1401	0.9943	0.8483
5	1.7202	1.5268	1.2637	0.9879	0.7407
7	1.9598	1.6478	1.2509	0.8729	0.5719
9	2.1298	1.6946	1.1780	0.7321	0.4178
11	2.2552	1.6971	1.0792	0.5963	0.2959
13	2.3497	1.6716	0.9716	0.4769	0.2055
15	2.4216	1.6281	0.8646	0.3766	0.1407
17	2.4762	1.5730	0.7628	0.2947	0.0955
19	2.5172	1.5106	0.6687	0.2291	0.0643
21	2.5473	1.4439	0.5834	0.1771	0.0430
23	2.5686	1.3750	0.5069	0.1364	0.0286
25	2.5824	1.3054	0.4391	0.1046	0.0190
27	2.5901	1.2362	0.3793	0.0800	0.0126
29	2.5925	1.1683	0.3269	0.0611	0.0083
31	2.5905	1.1021	0.2812	0.0465	0.0055
33	2.5846	1.0380	0.2415	0.0354	0.0036
35	2.5755	0.9764	0.2072	0.0268	0.0024
37	2.5636	0.9174	0.1774	0.0203	0.0015
39	2.5492	0.8611	0.1518	0.0154	0.0010
41	2.5326	0.8074	0.1298	0.0116	0.0007
43	2.5142	0.7565	0.1108	0.0088	0.0004
45	2.4942	0.7083	0.0946	0.0066	0.0003
47	2.4727	0.6627	0.0807	0.0050	0.0002


P / A
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0,0
0
10
20
30
40
50
Periodo (N)

4. - Hallar A cuando se conoce P

La recíproca de la relación entre A *y* P dada arriba, en forma matemática es

$$\mathbf{A = P}\left[\frac{i\%(1+i\%)^N}{(1+i\%)^N-1}\right]$$

El factor entre corchetes se halla en las tablas.

Expresando en símbolos

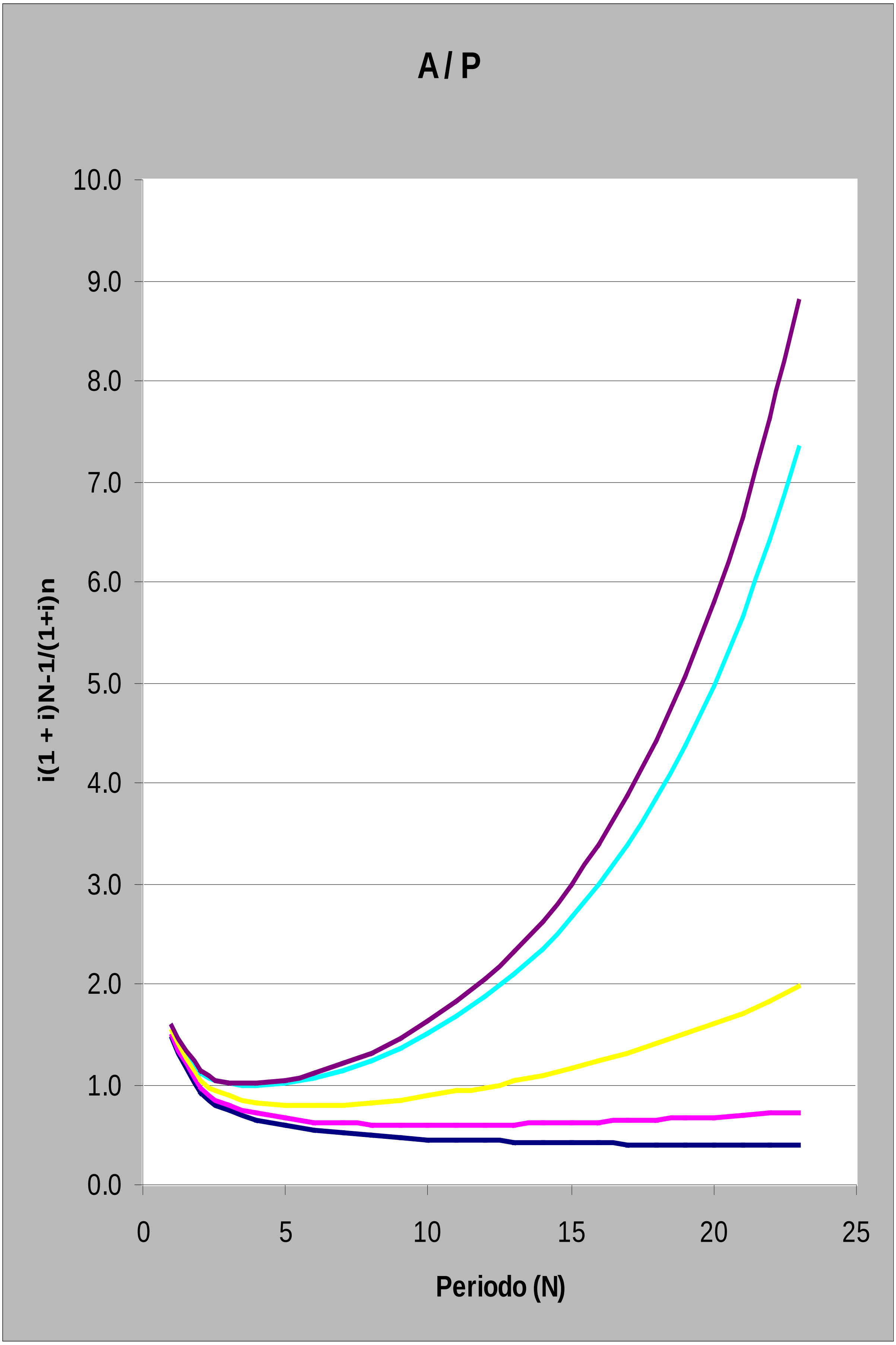
A = P(A/P, i%, N)

Calculo Informatizado
EXCEL 97

PAGO Calcula el pago de un préstamo basándose en pagos constantes y en una tasa de interés constante.
Sintaxis

PAGO(tasa; nper; va; vf; tipo)

			$1/(1+i)^N-1/i$		
N	**1%**	**4%**	**9%**	**16%**	**17%**
1	1.4521	1.4797	1.5240	1.5824	1.5905
2	0.9234	0.9630	1.0289	1.1203	1.1333
3	0.7381	0.7891	0.8771	1.0057	1.0245
4	0.6414	0.7037	0.8151	0.9864	1.0123
5	0.5813	0.6550	0.7913	1.0122	1.0467
6	0.5402	0.6253	0.7886	1.0672	1.1122
7	0.5102	0.6069	0.7994	1.1455	1.2032
8	0.4874	0.5959	0.8201	1.2451	1.3182
9	0.4695	0.5901	0.8489	1.3660	1.4578
10	0.4552	0.5882	0.8846	1.5093	1.6237
11	0.4434	0.5892	0.9266	1.6770	1.8188
12	0.4337	0.5927	0.9749	1.8718	2.0466
13	0.4256	0.5982	1.0292	2.0970	2.3116
14	0.4187	0.6054	1.0897	2.3565	2.6191
15	0.4130	0.6142	1.1566	2.6552	2.9754
16	0.4080	0.6243	1.2303	2.9985	3.3878
17	0.4038	0.6357	1.3109	3.3927	3.8650
18	0.4003	0.6483	1.3991	3.8453	4.4170
19	0.3973	0.6620	1.4953	4.3648	5.0554
20	0.3947	0.6768	1.6001	4.9611	5.7939
21	0.3926	0.6926	1.7141	5.6455	6.6482
22	0.3908	0.7094	1.8381	6.4311	7.6367
23	0.3893	0.7273	1.9727	7.3331	8.7806
24	0.3882	0.7462	2.1189	8.3688	10.1048


A / P
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0.0
i(1 + i)N-1/((1+i)n
0
5
10
15
20
25
Periodo (N)

5. - Relaciones entre factores de intereses.

Existen las relaciones siguientes entre los seis factores básicos de intereses:

$$(P/F, i\%, N) = \frac{1}{(F/P, i\%, N)}$$

$$(A/P, i\%, N) = \frac{1}{(P/A, i\%, N)}$$

$$(A/F, i\%, N) = \frac{1}{(F/A, i\%, N)}$$

$$(A/P, i\%, N) = i\% + (A/F, i\%, N)$$

$$(F/A, i\%, N) = (P/A, i\%, N) (F/P, i\%, N)$$

$$(P/A, i\%, N) = \sum_{j=1}^{N} (P/F, i\%, j)$$

$$(F/A, i\%, N) = \sum_{j=0}^{N-1} (P/F, i\%, j)$$

6. - Fórmulas de interés para series uniformes de gradientes.

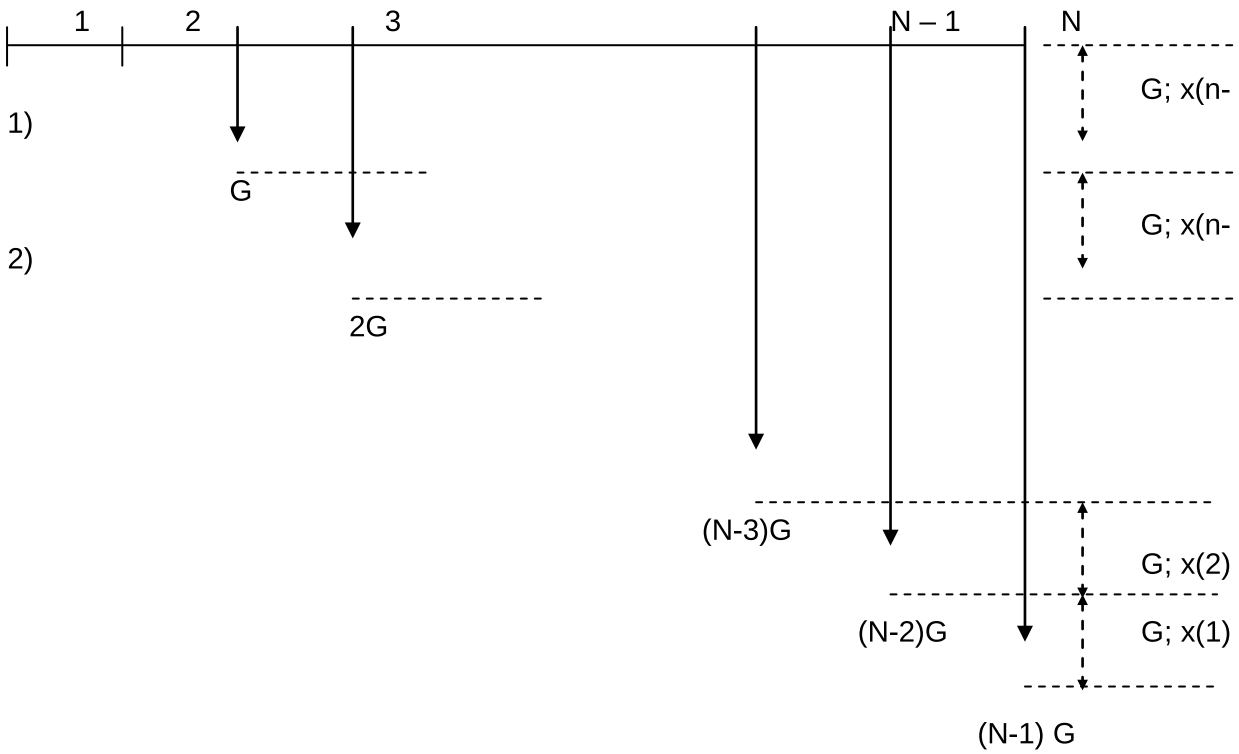
Algunos problemas de análisis económicos se refieren a entradas de dinero o a desembolsos proyectados para que se incrementen con una cantidad constante de dinero en cada período. Por ejemplo, los gastos de conservación y de reparaciones de equipos específicos pueden aumentar en virtud de una cantidad del cambio, relativamente constante, llamada G, en cada período.

La figura es un diagrama de flujo de dinero en una serie de desembolsos de fin de período, que aumentan en función del cambio en cantidad constante de G por periodo. Para facilitar la derivación de las fórmulas se da por sentado que se inicia al final del segundo periodo una serie de pagos uniformes de la cantidad G; que al final del tercer período se inicia otra serie de las cantidades G, y así sucesivamente. Cada una de estas series termina en la misma fecha, al final del período enésimo (N). La suma futura (al final del período), equivalente a la serie de gradientes mostrada en la figura, es

$$\mathbf{F = G\, [\, (F/A,i,N\text{-}1) + (F/A,i,N\text{-}2) + \ldots/\ldots + (F/A,i,2) + (F/A,i,1)]}$$

$$\mathbf{F = G/i\, [\, (1 + i)^{N-1} +(1 + i)^{N-2} + \ldots/\ldots + (1 + i)^{2} +(1 + i)^{1} - (N - 1)\,]}$$

$$\mathbf{F = G/i\, [\, (1 + i)^{N-1} +(1 + i)^{N-2} + \ldots/\ldots + (1 + i)^{2} +(1 + i)^{1} + 1\,] - NG/i}$$



$$F = \frac{G}{i\%} \cdot \left[\frac{(1+i\%)^N - 1}{i\%} - N \right]$$

El valor anual equivalente de la serie de gradientes puede hallarse multiplicando la cantidad antes dada, de principal más intereses compuestos

$$A = \frac{G}{i\%} \cdot \left[\frac{(1+i\%)^N - 1}{i\%} - N \right] \cdot \left[\frac{i\%}{(1+i\%)^N - 1} \right]$$

$$A = \frac{G}{i\%} - \frac{NG}{i\%} \left[\frac{i\%}{(1+i\%)^N - 1} \right]$$

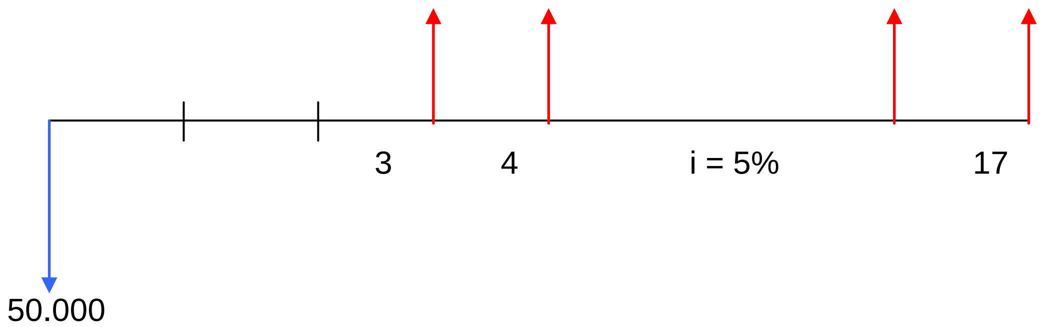
$$A = G \cdot \left\{ \frac{1}{i\%} - \left[\frac{N}{(1+i\%)^N - 1} \right] \right\}$$

El factor dentro de los corchetes de llave se halla en tablas, La ecuación expresada con símbolos para hallar la serie uniforme equivalente a la serié de gradientes es

A = G(A/C, i, N)

E. Pagos uniformes diferidos

1. Frecuentemente los pagos uniformes tienen lugar en fechas en que es preciso aplicar más de una fórmula de intereses para hallar la respuesta deseada. Por ejemplo, supongamos que una persona recibe prestadas 50.000 unidades de dinero para comprar un negocio pequeño y que no desea devolver el préstamo hasta el final del tercer año después de comprar el negocio. Con un tipo de interés compuesto del 5 % capitalizado, anualmente, se desea determinar la cantidad de su pago anual, si efectúan 15 pagos.



A la luz del diagrama de flujo de dinero se evidencia que no es factible la aplicación de la fórmula "hallar A cuando se conoce P" puesto que P no aparece en un período antes de la primera A. Sin embargo, el problema puede resolverse lógicamente en dos etapas. La primera es hallar el importe del préstamo más intereses después de dos años, o sea

$$F_2 = 50.000\ (1.103) = 55.150$$

Nótese el uso del índice para denotar el tiempo. El uso directo de A ya puede hacerse, porque la cantidad por reembolsar (55.150) se recibe un período antes del primer pago a cuenta del préstamo. Por consiguiente, la magnitud del pago del préstamo será:

$$A = 55.150\ (0{,}09634) = 5.313$$

2. Frecuencia de la capitalización de intereses; tipos nominales y efectivos.

En casi todos los estudios de orden económico se toma en consideración el interés compuesto como si se hiciera la capitalización una vez al año. En la práctica, la acumulación de intereses puede hacerse con mayor frecuencia; por tanto, es muy importante tomar nota de los efectos de la frecuencia con que se capitalizan los intereses y resolver acertadamente los problemas en los que no es apropiado dar por hecho que la capitalización es anual.

Por vía de ejemplo, pongamos que el tipo de interés compuesto es del 12 % capitalizado trimestralmente. En este caso se entiende que el 12 % es el tipo anual y se le da el nombre de tipo nominal de interés. El número de período de capitalización en el año es cuatro. Por tanto, el tipo de períodos de interés es 12 %/4- = 3 % Por trimestre. El tipo efectivo de interés es el tipo exacto anual tomando en cuenta la capitalización de intereses que ocurre durante el año.

La fórmula siguiente se aplica para calcular el tipo efectivo de interés,

$$\text{Tipo efectivo} = (1 + r/M)^{M} - 1$$

en la que M = número de períodos de intereses por años
r = tipo nominal de interés,

Puede determinarse el tipo de interés efectivo que se capitaliza continuamente, aplicando la ecuación y haciendo que M, el número de periodos de interés por ano, se vuelva infinitamente grande.

Así, el tipo efectivo de interés cuando los intereses se acumulen continuamente es $\mathbf{e^{r} - 1}$**,** en que e es la base de los logaritmos neperianos o naturales y es igual a 2.7183.

En la tabla se muestra la repercusión de la frecuencia de la capitalización de intereses compuesta sobre el tipo efectivo de interés, de un tipo nominal del 12 %

Repercusión de la frecuencia de la capitalización sobre la tasa efectiva de interés

Frecuencia De la capitalización	Nº de periodos de Capitalización por años	Para un tipo nominal del 12%	
		Tipo de interés Por periodo	Tipo efectivo
Anual	1	12 %	12,0 %
Semestral	2	6 %	12,4 %
Trimestral	4	3 %	12,6 %
Mensual	12	1%	12,7 %
Continuo	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$	12,7 ↑ %

F. - <u>Fórmulas de capitalización continua de intereses</u>

1. - En ciertos casos, especialmente si los pagos se hacen con bastante frecuencia en la mitad de los períodos, en lude al principio o al final de ellos, puede tener importancia la exactitud teórica adicional de la capitalización continua.

La capitalización continua significa que el acrecentamiento de intereses o utilidades es proporcional a la cantidad del principal total más los intereses en cada instante.

Para ilustrar el caso, el valor futuro de una cantidad actual de 10.000 al 20 % de interés nominal capitalizado continuamente por cinco años es $10.000^{0.20(5)} = 27.183$

El tipo efectivo de interés, en este caso, puede expresarse como $e^{r} - 1 = e^{0.20} - 1 = 22{,}2$ %

Podemos hallar el valor futuro de los mismos 10.000 al tipo efectivo de interés de 22,2 % capitalizable al final de cada año en cinco años, que es

F = 10. 000 (1 + 0,222)^5 = 27.183

Esto ilustra el principio general de que la capitalización continua a un tipo nominal determinado de intereses es equivalente a la capitalización anual discreta al tipo efectivo correspondiente para la capitalización continua.

2. - Pagos continuos durante todo el año

Si se recibe o se desembolsa una unidad continuamente durante todo el año al tipo nominal de r o al tipo efectivo i, puede mostrarse que el valor actual es

$$P = \frac{e^r - 1}{re^r} = \frac{i\%(1+i\%)^{-1}}{\ln(1+i\%)}$$

Comúnmente se conoce esto como factor del valor actual de capitalizaci6n continua.

Expresado en símbolos

P = F (P/F, i%, l)

en que F es la cantidad anual derramada uniformemente durante un año. La tabla muestra una tabulación de estos factores para una amplia gama de tipos efectivos de interés,

Factor del valor actual de capitalización continua (valor actual al empezar el año de pagos continuos uniformes a razón de una unidad monetaria anual durante todo el año).

Tipo efectivo anual de interes i	**Factor**	**Tipo efectivo anual de interes i**	**Factor**
0.5%	0.997510	10.0%	0.953824
1.0%	0.995041	12.0%	0.945417
2.0%	0.990164	15.0%	0.933264
3.0%	0.985365	20.0%	0.914136
4.0%	0.980644	25.0%	0.896284
5.0%	0.975997	30.0%	0.879576
6.0%	0.971423	35.0%	0.863896
7.0%	0.966921	40.0%	0.849147
8.0%	0.962488	45.0%	0.835240
9.0%	0.958123	50.0%	0.822101

Si se deseara determinar el valor actual o el futuro de pagos anuales que fluyan continuamente durante un periodo de años, sólo seria necesario convertir los flujos continuos en discretos anuales, aplicando la ecuación antes dada y luego la fórmula de capitalización discreta apropiada para el tipo de interés efectivo correspondiente.

CUADRO DE RELACIÓN INTERES NOMINAL – INTERES EFECTIVO

		INTERES NOMINAL					
Nº de Periodos		**1.000%**	**4.000%**	**9.000%**	**16.000%**	**25.000%**	**36.000%**
1	**Anual**	1.000%	4.000%	9.000%	16.000%	25.000%	36.000%
2	**Semestral**	1.002%	4.040%	9.202%	16.640%	26.563%	39.240%
3	**Cuatrimestral**	1.003%	4.054%	9.273%	16.869%	27.141%	40.493%
4	**Trimestral**	1.004%	4.060%	9.308%	16.986%	27.443%	41.158%
6	**Bimestral**	1.004%	4.067%	9.344%	17.105%	27.753%	41.852%
12	**Mensual**	1.005%	4.074%	9.381%	17.227%	28.073%	42.576%
365	**Anual**	1.005%	4.081%	9.416%	17.347%	28.392%	43.308%
∞	**Continuo**	1.005%	4.081%	9.417%	17.351%	28.403%	43.333%

Barcelona, 12.2001