Tema 7

ANALISIS SISTEMATIC DE CIRCUITS

Índex

- **Anàlisis per tensions de node.**
  - Amb només Fonts de corrent.
  - Amb Fonts de tensió amb resistència en sèrie.
  - Amb una o mes Fonts de tensió ideal compartint node.
  - Amb amplificadors operacionals.
- **Anàlisis per corrents de malla.**
  - Amb només Fonts de tensió.
  - Amb Fonts de intensitat amb resistència en paral·lel.
  - Amb Font de intensitat travessades per un sol corrent de malla.

Procediment per l'anàlisi per tensions de node

- **Pas 1:**
  – Seleccionar un node com a referència i identificar una tensió de node per cada un dels N-1 nodes restants. Identificar una intensitat per cada element del circuit.
- **Pas 2:**
  – Formular la LCK per cada node, excepte el de referència.
- **Pas 3:**
  – Expressar les intensitats en funció de les tensions de node i substituir-les en les equacions obtingudes en el pas 2. Les variables incògnites han de ser sols tensions de node.
- **Pas 4:**
  – Resoldre el sistema de N-1 equacions lineals. Utilitzar Kramer o qualsevol altre sistema.

Premisses per l'anàlisi per tensions de node

- **Definició de tensió de node :**
  - El voltatge del node A és la diferencia de potencial entre aquest node i el que hem escollit com a referència.

- **Totes les variables de branca d'un circuit es poden determinar a partir de les tensions de node.**

- **Condició :**
  - Només hi poden haver fonts de corrent.

Exemple

PAS Nº 2:

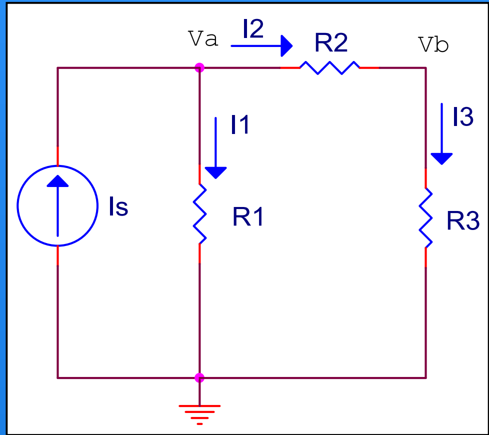
NODE a: $I_S - I_1 - I_2 = 0$

NODE b: $I_2 - I_3 = 0$

PAS Nº 3:

I_S = ENTRADA CONEGUDA

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = \dfrac{1}{R_1}\cdot V_a \\ I_2 = \dfrac{1}{R_2}\cdot (V_a - V_b) \\ I_3 = \dfrac{1}{R_3}\cdot V_b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{NODE A} \Rightarrow I_S - \dfrac{1}{R_1}\cdot V_a - \dfrac{1}{R_2}\cdot (V_a - V_b) = 0 \\ \text{NODE B} \Rightarrow I_2 = \dfrac{1}{R_2}\cdot (V_a - V_b) - \dfrac{1}{R_3}\cdot V_b = 0 \end{array}$$



ORDENANT LES EQUACIONS:

$$\text{NODE A} \Rightarrow \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\cdot V_a - \frac{1}{R_2}\cdot V_b = I_S$$

$$\text{NODE B} \Rightarrow -\frac{1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\cdot V_b = 0$$

EXPRESAT EN FORMA MATRICIAL

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_S \\ 0 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓ PER KRAMER

$$V_a = \frac{\begin{vmatrix} I_S & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \end{vmatrix}} = \frac{I_S \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\cdot\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - \left(-\frac{1}{R_2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{R_2}\right)}$$

Forma sistemàtica de plantejar el sistema d'equacions

FORMA GENERAL DE PLANTEJAR EL SISTEMA MATRICIAL DE EQUACIONS DE TENSIONS DE NODES

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & \cdots & -Y_{1N} \\ -Y_{21} & Y_{22} & \cdots & -Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -Y_{N1} & -Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \\ \vdots \\ I_{SN} \end{pmatrix}$$

V_n= Voltatge desconegut del node n

I_{sn} = Corrent de font equivalent neta que va cap el node n.

Y_{nn} = Σ de admitancies connectades al node n.

Y_{nm} = Y_{mn} = Admitancia equivalent que connecta directament els nodes n i m.

PROPIETATS DE LA MATRIU D'ADMITANCIES:

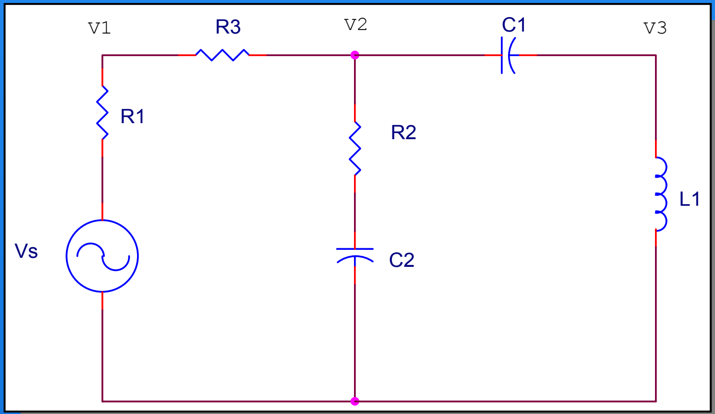
1.- Es simètrica respecte la diagonal principal.

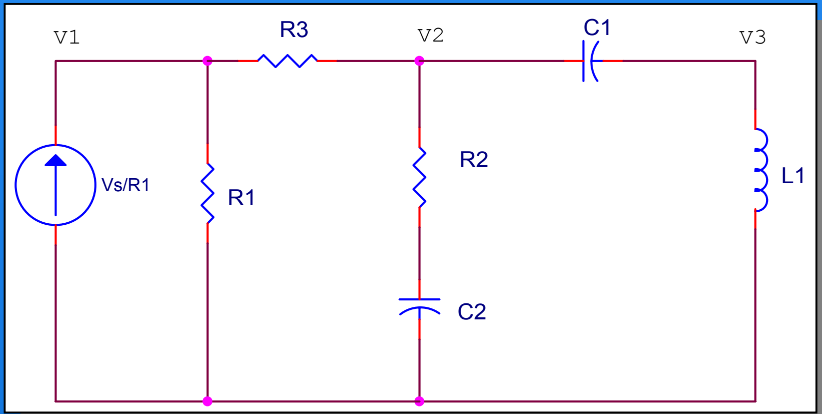
2.- Els elements Ynn de la diagonal principal son positius, mentre que els que estan fora de la diagonal son negatius o zero.

3.- Qualsevol quantitat Ynm fora de la diagonal també surt com part del termes Ynn i Ymm.

Problema exemple amb una font de tensió amb resistència en sèrie

Primer s'ha de fer l'equivalent de font de tensió a font de corrent.



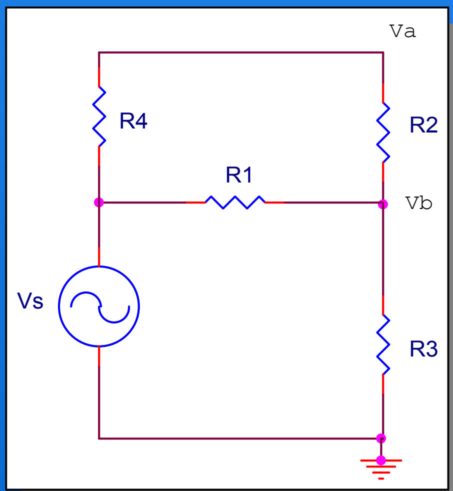


$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right) & -\frac{1}{R_3} & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & \left(\frac{1}{R_3}+C_1\cdot s+\frac{C_2\cdot s}{R_2\cdot C_2\cdot s+1}\right) & -C_1\cdot s \\ 0 & -C_1\cdot s & \left(\frac{1}{L_1\cdot s}+C_1\cdot s\right) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{V_S}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problema exemple amb una font de tensió ideal

• No es plantegen les equacions del node on hi ha la font de tensió ideal, ja que aquesta es coneguda.

•La matriu d'admitancies es planteja igual. En el vector de intensitats s'ha de tenir en compte la contribució de la font de tensió al node que hi està connectat directament.



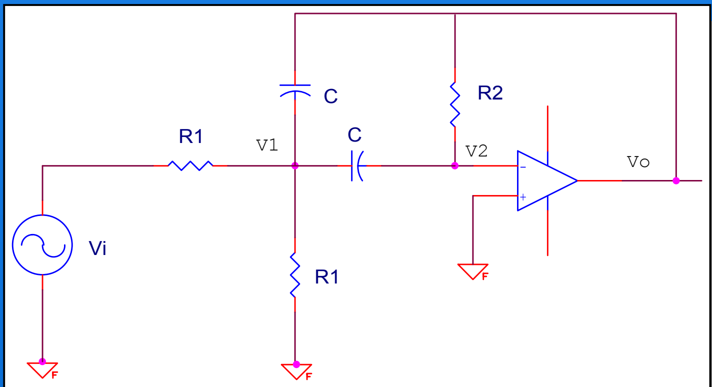
$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right) & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_S}{R_4} \\ \frac{V_S}{R_1} \end{pmatrix}$$

Exemple amb A.O. Amb la pota + connectada a massa

• Es plantegen les equacions de node normal.

• La columna de la matriu d’admitancies que multiplica a la tensió de node de la pota “– “ del A.O. s’elimina ja que es zero.

• La fila corresponen a l’equació del node de la tensió de sortida del A.O. S’elimina.

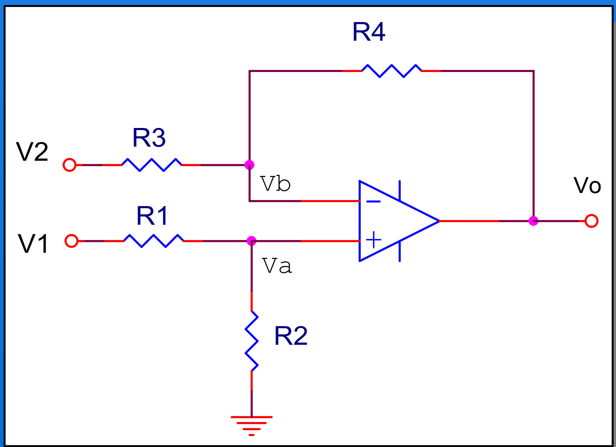


$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1}+C\cdot s+C\cdot s\right) & -\cancel{C\cdot s} & -C\cdot s \\ -C\cdot s & \cancel{\left(\frac{1}{R_2}+C\cdot s\right)} & -\frac{1}{R_2} \\ -\cancel{C\cdot s} & -\cancel{\frac{1}{R_2}} & \cancel{\left(\frac{1}{R_2}+C\cdot s\right)} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} V_1 \\ \cancel{V_2} \\ V_O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}\cdot V_i \\ 0 \\ \cancel{I_O} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1}+C\cdot s+C\cdot s\right) & -C\cdot s \\ -C\cdot s & -\frac{1}{R_2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} V_1 \\ V_O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}\cdot V_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple amb A.O. Amb la pota + no connectada a massa

- Es plantegen les equacions de node normal.
- Les columnes de la matriu d'admitancies que multiplica a les tensions de node de la pota "– " i "+" del A.O. es sumen ja que tenen la mateixa tensió.
- La fila corresponen a l'equació del node de la tensió de sortida del A.O. S'elimina.



$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) & -\frac{1}{R_4} \\ 0 & -\cancel{\frac{1}{R_4}} & \left(\cancel{\frac{1}{R_4}}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_a \\ \cancel{V_b} \\ V_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}\cdot V_1 \\ \frac{1}{R_3}\cdot V_2 \\ \cancel{I_O} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & 0 \\ \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) & -\frac{1}{R_4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_a \\ V_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}\cdot V_1 \\ \frac{1}{R_3}\cdot V_2 \end{pmatrix}$$

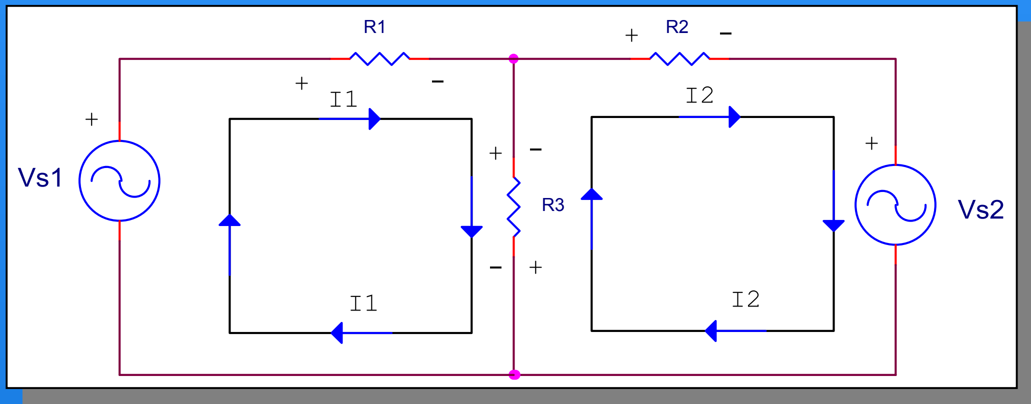
Procediment per l'anàlisi per corrents de malla

- **Pas 1:**
  - Seleccionar un corrent de malla per cada malla independent i identificar una tensió amb cada element del circuit.
- **Pas 2:**
  - Formular per cada malla seleccionada la LVK en funció dels corrents de malla.
- **Pas 3:**
  - Ordenar les equacions i resoldre el sistema d'equacions resultant. Utilitzar Kramer o qualsevol altre sistema.

Premisses per l'anàlisi per corrents de malla

- **Definició de corrent de malla :**
  - Corrent fictícia que circularia per totes les branques que formen la malla.
- **Totes les variables de branca d'un circuit es poden determinar a partir dels corrents de malla.**
- **Condició :**
  - Només hi poden haver fonts de tensió.
- **Numero de malles independents :**
  - Es el numero de malles que no engloben cap element en el seu interior.

Exemple



MALLA Nº 1 :

$$I_1 \cdot R_1 + I_1 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_3 = V_{S1}$$

$$(R_1 + R_3) \cdot I_1 - R_3 \cdot I_2 = V_{S1}$$

MALLA Nº 2 :

$$I_2 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_2 + V_{S2} = 0$$

$$- R_3 \cdot I_1 + (R_3 + R_2) \cdot I_2 = -V_{S2}$$

FORMA MATRICIAL :

$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_3) & -R_3 \\ -R_3 & (R_3 + R_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{S1} \\ -V_{S2} \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓ PER KRAMER

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_{S1} & -R_3 \\ -V_{S2} & (R_2 + R_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & -R_3 \\ -R_3 & (R_2 + R_3) \end{vmatrix}} = \frac{[V_{S1} \cdot (R_2 + R_3)] - [(-V_{S2}) \cdot (-R_3)]}{[(R_1 + R_3) \cdot (R_2 + R_3)] - [(-R_3) \cdot (-R_3)]}$$

Forma sistemàtica de plantejar el sistema d'equacions

FORMA GENERAL DE PLANTEJAR EL SISTEMA MATRICIAL DE EQUACIONS DE CORRENTS DE MALLA

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & -Z_{12} & \cdots & -Z_{1N} \\ -Z_{21} & Z_{22} & \cdots & -Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -Z_{N1} & -Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{S1} \\ V_{S2} \\ \vdots \\ V_{SN} \end{pmatrix}$$

I_n= Intensitat desconeguda de la malla n.

V_{sn} = Font de tensió equivalent neta a favor del corrent de malla.

Z_{nn} = Σ de impedancies de la malla n.

Z_{nm} = Z_{mn} = Impedància equivalent que comparteixen les malles n i m.

Tots els corrents de malla han d'anar en el mateix sentit.

PROPIETATS DE LA MATRIU DE IMPEDANCIES :

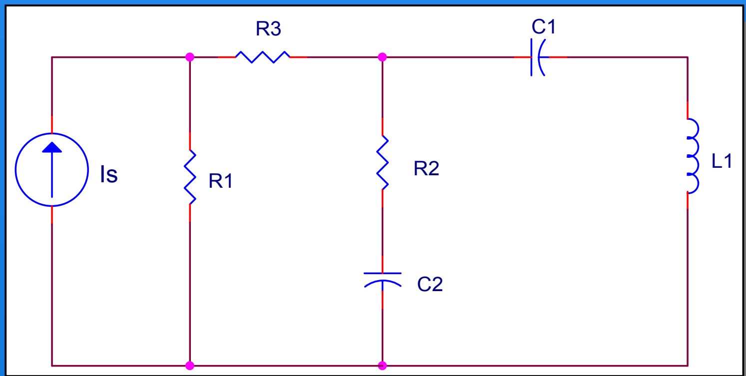
1.- Es simètrica respecte la diagonal principal.

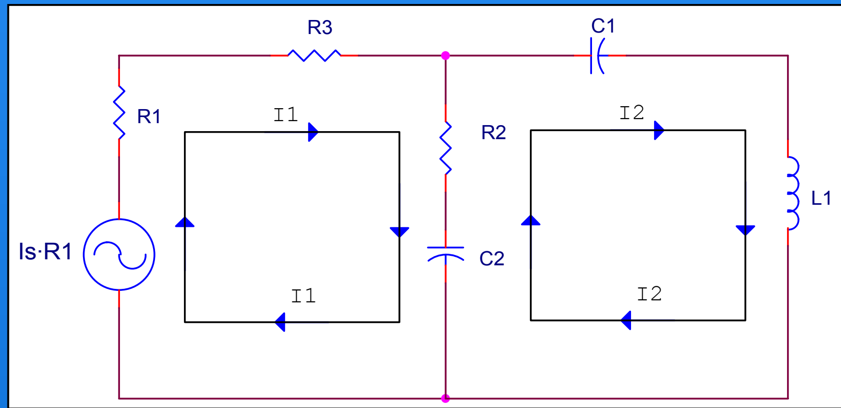
2.- Els elements Znn de la diagonal principal son positius, mentre que els que estan fora de la diagonal son negatius o zero.

3.- Qualsevol quantitat Znm fora de la diagonal també surt com part del termes Znn i Zmm.

Problema exemple amb una font de corrent amb resistència en paral·lel

Primer s'ha de fer l'equivalent de font de corrent a font de tensió.

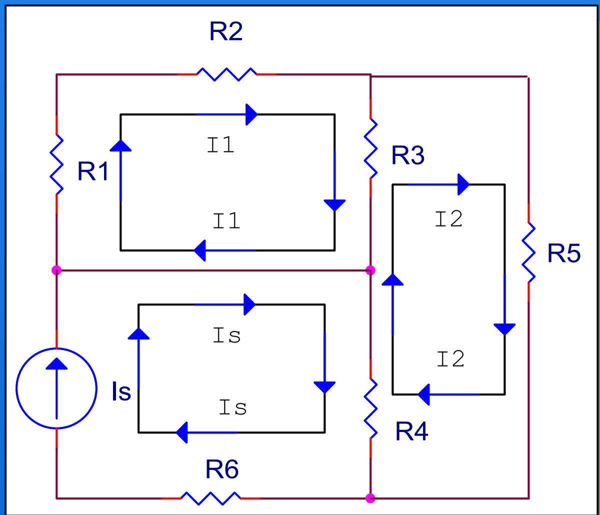




$$\begin{pmatrix} \left(R_1 + R_3 + R_2 + \dfrac{1}{C_2 \cdot s}\right) & -\left(R_2 + \dfrac{1}{C_2 \cdot s}\right) \\ -\left(R_2 + \dfrac{1}{C_2 \cdot s}\right) & \left(R_2 + \dfrac{1}{C_2 \cdot s} + \dfrac{1}{C_1 \cdot s} + L_1 \cdot s\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_S \cdot R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple amb una font de corrent travessat per un sol corrent de malla

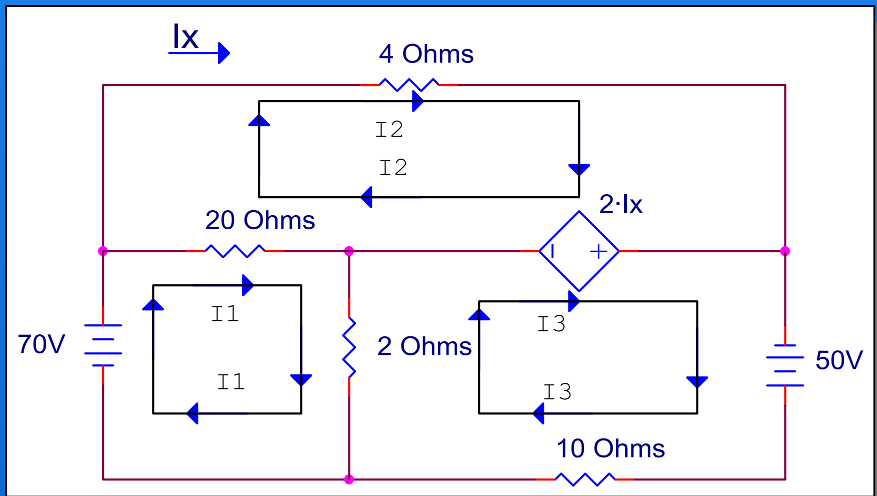
- No es plantegen les equacions de la malla on hi ha la font de corrent, ja que aquest es conegut.
- La matriu de impedàncies es planteja igual. En el vector de tensions s'ha de tenir en compte la contribució de la font de corrent a les malles veïnes.



$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_2 + R_3) & -R_3 \\ -R_3 & (R_3 + R_4 + R_5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_S \cdot R_4 \end{pmatrix}$$

Exemple amb una font controlada

- Es plantegen les equacions de la malla com si fossin font independents.
- Es busca una equació auxiliar que relacioni la variable de control de la font controlada amb les corrents de malla.
- Es refà i reordena el sistema d'equacions.



$$\begin{pmatrix} (20+2) & -20 & -2 \\ -20 & (20+4) & 0 \\ -2 & 0 & (10+2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +70 \\ -2 \cdot I_X \\ 2 \cdot I_X + 50 \end{pmatrix}$$

$$I_X = I_2$$

$$\begin{pmatrix} (20+2) & -20 & -2 \\ -20 & (20+4+2) & 0 \\ -2 & -2 & (10+2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +70 \\ 0 \\ +50 \end{pmatrix}$$